Mellen W. Haskell

Göttingen, 1887.

# THEORIE

DER

# ANALYTISCHEN FUNCTIONEN

VON


DR. OTTO BIERMANN,

PRIVATDOCENT AN DER DEUTSCHEN UNIVERSITÄT IN PRAG.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1887.

# Vorrede.

Es ist ein vielfach fühlbarer Mangel, dafs heute, wo die von Herrn Professor Dr. Weierstrass neu begründete Theorie der durch ein System in einander fortsetzbarer Potenzreihen definirten sogenannten analytischen Functionen bereits eine mannigfache Verwerthung findet, kein Lehrbuch existirt, welches dem Studirenden methodisch zeigt, auf welche Weise der Functionsbegriff entwickelt wird und welches die allgemeinen Aufgaben der auf die Theorie der Potenzreihen gestützten Functionenlehre sind.

Diesem Mangel hoffe ich durch das vorliegende Buch abzuhelfen, das bei dem Studium der fundamentalen Untersuchungen des Herrn Weierstrass über die analytischen Functionen und bei der Beschäftigung mit den Arbeiten entstanden ist, in welchen Weierstrass' Schüler des Meisters Behandlung der Functionenlehre erkennen lassen. Mit meines hochverehrten Lehrers Weierstrass Erlaubnis, dem der Plan der vorliegenden Arbeit bekannt ist, durfte ich das Buch durch einige seiner nur aus den Vorlesungen bekannten Untersuchungen zieren, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen gröfsten Dank auszusprechen als erste Pflicht erachte.

Meine Aufgabe lag in einer passenden Auswahl und Anordnung des umfangreichen Stoffes, bei der ich mich von dem Bestreben leiten liefs, den Leser auch auf kürzlich betretene Wege zu führen und dadurch zu selbstständigem Studium anzuregen, indem ich selbst Fragen berührte, die einer Beantwortung noch harren müssen. Die Darstellung möge durch folgende Bemerkungen gekennzeichnet werden.

Für den Plan war vor Allem die von Sig. Pincherle*) veröffentlichte Einleitung der Weierstrass'schen Functionenlehre mafsgebend und im Speciellen bestimmte diese Arbeit die Anordnung der ersten drei Capitel, in deren erstem die Grundlagen der Arithmetik auseinandergesetzt sind. Mit Hilfe der von H. Kossak**) herausgegebenen „Ele-

*) Pincherle, Giornale di matematiche t. 18.

**) Programmabhandlung des Werder'schen Gymnasiums in Berlin (Verlag von Nicolai).

mente der Arithmetik“ war es mir möglich, die noch nirgends ausführlich behandelte Weierstrass'sche Definitionsform der irrationalen Zahlengröſsen zu Grunde zu legen. Doch daneben lieſs ich die Cantor'sche Definitionsform dieser Gröſsen nicht auſser Acht, denn ich wollte den Begriff der Fundamentalreihe nicht entbehren. Die Einführung der aus zwei bei der Addition von einander unabhängigen Elemente zusammengesetzten Zahlengröſsen basirte ich auf die von Weierstrass in den Göttinger Nachrichten vom Jahr 1884 veröffentlichte Abhandlung über die aus $n$ Haupteinheiten gebildeten complexen Gröſsen.

In dem zweiten Capitel ist der Begriff der unbeschränkt veränderlichen Gröſse und eine Reihe von Theoremen über die stetig veränderlichen Gröſsen und Gröſsenmengen auseinandergesetzt. Darauf folgt die Theorie der rationalen ganzen und gebrochenen Functionen einer und mehrerer Variabeln, deren vorzüglichste Probleme in der Verallgemeinerung der in der Lehre von den ganzen Zahlen bestehenden Theoreme über die Theilbarkeit und Zerlegung enthalten sind.

Dann wird das bei der Einführung der irrationalen Zahlengröſsen verwendete Princip der Summenbildung einer unendlichen Menge von Gröſsen zur Construction neuer Ausdrücke und zwar von Summen unendlich vieler rationaler Functionen benutzt, unter denen die Potenzreihen eine hervorragende Rolle spielen, indem die Summen einer unbeschränkten Anzahl rationaler Functionen in den Bereichen ihrer gleichmäſsigen Convergenz durch Potenzreihen darstellbar sind.

An die Theorie der Potenzreihen wird der Begriff der monogenen analytischen Function geknüpft und deren allgemeine Eigenschaften entwickelt. Um aber den Umfang des aufgestellten Functionsbegriffes zu beurtheilen, hat man zunächst zu zeigen, daſs die durch einen mit Hilfe der elementaren Rechnungsoperationen zwischen Constanten und veränderlichen Gröſsen ausdrückbaren Zusammenhang definirten Gröſsen unter den Begriff der analytischen Function fallen. Diese in dem 4. Capitel behandelte Aufgabe fand natürlicher Weise keine vollständige Erledigung, aber an dem Beispiel einer in $y$ algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ sind, wird gezeigt, wie man die durch die Gleichung definirte Gröſse $y$ in der Umgebung jeder Stelle darstellen kann.

Zum Beweise dafür, daſs die algebraische Function monogen ist, vollführt man am besten den Übergang zu einem algebraischen Gebilde, welches in der Umgebung einer seiner Stellen durch ein einziges „Functionenelement“ darzustellen ist. Dieser Übergang wird nur principiell entwickelt, da man bei demselben die Untersuchung der rationalen Functionen $R(x, y)$ nöthig hat, deren Behandlung über den gesteckten Rahmen fallen würde. Ebenso wird auch der Begriff des

Ranges oder Geschlechtes einer algebraischen Gleichung nur theoretisch eingeführt. Ich konnte das umsomehr thun, da ich wohl algebraische Gleichungen zwischen eindeutigen transcendenten Functionen abgeleitet und dabei bemerkt habe, dafs algebraische Gleichungen verschiedenen Ranges durch eindeutige Functionen einer Variabeln zu lösen sind, aber die umgekehrte Frage nach denjenigen Functionen, welche eine vorgegebene algebraische Gleichung lösen, keine Behandlung finden konnte.

In dem ersten Abschnitt des vierten Capitels, der gröfstentheils den Weierstrass'schen Vorlesungen entnommen ist, wird ferner die Darstellung von $n$ durch $n$ algebraische Gleichungen mit $m$ unabhängigen Variabeln definirten Gröfsen behandelt und der Begriff eines analytischen Gebildes $m^{\text{ter}}$ Stufe in dem Gebiete von $(n+m)$ Gröfsen entwickelt, doch bleibt die Frage nach der Monogenität des irreductiblen algebraischen Gebildes höherer Stufe noch unberücksichtigt.

In einem zweiten Abschnitte desselben Capitels ist dann gezeigt, dafs auch die durch ein System algebraischer totaler oder partieller Differentialgleichungen definirten Gröfsen wiederum nur analytische Functionen sind, wobei die Untersuchungen von Briot und Bouquet und der Frau von Kowalevski*) die Richtschnur bildeten.

Ist auf solche Weise der Umfang des Begriffes der analytischen Function erfafst, so wird von einer mit einer unabhängigen Variabeln veränderlichen Gröfse, die besondere analytisch ausdrückbare Eigenschaften geniefst, von vornherein festgesetzt, dafs sie eine analytische Function sein soll. Unter dieser Festsetzung werden die gewissen einfachen Functionalgleichungen genügenden transcendenten Functionen abgeleitet und zwar die Exponentialfunction, der Logarithmus und die allgemeine Potenz, wobei sich Gelegenheit ergab, die trigonometrischen Functionen und deren Umkehrungsfunctionen zu berücksichtigen.

In dem weiteren Capitel ist das Problem der Ermittlung der arithmetischen Abhängigkeit des Werthes einer eindeutigen Function einer Variabeln von dem Werthe der letzteren auseinandergesetzt, wenn für die Function ein Stetigkeitsbereich und das Verhalten der Function an dessen isolirten Grenzstellen vorgegeben ist. Dabei habe ich die Darstellung der ganzen Function durch ein Product von Primfunctionen vorangestellt und dann unter Anwendung des nach Scheeffer's Vorgang bewiesenen Laurent'schen Satzes das Mittag-Leffler'sche Theorem behandelt. Als Anwendungen werden die trigonometrischen Functionen in verschiedenen Formen dargestellt und die Weierstrass'sche ganze transcendente Function $\sigma(x)$ eingeführt. Dann wählte ich von den Untersuchungen des Herrn Mittag-Leffler noch diejenigen aus, welche das Eindringen in die Frage, ob sich „der Begriff

*) Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 80.

einer monogenen Function einer complexen Veränderlichen mit dem einer durch arithmetische Gröſsenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit vollständig deckt" oder nicht, ermöglichen.

Das nächste Capitel enthält eine übersichtliche Darstellung der groſsartigen Theorie der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen von Weierstrass, die durch die Arbeiten von W. Biermann, Simon und Müller, Kiepert und neuerdings durch die von Herrn Schwarz veröffentlichten „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen" so ziemlich Gemeingut der Mathematiker geworden ist. Ich entwickelte die Grundzüge dieser Theorie, um dem Leser die Fruchtbarkeit der vorangegangenen Lehren klar zu machen und ihm andrerseits zu zeigen, was für einen Ausblick diese Theorie gewährt, wenn man Functionen mit linearen Substitutionen in sich betrachten will.

Endlich in dem letzten Capitel werden die von Weierstrass aufgestellten Sätze und Definitionen über die Functionen mehrerer Variabeln vorgetragen, und von den eindeutigen Functionen, die sich überall durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellen lassen, wird gezeigt, daſs sie rationale Functionen ihrer Argumente sind. Der letzte Paragraph beschäftigt sich mit dem irreductiblen algebraischen Gebilde $m^{\text{ter}}$ Stufe im Gebiete von $(m+1)$ Gröſsen.

Prag, im Mai 1886.

Der Verfasser.

# Inhaltsverzeichnis.

## Erstes Capitel.

### Die Elemente der Arithmetik.



## Zweites Capitel.

### I. Abschnitt.

### Veränderliche Gröfsen, Gröfsenmengen.



### II. Abschnitt.

### Rationale ganze und gebrochene Functionen einer und mehrerer Variabeln.

Seite

## Fünftes Capitel.

### Ableitung der elementaren transcendenten Functionen einer Variabeln.



## Sechstes Capitel.

### Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen.



## Siebentes Capitel.

### I. Abschnitt.

### Doppeltperiodische Functionen.



### II. Abschnitt.

### Einleitung in die Theorie der Functionen mit linearen Substitutionen in sich.

Seite

## Achtes Capitel.

### Analytische Functionen mehrerer Variabeln.

# Erstes Capitel.

## Die Elemente der Arithmetik.

### § 1. Begriff der ganzen Zahl. Die directen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

Indem wir uns der Wiederholung ein und derselben geistigen Thätigkeit an Dingen der sinnlichen Wahrnehmung bewufst werden, gelangen wir zu dem Begriff der *Menge*. Besteht ein Gegenstand aus Bestandtheilen oder Elementen von gemeinsamen Merkmalen, auf dafs bei der Beschreibung des Gegenstandes ein Element für ein anderes zu setzen ist, und abstrahiren wir von den gleichen Merkmalen der Bestandtheile, *so besitzen wir die Vorstellung der Vielheit oder Menge gleichartiger Elemente durch die Zahl.*

*Der Begriff der Zahl* wird durch die Zusammensetzung von Gegenständen aus gleichartigen Bestandtheilen gegeben und *ist* geradezu *als die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Bestandtheile zu definiren.**)

Indem man jedes der gleichartigen Elemente durch den Ausdruck Eins bezeichnet, besteht *das Zählen der Elemente oder Einheiten* der Menge in der Fixirung von Eins und Eins — und Eins usw. durch neue Ausdrücke zwei, drei usw. Die Zahl ist die Vorstellung der durch diese Ausdrücke bezeichneten Gruppen von Elementen.

Die wiederholte Setzung und Vereinigung der zu Grunde gelegten gleichartigen Elemente liefert die *Zahlenreihe*, und in dieser ist jede Zahl aus der nächst vorhergehenden durch Hinzufügung von Eins gebildet.

*Zwei* aus einem unbestimmt gelassenen Grundelemente $e$ oder der abstracten Einheit 1 zusammengesetzte *Zahlen $a$ und $b$ sind gleich* ($a = b$), wenn zu jedem Element der einen Zahl ein Element der andern gehört, und *ungleich*, wenn bei der Gegenüberstellung der Elementenreihen in der einen Elemente vorkommen, denen in der andern keine entsprechen. Die Zahl, welche mehr Elemente enthält,

*) Weierstrafs (siehe die Elemente der Arithmetik von Kossak).

heifst die *gröfsere*, die andere die *kleinere*. Dieses gegenseitige Verhältnis bezeichnet man durch $a > b$, $b < a$, wenn $a$ die gröfsere Zahl ist. Mit $a = b$ gilt $b = a$, mit $a = b$ und $b = c$ wird $a = c$, und endlich folgt aus

$$a > b \text{ und } b > c, \quad a > c.$$

Will man die Vorstellung von der Zusammensetzung eines aus verschiedenartigen Elementen bestehenden Gegenstandes gewinnen, so mufs man angeben, welche Arten von Elementen und wie viele Elemente der angegebenen Art vorkommen. Die zusammengesetzte Vorstellung der einzelnen Gruppen gleichartiger Elemente ist die *„zusammengesetzte Zahl oder Zahlengröfse“*. Man sagt „Zahlengröfse“ darum, weil die neue Zahl anders ausfällt, wenn man Elemente hinzufügt oder wegnimmt.

Zwei complexe Zahlen sind wieder *gleich*, wenn sie dieselben Elemente in gleicher Anzahl enthalten.

Wir betrachten vor allem die aus gleichen Elementen gebildeten Zahlen, welche *ganze Zahlen* genannt werden, und nehmen einfache Verknüpfungen mit ihnen vor, zu denen ursprünglich erfahrungsgemäfs festgestellte Eigenschaften von Dingen der Sinnenwelt die Veranlassung gegeben haben werden.

*Wir bilden eine Zahl, die alle Elemente zweier aus demselben Grundelement zusammengesetzten Zahlen $a$ und $b$ enthält.**)

Diese stets ausführbare Operation heifst *Addition* und besteht in der Vereinigung sämmtlicher Elemente beider Zahlen zu einer. Bezeichnet man die gewonnene Zahl mit $a + b$, so ist offenbar

$$a + b = b + a$$

und ebenso

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + a + c \\ &= b + c + a = c + a + b = c + b + a \end{aligned}$$

d. h. das Resultat der Vereinigung oder *„die Summe“* ist unabhängig von der Folge, in welcher die Summanden $a$, $b$, $c$ verbunden werden. Neben diesem *„commutativen“* Verknüpfungsgesetz besteht das in der Gleichung

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

ausgesprochene, welches besagt, dafs die Summe auch von der Vereinigung der Summanden in Theilsummen unabhängig ist. Dieses Gesetz heifst das *associative*.

In der Summe kann man ferner jeden Summanden durch eine diesem gleiche Zahl ersetzen.

---

*) Soll das Grundelement $e$, aus dem eine Zahl im Gegensatz zu der aus der Einheit gebildeten Zahl $a$ zusammengesetzt ist, besonders kenntlich gemacht sein, so schreiben wir statt $a$ $ae$.

Setzt man an Stelle jedes der Elemente einer Zahl $b$ die Zahl $a$, so entsteht die Summe

$$a + a + \cdots a \ (b \,\text{mal}),$$

die man kurz mit $a.b$ oder kurz $ab$ bezeichnet. Die Operation, durch welche $ab$ (sprich $a$ mal $b$) gebildet ist, nennt man *Multiplication*; $ab$ heifst das *Product der Factoren* $a$ und $b$, $a$ der *Multiplicandus*, $b$ der *Multiplicator*.

Wir bemerken, dafs das Product aus $a$ ebenso zusammengesetzt ist, wie $b$ aus der Einheit oder dem Grundelement, so dafs man sagen kann:

*Eine Zahl mit einer andern multipliciren heifst, eine dritte Zahl so aus dem Multiplicandus bilden, wie der Multiplicator aus der Einheit gebildet ist.*

Indem die Multiplication hier aus der wiederholten Addition hervorgeht, ist sie nicht als selbständige Rechnungsart anzusehen, und wir werden sie erst später als eine von der Addition verschiedene Verknüpfungsweise betrachten müssen.

Man kann in

$$a + a + \cdots + a \ (b \,\text{mal})$$

aus jeder Gruppe von $a$ Elementen eines herausnehmen und deren Vereinigung gibt $b$. Dieser Vorgang ist $a$ mal möglich; die Vereinigung gibt

$$b + b + \cdots + b \ (a \,\text{mal}) = ba,$$

und es ist

$$ab = ba. \tag{1}$$

Bilden wir die Summe der folgenden $b$ Horizontalreihen, deren jede die Zahl $c$ $a$ mal enthält,

$$\begin{array}{c} c,\ c \ldots c \\ c,\ c \ldots c \\ \ldots\ldots\ldots \\ c,\ c \ldots c \end{array}$$

und andererseits die Summe der $a$ Verticalreihen, deren jede die Zahl $c$ $b$ mal enthält, so folgt das Multiplicationsgesetz:

$$(ca) \,.\, b = (cb) \,.\, a,$$

und weil die Zahl $c$ $ab$ mal als Summand vorkommt, ist ferner

$$(ca) \,.\, b = (cb)\, a = c\,(ab),^{*)} \tag{2}$$

d. h. das Resultat der Multiplication ist unabhängig von der Folge der Factoren und unabhängig von der Zusammensetzung der Factoren in Theilproducte.

---

*) Vergl. Dirichlet's Zahlentheorie.

Addirt man $c$ Gruppen $(a+b)$, so folgt das dritte „*distributive*“ Multiplicationsgesetz

$$(a+b)\,c = ac + bc, \tag{3}$$

indem

$$\begin{aligned}(a+b)\,c &= (a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)\ (c\,\text{mal})\\ &= (a+a+\cdots+a\ [c\,\text{mal}])+(b+b+\cdots+b\ [c\,\text{mal}])\end{aligned}$$

ist.

Als Folge dieser Gesetze geht für das Product zweier Summen

$$a = a_1 + a_2 + \cdots a_m\,, \qquad b = b_1 + b_2 + \cdots b_n$$

$$\begin{aligned} ab = \quad & a_1 b_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_m b_1 \\ + \, & a_1 b_2 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_2 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \, & a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_m b_n \end{aligned}$$

hervor.

Das Product von $n$ einander gleichen Zahlen $a$ nennt man die $n^{te}$ *Potenz von* $a$ und bezeichnet

$$a\,.\,a\,\ldots\,.\,a\ (n\,\text{mal})\ \text{mit}\ a^n.$$

Die Zahl $n$ heifst der Exponent der Potenz und $a$ deren Basis.

Aus der Definition folgen unmittelbar die Eigenschaften

$$a^m\,.\,a^n = a^{m+n}, \quad a^m b^m = (ab)^m, \quad a^{mn} = (a^m)^n.$$

## § 2. Erklärung des Theilers und des Vielfachen einer Zahl. Gemeinsamer Theiler, gemeinsames Vielfache zweier Zahlen. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

Ist eine Zahl $c$ das Product aus der Zahl $a$ und einer zweiten Zahl $n$, so heifst $c$ ein *Vielfaches* von $a$ und $a$ ein *Theiler* von $c$.

Aus dieser Definition gehen die Sätze hervor:

1) Ist $c$ ein Vielfaches von $a$, $a$ ein Vielfaches von $b$, so ist auch $c$ ein Multiplum von $b$.
2) Ist in einer Reihe von Zahlen jede ein Vielfaches der nächstfolgenden, so ist jede frühere ein Vielfaches jeder späteren.
3) Ist sowohl $a$ als auch $b$ ein Vielfaches von $c$, so ist auch die Summe $a+b$ ein Vielfaches von $c$.

Man kann nun die Frage nach den *gemeinsamen Theilern* zweier Zahlen $a$ und $b$, von denen etwa $a$ die gröfsere sei, aufwerfen und speciell den *gröfsten gemeinsamen Theiler* verlangen.

Man zerlege $a$ in $b+b+\cdots b+c$, wo $c<b$ ist, $b$ ebenso in $c+c+\cdots c+d$, wo $d<c$ ist usw., so entsteht eine Folge von Gleichungen der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
a &= n_1 b + c, && (c < b) \\
b &= n_2 c + d, && (d < c) \\
&\ldots && \ldots \\
f &= n_{m-1} g + h && (h < g) \\
g &= n_m h,
\end{aligned}
$$

wo $n_1, n_2 \ldots n_m$ ganze Zahlen bedeuten.

Man wird, wie hier angezeigt ist, bei dem beschriebenen Fortgang endlich eine Zahl $f$ in ein Vielfaches einer Zahl $g$ und einen „*Rest*“ $h$ zu zerlegen haben, der selbst Theiler von $g$ ist. Der Procefs mufs einen Abschlufs haben, da es nur eine beschränkte Anzahl von Zahlen gibt, die kleiner sind als $b$. Die Zahl $h$ ist aber (nach dem Satze 3) auch Theiler von $f$ und allen voranstehenden Zahlen, endlich auch von $b$ und $a$.

Den Satz 3) können wir folgendermafsen umkehren: Eine durch $m$ theilbare Zahl $c$ läfst sich nur so in eine Summe zweier Summanden, deren einer durch $m$ theilbar ist, zerlegen, dafs auch der zweite diesen Theiler besitzt. Dann aber ergibt die Betrachtung unserer Gleichungen, dafs jeder gemeinsame Theiler von $a$ und $b$ auch ein Vielfaches von $h$ ist, und *darum ist $h$ der gröfste gemeinsame Theiler von $a$ und $b$.*

Ist in der Folge von Gleichungen schliefslich $h$ gleich Eins, so haben $a$ und $b$ nur den selbstverständlichen gemeinsamen Theiler Eins. Indem man von diesem absieht, nennt man solche Zahlen: *Zahlen ohne gemeinsamen Theiler oder relative Primzahlen.*

Von diesen Zahlen gilt zunächst der Satz:

> „Sind $a$ und $b$ relative Primzahlen, und ist $k$ eine beliebige dritte Zahl, so ist jeder gemeinsame Theiler von $ak$ und $b$ auch Theiler von $k$ und $b$.“

In der That, multiplicirt man in den früheren Gleichungen, wo wir $h = 1$ setzen, die rechten und linken Seiten mit $k$, so erhält man die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
ak &= n_1 bk + ck \\
bk &= n_2 ck + dk \\
&\ldots \\
fk &= n_{m-1} gk + k \\
gk &= n_m k,
\end{aligned}
$$

weil ja mit $A = B$ auch $Ak = Bk$ ist, und an diesen Relationen ist die Behauptung leicht bestätigt. Jeder Theiler von $ak$ und $b$ ist auch Theiler von $n_1 bk$ und $ck$, dann von $n_2 ck$ und $dk$ usw., endlich von $fk$, $gk$ und $k$.

Mit diesem Satze sind die folgenden bewiesen:

1) Sind die Factoren eines Productes $ak$ relative Primzahlen gegenüber $b$, so sind $ak$ und $b$ relativ prim.

2) Sind $a$ und $b$ relative Primzahlen, hat aber $ak$ den Theiler $b$, so ist $k$ durch $b$ theilbar.

3) Ist jede Zahl einer Reihe von Zahlen relativ prim gegen jede Zahl einer zweiten Reihe, so ist auch das Product aller Zahlen der ersten Reihe relativ prim gegen das Product aller Zahlen der zweiten Reihe, und speciell sind die Potenzen relativ primer Zahlen wieder Zahlen ohne gemeinsamen Theiler.

Wir können auch die *gemeinsamen Vielfachen* zweier Zahlen, d. h. die Zahlen, welche durch $a$ und $b$ theilbar sind und speciell das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* angeben, dessen Vielfache die übrigen Multipla von $a$ und $b$ sind. Ist

$$a = ma', \quad b = mb'$$

und sind $a'$ und $b'$ relativ prim, so hat jedes Vielfache von $a$ und $b$ die Gestalt

$$n \, . \, ma'b'$$

und das kleinste ist $ma'b'$.

Nennt man eine Zahl $p$ *Primzahl*, wenn sie nur die Einheit und sich selbst zum Theiler hat, und bringt man $p$ mit einer andern Zahl $a$ in Vergleich, so ist $p$ entweder Theiler von $a$, oder $p$ und $a$ sind relativ prim. Die Zahl $p$ mufs ebenso Theiler eines Factors des Productes $a \, . \, b \ldots$ sein, wenn das Product und die Primzahl nicht relativ prim sind. Auf diesen Eigenschaften der Primzahl beruht der folgende Satz:

*Jede Zahl $a$, die nicht selbst eine Primzahl ist, läfst sich immer nur auf eine Weise in ein Product von Primzahlen zerlegen.*

Die Zerlegung einer Zahl $a$ in das Product von Theilern $a_1, a_2 \ldots$ mufs nämlich zu einem Abschlufs führen, da diese Theiler immer kleiner werden und nur eine beschränkte Anzahl von Zahlen existirt, die kleiner sind als $a$; der letzte kleinste Theiler $a_n$ ist eine Primzahl $p_1$, und es wird $a = p_1 k_1$. Durch denselben Vorgang findet man für $k_1$ eine Zerlegung $k_1 = p_2 k_2$ usw., endlich ist

$$a = p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots p_n .$$

Eine zweite Zerlegung in ein Product von Primzahlen

$$q_1 \, q_2 \, q_3 \ldots q_m$$

kann es nicht geben, denn anderntalls müfste das Product $p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots p_n$ und in diesem ein Factor z. B. $p_1$ durch $q_1$ theilbar sein, doch weil $p_1$ eine Primzahl ist, folgt $p_1 = q_1$, und ebenso ist etwa $p_2 = q_2$ usw. Es folgt die vollständige Übereinstimmung und der Satz ist bewiesen.

Mit Hilfe der Zerlegung der aus Primzahlen *zusammengesetzten* Zahlen in ihre Primfactoren gewinnt man eine neue Lösung der Auf-

gabe: den gröfsten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen. Sind diese Zahlen

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}, \quad b = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \ldots q_k^{\nu_k},$$

so ist der gröfste gemeinsame Theiler das Product der in $a$ und $b$ zugleich vorkommenden Primzahlen, jede in der niedrigen Potenz genommen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Product aller in $a$ und $b$ vorkommenden Primzahlen, jede in der höher auftretenden Potenz genommen.

All die Sätze von Theilern und Vielfachen ganzer Zahlen werden später in der Theorie der ganzen Functionen in gleicher Form wieder auftreten.

## § 3. Die indirecten Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

Wir wenden uns zu den der Addition und Multiplication *inversen Rechnungsarten.*

Eine Zahl $b$ von einer Zahl $a$ *subtrahiren* heifst: *Diejenige Zahl finden, welche zu $b$ addirt $a$ ergibt.* Die Zahl $a$ heifst der *Minuend, $b$* der *Subtrahend* und die gesuchte Zahl, wenn eine solche existirt, die *Differenz* von $a$ und $b$. Man bezeichnet dieselbe mit $a - b$.

Der Definition zufolge ist

$$(a - b) + b = a.$$

Die neue Operation, *die Subtraction*, ist eindeutig, denn aus der Annahme, dafs sowohl

$$\alpha + b = a, \text{ als auch } \beta + b = a$$

ist, folgt

$$\alpha + b = \beta + b,$$

und die Vergleichung der $\alpha + b$ und $\beta + b$ zugehörigen Elementenreihen führt auf $\alpha = \beta$.

Die Subtraction ist aber nur ausführbar, wenn der Minuend gröfser ist als der Subtrahend.

Die Eigenschaften der Differenz folgen aus der Definition. Es ist

$$a + (b - c) + c = a + b,$$

d. h. $a + (b - c)$ ist diejenige Zahl, welche zu $c$ addirt $a + b$ ergibt, also wird

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Setzt man $c = b$, so ist

$$a + (b - b) = a + b - b.$$

Da aber

$$\big((a - b) + b\big) + b = a + b,$$

$$(a - b) + b = a + b - b$$

ist, folgt

$$a + (b - b) = (a - b) + b = a.$$

Die Gröfse $(b - b)$ zu $a$ hinzugefügt läfst $a$ ungeändert. Wir bezeichnen sie mit dem Zeichen 0 und dem Ausdruck *Null*. Besagt $a$, dafs das Grundelement $a$ mal vorkommt, so sagt das Zeichen 0, dafs das Element nicht vorkommt.

Man findet auch leicht die in den folgenden Gleichungen niedergelegten Eigenschaften der Differenz bestätigt:

$$a - (b - c) = a + c - b$$
$$(a + c) - (b + c) = a - b$$
$$(a - c) - (b - c) = a - b.$$

Die inverse Operation der Multiplication ist die *Division*.

*Eine Zahl $a$ durch eine Zahl $b$ dividiren heifst diejenige Zahl $c$ bestimmen, welche mit $b$ multiplicirt $a$ gibt.*

Man nennt $c$ den *Quotienten* aus dem *Dividend* $a$ und dem *Divisor* $b$, und bezeichnet

$$c = \frac{a}{b} = a : b.$$

Nach der Definition ist

$$\frac{a}{b} b = a.$$

Die neue Operation ist nur lösbar, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist, aber dann in eindeutiger Weise, denn aus der Annahme

$$a = \alpha b = \beta b$$

folgt

$$\alpha = \beta.$$

Für den Quotienten gelten zufolge der Definition die Eigenschaften

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b} m = \frac{am}{b} = \frac{m}{b} a,$$

und ferner bleibt die aus einem Grundelement $e$ gebildete Zahl $a$ bei der Division durch $e$ ungeändert.

Der Quotient heifst auch *Bruch*, der Dividend und Divisor auch *Zähler* und *Nenner*. Ist in dem Bruche $\frac{a}{b}$ $a > b$, so nennt man den Bruch unecht, andernfalls echt.

## § 4. Einführung der gebrochenen und negativen Zahlengröfsen.

Soll die Division unabhängig davon, ob der Dividend $a$ ein Vielfaches des Divisors $b$ ist oder nicht, ausführbar sein, so mufs man ein neues mit Hilfe der ganzen Zahlen zu definirendes Ding, eine neue Gröfse einführen.

Wir nehmen zu jedem einzelnen Elemente, aus denen die ganzen Zahlen gebildet sind, neue hinzu, so daſs zwei, drei neue Elemente usw. jenes eine vertreten. Bezeichnet man ein Element $\varepsilon_n$, deren $n$ das Grundelement $e$ oder sagen wir hier kurzweg die Einheit $e = 1$ ersetzen, mit $\frac{1}{n}$, so ist

$$n\,\varepsilon_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\,(n\,\text{mal}) = 1.$$

Die Gröſse, deren $n$ die Zahl $a$ vertreten, sei mit $\frac{a}{n} = a\,\varepsilon_n$ bezeichnet, dann ist

$$\frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \cdots + \frac{a}{n}\,(n\,\text{mal}) = a.$$

Es entsteht zunächst die Frage, wie sich die neu definirten Gröſsen, die aus der Einheit und einer angebbaren (endlichen) Anzahl von „*Bruchtheilen*“ $\varepsilon_n$ der Einheit zusammengesetzt sind, auf daſs sie die allgemeine Form

$$a_0 + a_1\,\varepsilon_{n_1} + a_2\,\varepsilon_{n_2} + \cdots + a_m\,\varepsilon_{n_m}$$

annehmen, die für die ganzen Zahlen aufgestellten Rechnungsoperationen gestalten. Vor der Beantwortung dieser Frage setzen wir aber fest, daſs die neuen Gröſsen den für die ganzen Zahlen giltigen Verknüpfungsregeln Folge leisten sollen. Diese Festsetzung ist gewiſs zulässig, wenn die Anwendung der genannten Regeln auf die neuen Gröſsen keinen Widerspruch zu Tage fördert.

Beachten wir, daſs der Definition gemäſs

$$m\,n\,\varepsilon_{mn} = 1$$

ist, oder die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{mn} + \cdots + \varepsilon_{mn}\,(m\,\text{mal}) \\ + \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{mn} + \cdots + \varepsilon_{mn}\,(m\,\text{mal}) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \qquad\qquad n\,(m\,\text{mal}) \end{array}\right\} = 1$$

besteht, so gibt die Anwendung der Additionsgesetze unmittelbar die Gleichungen:

$$(m\,\varepsilon_{mn})\,n = 1 \quad \text{oder} \quad m\,\varepsilon_{mn} = \varepsilon_n\,,$$
$$(n\,\varepsilon_{mn})\,m = 1 \quad \text{oder} \quad n\,\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m\,.$$

Darnach kann man jede *gebrochene Zahlengröſse*

$$a = a_0 + a_1\,\varepsilon_{n_1} + \cdots + a_m\,\varepsilon_{n_m}$$

derart transformiren, daſs sie nur Elemente $\varepsilon_n$ einer Art enthält. In der That ist $n$ ein gemeinsames Vielfache der Zahlen $n_1$, $n_2 \ldots n_m$, so zwar daſs

$$n_1\,\nu_1 = n_2\,\nu_2 = \ldots = n_m\,\nu_m = n$$

ist, so wird

$$\varepsilon_{n_\mu} = \nu_\mu\,\varepsilon_{n_\mu\,\nu_\mu} = \nu_\mu\,\varepsilon_n \;(\mu = 1, 2 \ldots m),$$

und wenn man für $a_0$ $a_0 n\varepsilon_n$ schreibt, folgt die Darstellung

$$a = (a_0 n + a_1 \nu_1 + \cdots + a_m \nu_m)\,\varepsilon_n,$$

wobei das dritte Multiplicationsgesetz ganzer Zahlen verwendet wurde.

*Zwei Zahlengröfsen der neuen Art sind gleich*, wenn sie so umgeformt werden können, dafs beide dieselben Elemente und jedes in gleicher Anzahl enthalten.

Will man also zwei Zahlengröfsen $a$ und $b$ vergleichen, so drücke man beide durch dasselbe Element $\varepsilon_n$ aus und vergleiche die Anzahl dieser Elemente. Da man jedoch eine unbeschränkte Anzahl gemeinsamer Elemente $\varepsilon_n$ wird angeben können, in denen sich $a$ und $b$ darstellen lassen, so mufs man nachsehen, ob die einmal als gleich befundenen Zahlengröfsen bei anderer Vergleichungsart gleich bleiben.

Angenommen $a$ und $b$ seien in der Form $a_1\varepsilon_m$, $b_1\varepsilon_n$ gegeben, $m$ und $n$ hätten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $r$, und $a$ und $b$ erhielten in den Elementen $\varepsilon_r$ die Gestalt $a_2\varepsilon_r$ und $b_2\varepsilon_r$, so sind sie gleich, wenn $a_2 = b_2$ ist. Da jede weitere Darstellung in denselben Elementen die Form

$$a_2 k\,\varepsilon_{rk}, \quad b_2 k\,\varepsilon_{rk}$$

annimmt, so sind die ursprünglichen Zahlengröfsen auch gleich, wenn $a_2 k = b_2 k$ ist. Weil dann $a_2 = b_2$ sein mufs, schliefsen wir, dafs die Art der Vergleichung keinen Unterschied im Resultate hervorbringt.

Wir ersehen aber auch, dafs die neuen Zahlengröfsen die folgenden nothwendigen Forderungen erfüllen:

mit $a = b$ ist auch $b = a$,
mit $a = b$ und $b = c$ wird $a = c$ und
mit $a > b$, $b > c$ wird $a > c$.

Die *Addition der neuen Zahlengröfsen* besteht jetzt darin, dafs man sämmtliche Elemente der Summanden zu einer Zahlengröfse vereinigt. In der Summe $(a + b)$, die zufolge des Gleichheitsbegriffes von der Anordnung der Summanden unabhängig ist, kann man $a$ und $b$ durch jede gleichwerthige Zahlengröfse $a'$ und $b'$ ersetzen, ohne den Werth der Summe zu ändern, und darum kann man die Summanden in demselben Elemente $\varepsilon_n$ darstellen und die Anzahl dieser vereinigen.

Das *Product zweier Zahlengröfsen* $a$ und $b$ soll den Multiplicationsgesetzen ganzer Zahlen genügen, daher mufs das Product

$$(\varepsilon_m + \varepsilon_m + \cdots m\,\mathrm{mal}) \cdot (\varepsilon_n + \varepsilon_n + \cdots n\,\mathrm{mal}) = mn\,(\varepsilon_m \varepsilon_n)$$

sein, und weil

$$m\varepsilon_m = 1, \quad n\varepsilon_n = 1, \quad mn\,\varepsilon_{mn} = 1$$

ist, folgt

$$mn\,(\varepsilon_m \varepsilon_n) = (m\varepsilon_m) \cdot (n\varepsilon_n) = mn\,\varepsilon_{mn}$$

und

$$\varepsilon_m \varepsilon_n = \varepsilon_{mn} = \frac{1}{mn}.$$

Damit resultirt das Multiplicationsgesetz

$$ab = a_1 \varepsilon_m \cdot b_1 \varepsilon_n = a_1 b_1 \varepsilon_{mn},$$

das wir so aussprechen:

*Das Product von a und b ist eine Zahlengröfse, die aus der Gröfse a und deren Bruchtheilen, so gebildet ist, wie b aus der Einheit und deren Bruchtheilen.*

Man erkennt, dafs die Multiplication hier bereits als selbständige Rechnungsart auftritt.

Jetzt erst kommen wir zu dem Nachweise, dafs der Quotient ganzer Zahlen $\frac{a}{b}$, wo $a$ kein Vielfaches von $b$ ist, stets durch gebrochene Zahlengröfsen darzustellen ist. In der That, ist $a = nb + r$, so ist $n + r\varepsilon_b = n + \frac{r}{b}$ diejenige Zahlengröfse, welche mit $b$ multiplicirt $a$ gibt.

Der Quotient zweier gebrochener Zahlengröfsen $a_1 \varepsilon_m$ und $b_1 \varepsilon_n$ ist wieder eine Zahlengröfse derselben Art und zwar gleich $n a_1 \varepsilon_{m b_1}$, denn es gilt

$$(n a_1 \varepsilon_{m b_1}) \, b_1 \varepsilon_n = a_1 \varepsilon_m \cdot b_1 \varepsilon_{b_1} \cdot n \varepsilon_n = a.$$

Die Subtraction der aus dem Grundelemente $e$ oder der Einheit und deren Bruchtheilen $\varepsilon_n$ gebildeten Zahlengröfsen ist so wie früher zu definiren, doch ist sie nur ausführbar, wenn der Minuend gröfser ist als der Subtrahend.

Soll die Subtraction ganzer Zahlen oder gebrochener Zahlengröfsen stets möglich sein, d. h. *soll auch in dem Falle, wo der Minuend a kleiner ist als der Subtrahend b, eine Zahlengröfse a — b existiren, die zu b addirt a gibt*, so müssen wir wiederum neue Zahlengröfsen einführen, an die wir dieselben allgemeinen Forderungen stellen wie an die oben aufgenommenen Gröfsen $a\varepsilon_n$.

Wir definiren neben dem Grundelemente $e$ als *entgegengesetztes* $e'$ dasjenige, welches die Gleichung

$$a + e + e' = a$$

erfüllt, worin $a$ nur aus $e$ zusammengesetzt ist. Das Grundelement $e$ heifse das *positive*, sein entgegengesetztes $e'$ das *negative*. Die Summe von $e$ und $e'$ zu $a$ addirt gibt wieder $a$, man schreibt daher auch

$$e + e' = 0.$$

Das entgegengesetzte Element des positiven Bruchtheiles $\varepsilon_n$ von $e$ heifse der negative Bruchtheil $\varepsilon_n'$, und wiederum soll

$$a + \varepsilon_n + \varepsilon_n' = a \quad \text{oder} \quad \varepsilon_n + \varepsilon_n' = 0$$

sein. Da

$$a = a + \big((\varepsilon_n + \varepsilon_n') + (\varepsilon_n + \varepsilon_n') + \cdots + (\varepsilon_n + \varepsilon_n') \; n\,\text{mal}\big) =$$
$$= a + n\varepsilon_n + n\varepsilon_n' = a + e + n\varepsilon_n'$$

ist, wird
$$n \varepsilon_n' = e',$$
d. h. $\varepsilon_n'$ ist der $n^{\text{te}}$ Theil von $e'$ und nach der früheren Bezeichnungsweise gleich $\frac{e'}{n}$.

Es gilt nun auch die Beziehung
$$n \varepsilon_{mn}' = \varepsilon_m',$$
und darum kann man jede aus den beiden Elementen $e$ und $e'$ und deren Bruchtheilen zusammengesetzte Zahlengröfse $a$ auf die Form
$$a_1 \varepsilon_m + a_2 \varepsilon_m'$$
bringen, wo $a_1$ und $a_2$ nur aus $e$ zusammengesetzt sind. Ist hierin $a_1 > a_2$, etwa $a_1 = a_2 + \alpha$, so wird
$$a = (a_2 \varepsilon_m + a_2 \varepsilon_m') + \alpha \varepsilon_m = \alpha \varepsilon_m .$$
Ist $a_1 < a_2$ und zwar $a_2 = a_1 + \beta$, so folgt $a = \beta \varepsilon_m'$; wenn endlich $a_1 = a_2$ ist, so wird $a$ gleich Null.

Zwei Zahlengröfsen der neuen Art sind wieder *gleich*, wenn sie so umgeformt werden können, dafs sie die positiven und negativen Elemente $e$ und $e'$, $\varepsilon_n$ und $\varepsilon_n'$ in gleicher Anzahl enthalten.

Angenommen, dafs die Zahlengröfsen in der Form
$$a = a_1 + a_2 e' \quad \text{und} \quad b = b_1 + b_2 e'$$
gegeben seien, worin $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ nur aus den positiven Elementen $e$ und $\varepsilon_n$ gebildet sind, so kann man auch sagen, dieselben sind einander gleich, wenn
$$a_1 + b_2 = b_1 + a_2$$
ist. In der That, mit $a = b$ mufs auch
$$a_1 + a_2 e' + a_2 + b_2 = b_1 + b_2 e' + a_2 + b_2$$
und hierauf
$$a_1 + b_2 = b_1 + a_2 \quad \text{sein.}$$

Die genannte Bedingung ist also nothwendig, sie ist aber auch hinreichend, denn offenbar folgt umgekehrt aus derselben: $a = b$.

Zur Gleichheit von $a$ und $b$ mufs demnach die Summe der positiven Elemente aus $a$ und der entgegengesetzt genommenen negativen Elemente von $b$ gleich sein der Summe der positiven Elemente von $b$ und der entgegengesetzt genommenen negativen Elemente aus $a$.

*Die Addition der neuen Zahlengröfsen* besteht wieder in der Vereinigung derselben zu einer Gröfse. Zufolge des jetzt geltenden Gleichheitsbegriffes kann man die positiven und negativen Theile gesondert vereinigen und die hervorgehenden Summen zusammenziehen oder man vollzieht die Verbindung in beliebig anderer Folge.

Die *Multiplication* zweier aus entgegengesetzten Grundelementen $e$, $e'$ (oder den entgegengesetzten Einheiten $+1$, $-1$) und deren

Bruchtheilen $\frac{e}{m}$ und $\frac{e'}{n}$ gebildeten Zahlengröfsen ist, wie wir gleich sehen werden, mit Hilfe der Multiplicationsgesetze der aus $e$ zusammengesetzten ganzen Zahlen auszuführen, wenn man nur die Multiplication der Grundelemente, also die Producte

$$ee,\ ee',\ e'e,\ e'e'$$

auszuführen vermag.

Unter Festsetzung der Permanenz der früheren Verknüpfungsregeln setzen wir gleich $ee' = e'e$.

Um die genannte Behauptung zu beweisen, zeigen wir, dafs neben

$$\frac{e}{m} \cdot \frac{e}{n} = \frac{ee}{mn} \text{ auch } \frac{e}{m}\,\frac{e'}{n} = \frac{ee'}{mn} \text{ und } \frac{e'}{m}\,\frac{e'}{n} = \frac{e'e'}{mn}$$

ist. In der That schliefsen wir z. B. aus den Gleichungen

$$m\left(\frac{e}{m}\cdot\frac{e'}{n}\right) = \left(\frac{e}{m}\,\frac{e'}{n} + \frac{e}{m}\cdot\frac{e'}{n} + \cdots + \frac{e}{m}\cdot\frac{e'}{n}\,((m\,\text{mal})\right)$$

$$= \left(\frac{e}{m} + \frac{e}{m} + \cdots \frac{e}{m}\,(m\,\text{mal})\right)\cdot\frac{e'}{n} = e\,\frac{e'}{n}$$

und

$$nm\left(\frac{e}{m}\cdot\frac{e'}{n}\right) = e\left(\frac{e'}{n} + \frac{e'}{n} + \cdots + \frac{e'}{n}\,(n\,\text{mal})\right) = ee',$$

dafs

$$\frac{e}{m}\cdot\frac{e'}{n} = \frac{ee'}{mn} = \frac{ee'}{nm} = \frac{e}{n}\cdot\frac{e'}{m}$$

wird. Ebenso gilt

$$\frac{e'}{m}\cdot\frac{e'}{n} = \frac{e'e'}{mn} = \frac{e'e'}{nm} = \frac{e'}{n}\cdot\frac{e'}{m}.$$

Wir müssen daher zur Multiplication unserer Zahlengröfsen nur noch die Regeln für die Multiplication der Grundelemente kennen lernen.

Wegen $e + e' = 0$ ist

$$a = a + e + e' \quad \text{und} \quad ae = ae + e + e'.$$

Die Multiplication der ersten Gleichung mit $e$ führt auf

$$ae = ae + ee + e'e,$$

und wenn $ee = e$ festgesetzt wird, folgt

$$e'e = ee' = e'.\text{*)}$$

Weil ferner die Gleichungen

$$ae' = ae' + e + e', \quad ae' = ae' + ee' + e'e'$$

bestehen, wird

$$e'e' = e.$$

Sind nun $a$ und $b$ zwei aus $e$ und $e'$, $\varepsilon_n$ und $\varepsilon'_n$ zusammengesetzte Zahlengröfsen, so besteht die Multiplication von $a$ mit $b$ darin, dafs man eine dritte Zahlengröfse aus $a$ und der entgegengesetzten $ae'$ und

*) Es ist entweder $ee = e$ oder $e'e' = e'$; eine Gleichung mufs festgesetzt sein.

den Bruchtheilen beider so bildet, wie $b$ aus den Grundelementen $e$ und $e'$ und deren Bruchtheilen zusammengesetzt ist.

Die Subtraction positiver d. h. aus $e$ und den Bruchtheilen $\frac{e}{n}$ gebildeten Zahlengröfsen ist mit Hilfe der aus den entgegengesetzten Elementen $e'$ und $\varepsilon_n'$ gebildeten negativen Zahlengröfsen stets ausführbar, denn die Zahlengröfse, welche zu $b$ addirt $a$ gibt, ist offenbar $a + be'$.

Diese Gröfse war früher mit $a - b$ bezeichnet, daher schreiben wir

$$a - b = a + be'$$

und nunmehr für $be'$ einfach $-b$, für $e'$ $-e$ und nennen $e' = -1$ die *negative Einheit.*

Die der positiven Gröfse $b$ oder $be$ entgegengesetzte negative ist nun $-b = -be = be'$ und in dieser heifst $b$ der *absolute Betrag* von $-b$. — Will man anzeigen, dafs eine Gröfse $c$ nach gehöriger Transformation nur positive Elemente enthält, so setzt man derselben das Zeichen $+$ voraus. Ist $b$ ganzzahlig aus $-1$ zusammengesetzt, so heifst diese Gröfse eine negative ganze Zahl. Ihr absoluter Betrag $-b$ wird mit $|b|$ bezeichnet.

Die Subtraction negativer Gröfsen ist jetzt durch Addition der entgegengesetzten positiven Gröfsen zu ersetzen.

Die Multiplication einer Zahlengröfse $a$ mit Null gibt Null, denn es ist

$$a\big(m + (-m)\big) = am + a(-m) = a(m - m) = am - am = 0,$$

und umgekehrt folgt aus $ab = 0$, dafs ein Factor Null ist.

Die Division besteht wieder in der Ermittelung von $b$, wenn in $a = c$ $a$ und $c$ gegeben sind.

Die Rechnungsregeln folgen aus der Definition der Rechnungsarten.

Ein Product $ab = c$ ändert sich, sobald $b$ andere und andere Werthe erhält, aufser wenn $a = 0$ ist. Umgekehrt ist $b$ stets bestimmt, aufser in eben diesem Falle $a = 0$. Ist neben $a$ auch $c$ gleich Null, so kann man $b$ beliebig wählen und darum ist $\frac{0}{0}$ keine bestimmte Zahlengröfse. Ebenso wenig hat $\frac{c}{0}$ einen bestimmten Werth, denn wäre $\frac{c}{0}$ die bestimmte Gröfse, welche mit Null multiplicirt $c$ gibt, so müfste

$$\frac{c}{0} \cdot 0 = c = c\,\frac{0}{0}$$

sein oder die bestimmte Gröfse $c$ wäre unbestimmt. Dieser Widerspruch nöthigt uns, die Division durch Null als unzulässig zu erklären und auszuschliefsen. —

Es ist nun gezeigt, dafs die für die ganzen Zahlen aufgestellten Rechnungsarten mit den positiven und negativen ganzen und ge-

brochenen Zahlengröſsen, die unter dem Namen der *rationalen Zahlengröſsen* zusammengefaſst werden, mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null widerspruchslos durchzuführen sind. Wir konnten die Rechnungsregeln für die neuen Gröſsen ableiten und darum sind wir — wie gleich erklärt werden soll — berechtigt, dieselben fernerhin in die Rechnung aufzunehmen.

Wenn wir später irgendwo eine Aufgabe in den rationalen Zahlengröſsen nicht lösen können, wie die Subtraction ganzer Zahlen in eben diesen Gröſsen nicht durchführbar ist, sofern der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, oder die Division ganzer Zahlen nicht in ganzen Zahlen zu bewerkstelligen ist, wenn der Dividend kein Multiplum des Divisors ist, werden wir neue Gröſsen zu definiren und hierauf den Vergleich der neuen Gröſsen untereinander und mit den rationalen vorzunehmen haben. Dabei fordern wir, daſs sie denselben Verknüpfungsregeln folgen wie die ganzen Zahlen, und suchen ihre Rechnungsregeln, wie z. B. $ee' = e'$ eine war; oder besser wir fragen, ob und wie sind für die neuen Gröſsen $a, b, c \ldots$ die arithmetischen Grundoperationen (Addition, Multiplication, Subtraction und Division) zu definiren, damit $a + b$, $ab$, $a - b$, $\frac{a}{b}$ Gröſsen derselben Art bleiben wie $a$ und $b$ selbst, und daſs ferner die in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten:

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = (a + c) + b,$$
$$ab = ba, \quad (ab)c = (ac)b, \quad a(b + c) = ab + ac,$$
$$(a - b) + b = a, \quad \frac{a}{b} b = a.$$

Die Existenzberechtigung neuer Gröſsen in der Rechnung werden wir wie früher blos darin suchen, daſs sich von ihnen die Rechnungsoperationen in der nun bestimmten Weise widerspruchslos ausführen lassen.

Das bisherige und das weiterhin zu gewinnende Gröſsensystem für die Rechnung ist und wird auf einer — soweit wir hier sehen — allerdings bestimmten aber nur formalen Grundlage aufgebaut. Von vornherein besteht ja kein zwingender Grund, von neu definirten Gröſsen zu verlangen, daſs sie den Rechnungsgesetzen ganzer Zahlen gehorchen, aber diese (willkürliche) Forderung, die so lange erlaubt ist, als keine Widersprüche daraus erwachsen, hat eine unentbehrliche Harmonie in der Mathematik zur Folge. Es bedarf keiner Rechtfertigung, wenn wir gerade die Permanenz der formalen Gesetze zum Princip erheben; die Existenzberechtigung der neuen Gröſsen in der Rechnung ist aber zweifellos, wenn die genannten Forderungen auf Grund gewählter Definitionen zu erfüllen sind.

Andrerseits wird man aber auch die Definition eines neuen Be-

griffes nach dem Princip der Permanenz der formalen Gesetze wählen. Bei der Einführung eines neuen Begriffes in die Mathematik ist es oftmals gewissermafsen willkürlich, in welcher Weise man die auf frühere Begriffe angewandten Operationen auf die neuen überträgt. Ist etwa die Definition der Potenz einer rationalen Zahlengröfse $a$ durch wiederholte Multiplication gegeben:

$$a^n = a \,.\, a \ldots a \; (n \,\text{mal}),$$

so zwingt uns von vornherein nichts, dafs wir unter der ganzzahligen aber negativen Potenz etwas Bestimmtes verstehen. Unterwerfen wir aber die positive ganzzahlige Potenz den früheren Operationen und lassen wir die Rechnungsregel

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

auch dann gelten, wenn $m - n$ negativ oder Null ist, so folgt

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

als Definition der negativen Potenz und ebenso $a^0 = 1$.

## § 5. Besondere Darstellung der rationalen Zahlengröfsen.*)

Wir wollen eine bestimmte Darstellung der bisherigen positiven Zahlengröfsen und zuerst der aus dem Grundelemente $e = 1$ gebildeten positiven ganzen Zahlen besprechen.

Ist $\alpha$ eine bestimmte Zahl $> 2$ und $a$ eine beliebige Zahl $> \alpha$, so wird $a$ mit einer der ganzzahligen Potenzen

$$\alpha, \; \alpha^2, \; \alpha^3, \; \ldots \; \alpha^m, \; \alpha^{m+1}, \; \ldots$$

übereinstimmen ($a = \alpha^m$) oder zwischen zwei aufeinander folgenden liegen ($\alpha^m < a < \alpha^{m+1}$). In diesem Falle ist nothwendig

$$a = \alpha^m c \quad \text{oder} \quad a = \alpha^m c + r,$$

wo die ganzen Zahlen $c < \alpha$ und $r < \alpha^m$ sind.

Ist $r \geqq \alpha$, so mufs

$$r = c_1 \alpha^{m_1} \quad \text{oder} \quad r = c_1 \alpha^{m_1} + r_1$$

sein, wo neben

$$m_1 < m, \quad 1 \leqq c_1 < \alpha, \quad r_1 < \alpha^{m_1}$$

ist. Im Falle $r_1 \geqq \alpha$ setze man neuerdings

$$r_1 = c_2 \alpha^{m_2} \quad \text{oder} \quad r_2 = c_2 \alpha^{m_2} + r_2,$$

$$m_2 < m, \quad 1 \leqq c_1 < \alpha, \quad r_2 < \alpha^{m_2}$$

usw. So fortfahrend wird man zum mindesten nach $(m-1)$ maliger

*) Siehe Stolz: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.

Wiederholung zu einem Reste $r_{m-1} < \alpha$ gelangen und kann $a$ als Summe

$$c\alpha^m + c_1\alpha^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\alpha + r_{m-1} \tag{1}$$

darstellen, in der $c, c_1, \ldots c_{m-1}$ der Gröſsenreihe

$$0, 1, \ldots \alpha - 1$$

entnommen sind.

Diese Darstellung ist nur auf eine Art möglich; denn setzt man auch

$$a = d\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\alpha + p_{n-1},$$

so ist die Übereinstimmung der beiden Darstellungen leicht erwiesen.

Da sowohl

$$\alpha^m \leqq a < \alpha^{m+1} \quad \text{als auch} \quad \alpha^n \leqq a < \alpha^{n+1}$$

gilt, ist ja

$$\alpha^m < \alpha^{n+1}, \quad \alpha^n < \alpha^{m+1},$$

und diese Ungleichungen bestehen nur zusammen, wenn $n = m$ ist. Weil ferner

$$c\alpha^m \leqq a < (c+1)\,\alpha^m, \quad d\alpha^m \leqq a < (d+1)\,\alpha^m$$

ist, muſs

$$c < d + 1, \quad d < c + 1, \quad \text{also } d = c$$

sein. Durch dieselben Schlüsse folgt $d_1 = c_1$, $d_2 = c_2$, .... $p_{m-1} = r_{m-1}$, q. e. d.

Nehmen wir nun eine aus der Einheit und deren Bruchtheilen gebildete (positive) rationale Gröſse $\frac{a}{b}$ auf, so ist entweder

$$a = c_0 b \quad \text{oder} \quad a = c_0 b + r_0,$$

wo von den ganzen Zahlen $c_0$ und $r_0$ die letztere kleiner ist als $b$. Es wird also

$$\frac{a}{b} = c_0 \quad \text{oder} \quad c_0 < \frac{a}{b} < c_0 + 1.$$

Bildet man $\alpha r_0 = c_1 b$ oder $\alpha r_0 = c_1 b + r_1$, wo $c_1$ eine ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots \alpha - 1$ und $1 \leqq r_1 < b$ ist, so wird

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{c_1}{\alpha} \quad \text{oder} \quad c_0 + \frac{c_1}{\alpha} < c_0 < c_0 + \frac{c_1 + 1}{\alpha}.$$

Indem man die Divisionen

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{r_0}{b}, \quad \frac{\alpha r_0}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{\alpha r_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b}, \ldots$$

$$\frac{\alpha r_n}{b} = c_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{b}, \ldots$$

fortsetzt, folgt für $\frac{a}{b}$ eine Darstellung:

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{c_m}{\alpha^m}, \tag{2}$$

wenn die Division einmal ohne Rest $r_m$ aufgeht. Weil mit der Gleichung $\frac{\alpha r_{m-1}}{b} = c_m$

$$\frac{\alpha^m r_0}{b} = \alpha^{m-1} c_1 + \alpha^{m-2} c_2 + \cdots + \alpha c_{m-1} + c_m$$

wird, sieht man, *daſs die genannte Darstellung nur möglich ist, wenn $b$ allein aus Primfactoren von $\alpha$ zusammengesetzt ist;* dann aber gibt es für $\frac{a}{b}$ nur eine in Rede stehende Darstellung, in der man auch $c_0$ in der früheren Weise ausdrücken kann.

Sollte keine der Divisionen aufgehen, so gibt es in der Reihe der Gröſsen $r$ höchstens $b - 1$ verschiedene, da nur $b - 1$ ganze Zahlen kleiner als $b$ existiren. Wenn es somit in der Reihe $r_0, r_1 \ldots r_{b-1}$ einen wiederkehrenden Werth $r_m$ gibt und etwa

$$r_{m+k} = r_k$$

ist, so wird

$$c_{m+k+\varkappa} = c_{m+\varkappa}, \quad r_{m+k+\varkappa} = r_{m+\varkappa} \ (\varkappa = 1, 2 \ldots k)$$

und folglich wiederholen sich in der Reihe der Gröſsen $c_{m+1}, c_{m+2} \ldots$ die $k \leqq b - 1$ Gröſsen $c_{m+1}, c_{m+2} \ldots c_{m+k}$ ohne Ende.

Die Zahl

$$c_{m+1}\alpha^{k-1} + c_{m+2}\alpha^{k-2} + \cdots + c_{m+k-1}\alpha + c_{m+k} = C$$

heiſst die zu $\frac{a}{b}$ gehörige *Periode* in Bezug auf die Basis $\alpha$. Ob man in dem Falle des Erscheinens einer solchen Periode

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{c_m}{\alpha^m} + \frac{C}{\alpha^{m+k}}\left(1 + \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\alpha^{2k}} + \cdots\right)$$

setzen kann, muſs erst untersucht werden, denn jetzt können wir aus der Beschaffenheit unmittelbar aufeinander folgender Gröſsen $c$ nur schlieſsen, daſs die Ungleichungen

$$c_0 + \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{c_n}{\alpha^n} < \frac{a}{b} < c_0 + \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{c_{n+1}}{\alpha^n}$$

bestehen. Der absolute Betrag der Differenz der Gröſsen, zwischen welchen $\frac{a}{b}$ eingeschlossen ist, ist gleich $\frac{1}{\alpha^n}$ und dieser kann bei hinlänglich groſs gewähltem $n$ kleiner gemacht werden, als ein noch so kleines Element $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu}$.

Wir erkennen also, daſs die Darstellung einer positiven rationalen Gröſse $\frac{a}{b}$ nicht immer in der Form einer Summe einer endlichen Anzahl ganzer Zahlen und Brüche mit den Potenzen einer fest gewählten Zahl $\alpha$ als Nenner möglich ist, und bei dem Versuche, diese Darstellung allgemein durchzuführen, begegnen wir Summen mit einer

unbeschränkten Anzahl von Elementen $e$ und $\varepsilon_n = \frac{e}{n}$, die wir nun für sich behandeln müssen.

## § 6. **Einführung der irrationalen Gröfsen.**

Wir ziehen ganz allgemein Gröfsen in den Kreis der Betrachtung, die im Gegensatz zu den rationalen Zahlengröfsen durch Zusammensetzung einer unbeschränkten Anzahl von (vorderhand blofs positiven) Elementen gebildet sind. Begrifflich ist eine solche Gröfse durch eine „Reihe“

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \cdots + \varepsilon_{n_m} + \cdots$$

vollkommen definirt, wenn man angeben kann, welche Elemente und wie oft diese in der Reihe auftreten.

Wir denken uns durch die Reihe ein Object, eine Gröfse gesetzt, fassen die Reihe im Gegensatz zu den Elementen und den Summen einer endlichen Anzahl von Elementen als Gröfse für sich auf.

Es mufs zunächst gezeigt werden, wie man die neuen Gröfsen untereinander und mit den rationalen Zahlengröfsen vergleichen kann.

Die Definition der Gleichheit rationaler Gröfsen, die auf der Transformation in gleiche Elemente $\varepsilon_\nu$ beruhte, ist hier nicht anwendbar, weil eine unbeschränkte Anzahl von Transformationen unausführbar ist. Man kann z. B. die Gleichheit von

$$\frac{1}{3} \text{ und } \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots,$$

wo 10 die Stelle des früheren $\alpha$ vertritt und 3 die Periode von $\frac{1}{3}$ ist, nicht in der früheren Weise darthun, und man mufs eine neue Definition der Gleichheit aufsuchen.

Dazu führt die folgende Definition: Nimmt man aus einer Gröfse $a$ der neuen Art eine willkürliche aber beschränkte Anzahl von Elementen heraus, so sagt man, man habe einen *Bestandtheil* herausgegriffen. Darnach heifst $b$ ein Bestandtheil von $a$, wenn eine beschränkte Anzahl von Elementen in $a$ so transformirt werden kann, dafs in $a$ nebst $b$ noch andere Elemente vorkommen.

Gröfsen der neuen Art, in denen jede Zahl als Bestandtheil enthalten ist, heifsen *unendlich*. Wir schliefsen diese Gröfsen von der Betrachtung aus, bemerken aber gelegentlich, dafs eine Gröfse, die ein noch so kleines Element unendlich oft enthält, selbst unendlich ist. Da man z. B. zeigen kann, dafs

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

das Element $\frac{1}{2}$ unendlich oft enthält, indem ja

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

ist, so ist die genannte Gröſse unendlich.

*Eine Gröſse a heiſst endlich*, wenn es eine aus einer angebbaren Anzahl von Elementen gebildete (rationale) Zahlengröſse gibt, die in $a$ nicht als Bestandtheil enthalten ist, oder wenn man eine aus einer beschränkten Anzahl von Elementen zusammengesetzte Zahlengröſse $b$ angeben kann, der Beschaffenheit, daſs jede aus Elementen von $a$ gebildete Zahlengröſse in $b$ enthalten ist.

Nach diesen Definitionen heiſsen zwei Gröſsen der neuen Art *gleich*, wenn jeder Bestandtheil der einen Gröſse in der anderen als Bestandtheil enthalten ist.

Diese Definition umfaſst offenbar die früheren Definitionen der Gleichheit rationaler Zahlengröſsen, bei denen wir ja auch von Bestandtheilen sprechen können.

Zwei unendliche Gröſsen sind einander gleich und jede ist gröſser als jede endliche Zahlengröſse.

Wir stellen nun folgende evidenten Sätze auf:

1) ist $b$ ein Bestandtheil von $a$ und $b=c$, so ist auch $c$ Bestandtheil von $a$.

2) Ist $c$ in $b$ und $b$ in $a$ als Bestandtheil enthalten, so ist auch $c$ Bestandtheil von $a$.

3) Sind $a$ und $b$ ungleich, so muſs es eine Gröſse $c$ geben, die in $a$ oder $b$ enthalten, aber in $b$ respective $a$ nicht enthalten ist. Dann ist jeder Bestandtheil von $b$ in $a$, beziehungsweise jeder Bestandtheil von $a$ in $b$ enthalten.

In dem ersten Falle heiſst $a$ *gröſser* als $b$, im zweiten $a$ *kleiner* als $b$.

Zum Beweise des dritten Satzes sei

$$b=b_1+b_2, \quad b_1<c,$$

also $b_1$ ein Bestandtheil von $c$. Wenn $c$ Bestandtheil von $a$ ist, wird $b_1$ in $b$ und $a$ enthalten sein; und das gilt von jedem Bestandtheil von $b$.

Für die Gleichheit zweier Gröſsen läſst sich ein einfaches Kriterium angeben.

Wir bemerken zunächst, daſs in der Folge von Zahlengröſsen

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}, \ldots$$

gewiſs eine erste existirt, die gleich oder gröſser ist als eine vorgelegte endliche Gröſse $a$. Es sei

$$\frac{m+2}{n}\geqq a,$$

dann wird

$$\frac{m+1}{n}<a, \quad \frac{m}{n}<a, \quad \frac{m-1}{n}<a, \ldots .$$

d. h. $\frac{m}{n}$ ist Bestandtheil von $a$. Bringt man die Gröſse $a$ nach Vereinigung einer endlichen Anzahl von Elementen auf die Form

$$a = a_1 + a_2, \text{ wo } a_1 \geqq \frac{m}{n} \text{ ist,}$$

so wird

$$a_2 < \frac{2}{n}.$$

Wählt man nun eine beliebig kleine Gröſse $\delta$, so kann man nach einer endlichen Anzahl von Operationen einen solchen Bestandtheil $a_1$ aus $a$ herausgreifen, daſs $a - a_1 < \delta$ wird. Man hat $n$ nur so groſs zu wählen, daſs $\frac{2}{n} < \delta$ ist.

Sind zwei gleiche Gröſsen $a$ und $b$ gegeben, so zerlege man dieselben durch eine endliche Anzahl von Transformationen in

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

wo $a_2$ und $b_2$ kleiner sind als eine positive Gröſse $\delta$. Weil der absolute Betrag von $a_1 - b_1$, den wir mit $|a_1 - b_1|$ bezeichnen, auch kleiner ist als $\delta$, erhalten wir den Satz:

*Aus zwei gleichen Zahlengröſsen $a$ und $b$ lassen sich stets solche Bestandtheile $a_1$ und $b_1$ herausnehmen, daſs die Differenzen $(a - a_1)$, $(b - b_1)$ und der absolute Betrag $|a_1 - b_1|$ kleiner wird als eine beliebig kleine vorgegebene positive Gröſse.*

Dieser Satz wird durch seine Umkehrung von Bedeutung, die folgendermaſsen lautet:

*Kann man von zwei Gröſsen $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, wo die Bestandtheile $a_2$ und $b_2$ kleiner sind als eine vorgegebene beliebig kleine Gröſse $\delta$, zeigen, daſs auch $|a_1 - b_1| < \delta$ wird, so sind $a$ und $b$ einander gleich, d. h. jeder Bestandtheil von $a$ ist in $b$ und umgekehrt jeder Bestandtheil von $b$ ist in $a$ enthalten.*

Beweis. Es sei $c$ ein Bestandtheil von $a$, dann zerlege man $a$ derart in $a_1 + a_2$, daſs $a_2 < \delta$ und $a_1 > c$ wird. Ferner sei in $b = b_1 + b_2$ $b_2 < \delta$ und $|a_1 - b_1| < \delta$.

Zufolge der letzten Bedingung ist entweder $a_1$ Bestandtheil von $b_1$, und dann wird $c$ in $a$ und $b$ enthalten sein, oder es ist $b_1$ Bestandtheil von $a_1$, also $a_1 - b_1 < \delta$. Es sei $a_1 = b_1 + \varepsilon$, wo $\varepsilon$ ebenso wie $a_1$ und $b_1$ eine rationale Zahlengröſse bedeutet, die kleiner sein soll als $\delta$, dann wird $b_1 > c - \varepsilon$ und $b - c > b_2 - \varepsilon$. Nehmen wir an, daſs $c$ kein Bestandtheil von $b$ sei, so muſs $\varepsilon > b_2$ sein und $a_1 - b_1 = \varepsilon$ wird nicht kleiner als das beliebig kleine $\delta$. Ist aber $c$ Bestandtheil von $b$, so wird $\varepsilon < b_2$ und unsere Bedingungen sind erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen.

*Sind $a$ und $b$ zwei durch eine unbeschränkte Anzahl von Elementen zusammengesetzte ungleiche Gröſsen, so kann man in dem Falle $b < a$ stets eine rationale Gröſse $\delta$ so finden, daſs auch noch*

$$b + \delta < a$$

*wird; ist aber $a < b$, so existirt eine Gröſse $\delta$, für die noch die Ungleichung*

$$b = \delta > a$$

*erfüllt wird.*

B e w e i s. Es sei

$$a = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\nu} + \cdots$$

und $b < a$, dann gibt es einen Bestandtheil $c$ von $a$, der nicht in $b$ enthalten ist. Denken wir jetzt aus $a$ so viele Elemente $\frac{1}{n_\mu}$ herausgegriffen, daſs

$$c \leqq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\nu},$$

so wird $c + \frac{1}{n_{\nu+1}}$ auch Bestandtheil von $a$ sein, aber gewiſs nicht von $b + \delta$, wenn $\delta \leqq \frac{1}{n_{\nu+1}}$ gewählt ist. Man kann also ein $\delta$ der Forderung gemäſs angeben.

*Ist $b < a$, so kann man aber auch eine Gröſse $\delta$ so bestimmen, daſs $b + \delta = a$ wird.*

B e w e i s. In der That wählen wir aus der Elementenreihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

zwei aufeinander folgende Terme $\frac{1}{n_1 - 1}$, $\frac{1}{n_1}$, so daſs

$$b + \frac{1}{n_1 - 1} > a \geqq b + \frac{1}{n_1}$$

und gilt hier die Gleichung $a = b + \frac{1}{n_1}$, so ist $\frac{1}{n_1}$ die verlangte Gröſse $\delta$. Im Falle $a > b + \frac{1}{n_1}$ suche man ein Element $\frac{1}{n_2}$, so daſs

$$b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2 - 1} > a \geqq b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}.$$

Es kann hier $n_2 \geqq n_1$, aber nicht $n_2 < n_1$ sein, sonst wäre nämlich die erste Ungleichung nicht richtig. — Gilt hier das Gleichheitszeichen, so ist $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \delta$, andernfalls bestimmt man ein Element, so daſs

$$b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3 - 1} > a \geqq b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

usw. Durch das beschriebene, vielleicht endlose aber bestimmte Verfahren wird eine Gröſse $\delta$ definirt, denn man kann ihre Elemente nach und nach angeben; sie ist endlich und erfüllt die Gleichung

$$b + \delta = a.$$

In der That: wäre sie unendlich, so hätte sie einen Bestandtheil $c$, der gröfser ist als irgend eine willkürlich vorgelegte Zahlengröfse $G$. Ist dann $\nu$ so gewählt, dafs

$$G < b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\nu},$$

so mufs

$$a > G$$

sein, denn

$$b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\nu}$$

ist Bestandtheil von $a$ usw. Nun wäre aber $a$ auch unendlich und das widerspricht der Voraussetzung.

Endlich ist $b + \delta = a$, denn jeder Bestandtheil $c$ von $b + \delta$ ist in $a$ enthalten und umgekehrt. — Es sei wieder $\nu$ so gewählt, dafs

$$c < b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\nu},$$

dann folgt unmittelbar: $c$ ist Bestandtheil von $a$, denn die rechtsstehende Gröfse ist in $a$ enthalten.

Ist $a$ andrerseits in $a_1 + a_2$ zerlegt, wo $a_1$ aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt ist, so ist dieser Bestandtheil $a_1$ von $a$ in $b + \delta$ enthalten. — Nimmt man in $\delta$ die gleichen Elemente zusammen, definirt $\delta$ also durch die Reihe:

$$\frac{\nu_1}{m_1} + \frac{\nu_2}{m_2} + \cdots + \frac{\nu_\mu}{m_\mu} + \cdots,$$

so bestehen die Ungleichungen

$$b + \frac{\nu_1}{m_1} + \frac{\nu_2}{m_2} + \cdots + \frac{\nu_\mu + 1}{m_\mu} > a > b + \frac{\nu_1}{m_1} + \frac{\nu_2}{m_2} + \cdots + \frac{\nu_\mu}{m_\mu},$$

denn es ist (aufser im Falle $m_\mu = 2$)

$$\frac{\nu_\mu + 1}{m_\mu} > \frac{(\nu_\mu - 1)}{m_\mu} + \frac{1}{m_\mu - 1} = \frac{\nu_\mu}{m_\mu} + \frac{1}{m_\mu (m_\mu - 1)}.$$

Wählt man $\mu$ derart, dafs $\frac{1}{m_\mu} < a_2$, so wird

$$b + \frac{\nu_1}{m_1} + \frac{\nu_2}{m_2} + \cdots + \frac{\nu_\mu}{m_\mu} < a_1$$

und $a_1$ erscheint als Bestandtheil von $b + \delta$.

Nach diesen Ausführungen ist es ein Leichtes, die Gleichheit von

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \quad \text{und} \quad \frac{1}{3}$$

oder die von

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \quad \text{und} \quad 2$$

oder

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{und} \quad 1$$

zu beweisen, indem man zeigt, dafs jeder Bestandtheil der links stehenden Gröfsen in den entsprechenden rechts vorkommt und umgekehrt.

Nach Aufstellung des Begriffes einer aus einer unbeschränkten Anzahl von Elementen gebildeten Gröfse, nach den Definitionen des Gleich-, Gröfser- und Kleiner-Seins zweier solcher Gröfsen, mufs man untersuchen, „ob und wie sich für dieselben die arithmetischen Grundoperationen so definiren lassen, dafs erstens die aus zweien Gröfsen $a$ und $b$ gebildeten Gröfsen

$$a+b, \quad a-b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

Gröfsen derselben Art sind und zweitens die in den auf Seite 15 angegebenen Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten.“

Die erste Gleichung verlangt, dafs die *Summe* zweier Gröfsen $a$ und $b$ als eine dritte Gröfse definirt wird, welche alle Elemente von $a$ und $b$ enthält und zwar in der Vielheit, als sie in $a$ und $b$ zusammen vorkommen.

Die Summe $a+b$ ist mit $a$ und $b$ endlich, denn es gibt Zahlengröfsen $\alpha$ und $\beta$, die gröfser sind als jeder Bestandtheil von $a$ resp. $b$, und $\alpha+\beta$ wird gröfser als jeder Bestandtheil von $a+b$.

Die Summe einer angebbaren Anzahl endlicher Gröfsen ist wieder endlich, die Additionsgesetze bleiben erhalten und gleiche Gröfsen vertreten einander in der Summe.

Das *Product* zweier Gröfsen $a$ und $b$ ist eine Gröfse, die aus den Producten jeglicher Elemente von $a$ und $b$ zusammengesetzt ist. Darnach kann man angeben, welche Elemente und in welcher Anzahl diese in dem Product vorkommen, dasselbe ist also begrifflich definirt. Man mufs nur zeigen, dafs das Product mit den Factoren endlich bleibt, dafs die Multiplicationsgesetze erhalten bleiben und sich in dem Product gleiche Gröfsen vertreten können.

Zufolge der Definition der endlichen Gröfse kann man eine rationale Zahlengröfse $\alpha$ angeben derart, dafs jeder Bestandtheil $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$ von $a$ in $\alpha$ enthalten ist. Ebenso sei $\beta$ eine rationale Gröfse, die jeden Bestandtheil $(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)$ von $b$ enthält. Greift man hierauf aus dem Producte $ab$ einen Bestandtheil

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{l} a_\mu b_\nu$$

heraus, wo $k$ und $l$ kleiner oder gleich $m$ beziehungsweise $n$ bleiben, so ist

$$\gamma \leq \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_\mu b_\nu < \alpha . \beta$$

d. h. jeder Bestandtheil des Productes ist in $\alpha\beta$ enthalten und $ab$ ist endlich.*)

Unter steter Verwendung des verallgemeinerten Gleichheitsbegriffes lassen sich die Multiplicationsgesetze beweisen und endlich ist auch $ab = ab'$, wenn $b = b'$ ist. Dazu mufs wieder jeder Bestandtheil $\gamma$ von $ab$ auch in $ab'$ enthalten sein und umgekehrt.

In $\gamma$ kommt ein Bestandtheil von $a$ und einer von $b$ vor, der letztere ist auch in $b'$ enthalten. Es läfst sich also stets ein Bestandtheil $(b_1' + b_2' + \cdots + b_m')$ von $b'$ angeben, der mit dem in Rede stehenden Bestandtheil von $a$ multiplicirt zu einem Producte führt, das gröfser oder gleich $\gamma$ ist. Folglich ist $\gamma$ auch in $ab'$ enthalten.

Umgekehrt ist jeder Bestandtheil von $ab'$ auch in $ab$ enthalten, und darum ist $ab = ab'$. —

*Jetzt sind wir zu beurtheilen im Stande, wann die Summe einer vorgegebenen unendlichen Menge (zuerst blos) positiver und rationaler Zahlengröfsen* $a_1, a_2 \ldots a_n$, d. i. diejenige Gröfse, welche alle Elemente $a_\nu$ in derselben Vielheit wie die Menge enthält, *eine bestimmte Bedeutung hat. Vor allem darf kein Element oder Summand* $a_\nu$ *unendlich sein und keiner unendlich oft vorkommen*, sonst wäre die Summe auch unendlich und darum unbestimmt, weil wir nur sagen können, sie ist gröfser als jede endliche Zahlengröfse. *Ferner mufs jede aus einer endlichen Anzahl von Elementen* $a_\nu$ *gebildete Summe kleiner sein als eine angebbare Zahlengröfse, damit die Summe der unendlich vielen Elemente endlich ist.*

In der That, bedeutet $S_m$ die Summe irgend einer endlichen Anzahl von Elementen, so kann man in der Reihe von Summanden

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$

ein $n$ stets so bestimmen, dafs

$$S_m \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

ist. Wäre nun $S_m > G$, wo $G$ irgend eine angebbare Zahlengröfse bezeichnet, so besäfse $S_m$ einen Bestandtheil, der in $G$ nicht mehr enthalten ist. Doch weil $S_m$ nur Bestandtheile besitzt, die der Summe aller Elemente $a_\nu$ angehören, so müfste die Summe unendlich sein, indem ja $G$ beliebig grofs gewählt werden kann. Die genannte Bedingung ist also nothwendig; sie ist aber auch hinreichend, denn wenn eine Zahlengröfse $g > S_m$ existirt, wird

*) Hier ist $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$ das Zeichen für $b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$, $\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_\mu b_\nu$ das Zeichen für die Summe aller Combinationen $a_\mu b_\nu$, wenn $\mu$ und $\nu$ die Zahlenreihen $1, 2 \ldots m$ und $1, 2 \ldots n$ durchlaufen.

$$g > \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu$$

sein, wie grofs auch $m$ gewählt sein mag, d. h. $g$ enthält Bestandtheile, die der Summe nicht angehören. Wenn somit jeder Bestandtheil der Summe in der angebbaren Gröſse $g$ enthalten ist, wird die Summe aller Elemente endlich.

Zufolge des für die aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten Gröſsen geltenden Gleichheitsbegriffes kann man die Summanden beliebig vertauschen, ohne daſs die Summe der neu geordneten Reihe von der ersten Summe abweicht.

Man kann die Summanden auch beliebig in Gruppen zusammenfassen und diese summiren. Hierbei ist es für das Resultat gleichgiltig, ob man Gruppen mit einer endlichen Anzahl und eine mit einer unbeschränkten Anzahl von Elementen bildet, oder eine endliche Anzahl von Gruppen, deren jede unendlich viele Elemente besitzt, oder ob man unendlich viele Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Elementen zusammensetzt; die Summe besitzt jedesmal dieselben Bestandteile.

Es ist auch erlaubt, jedes Element $a_\nu$ durch eine demselben gleichwerthige Gröſse zu ersetzen, ja selbst dann, wenn die Elemente $a_\nu$ aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzt sind:

$$a_\nu = b_1^{(\nu)} + b_2^{(\nu)} + \cdots + b_\mu^{(\nu)} + \cdots,$$

denn die Summe der Summanden $b_\mu^{(\nu)}$ ist mit der Summe der $a_\nu$ endlich und dieser gleich.

In der That existirt ja eine Gröſse $g$, die gröſser ist als jeder Bestandtheil der Summe $a_\nu$, und wie grofs man $n$ auch wählen mag, es wird

$$g > a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Nimmt man hierauf irgend eine Summe von Gröſsen $b_\mu^{(\nu)}$:

$$b_\alpha^{(\nu_\alpha)} + b_\beta^{(\nu_\beta)} + \cdots + b_\varkappa^{(\nu_\varkappa)},$$

so ist

$$a_{\nu_\alpha} + a_{\nu_\beta} + \cdots + a_{\nu_\varkappa} \leqq b_\alpha^{(\nu_\alpha)} + b_\beta^{(\nu_\beta)} + \cdots + b_\varkappa^{(\nu_\varkappa)},$$

also umsomehr

$$g > b_\alpha^{(\nu_\alpha)} + b_\beta^{(\nu_\beta)} + \cdots + b_\varkappa^{(\nu_\varkappa)}$$

und die Summe der Gröſsen $b$ ist endlich. Ebenso leicht folgt die zweite Behauptung. —

Aus der Definition des Productes zweier aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten Gröſsen $a$ und $b$ erschlieſst man, wie eine endliche Summe unendlich vieler Summanden mit einer Gröſse multiplicirt wird und wie man das Product zweier solcher Summen erhält.

Es wird

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots) b = b a_1 + b a_2 + \cdots + b a_n + \cdots$$
$$= b(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$$

und

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)(b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_1 b_n + \cdots$$

Bezeichnet man die Summe der Gröſsen $a_\nu$ mit $S_a$, die der Gröſsen $b_\nu$ mit $S_b$, so haben die neu gebildeten Reihen die Summe $b . S_a$ resp. $S_a . S_b$. —

Ist eine unendliche Menge endlicher Gröſsen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

gegeben, unter denen nicht unendlich viele gleiche vorkommen, so sagt man, daſs die Summen

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

gegen eine Gröſse $S$ *convergiren*, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröſse $\delta$ eine ganze Zahl $m$ so bestimmt werden kann, daſs für alle Werthe von $n \geqq m$

$$S - S_n < \delta.$$

*Wenn die unendliche Menge von Gröſsen $a_\nu$ eine endliche Summe $S$ besitzt, so convergiren die Summen $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$ nach der Gröſse $S$.*

Wählt man irgend eine kleine positive Gröſse $\varepsilon$, so kann man zu dieser eine ganze Zahl $m$ derart finden, daſs für alle $n \geqq m$

$$S - S_n < \varepsilon$$

wird und diese Ungleichung stimmt mit der früheren überein, sobald $\varepsilon < \delta$ ist. Dann convergiren die Gröſsen $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$. wirklich nach $S$.

*Convergiren umgekehrt die Summen $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$ nach der endlichen Gröſse $S$, so ist $S$ die Summe der Reihe*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

denn wegen der jetzt geltenden Ungleichungen

$$S - S_n < \delta \quad (n \geqq m)$$

ist die Summe endlich und von $S$ nicht verschieden.

Damit ist die Definition der Summe einer unendlichen Reihe vollzogen und wir sehen, daſs die Summe einer unendlichen Menge positiver rationaler Gröſsen $a_\nu$ gleich ist der durch die Zusammensetzung dieser Gröſsen definirten Gröſse, die wir oben als ein im Gegensatz zu den gegebenen Gliedern für sich bestehendes bestimmtes Object gedacht haben.

Jetzt können wir diese Gröſsen direct als Summe unendlicher Reihen in die Rechnung einführen und verstehen unter der Summe diejenige Gröſse, nach welcher die Theilsummen $S_1, S_2 \dots S_n \dots$ convergiren. Wir müssen nur noch zeigen, daſs bei gehöriger Definition auch $a - b$ und $\frac{a}{b}$ Gröſsen gleicher Art bleiben wie $a$ und $b$ und daſs die Gesetze gelten:

$$(a - b) + b = a, \quad \frac{a}{b} b = a.$$

Die *Subtraction* neuer Gröſsen $a$ und $b$ macht keine Schwierigkeit, wenn der Minuend gröſser ist als der Subtrahend. Andernfalls muſs man auch *Gröſsen* einführen, *die aus einer unendlichen Anzahl positiver und negativer Elemente zusammengesetzt sind.*

Es seien

$$a = a_1 + (-a_2), \quad b = b_1 + (-b_2)$$

zwei solche Gröſsen, wo $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ aus unendlich vielen positiven Elementen gebildet sind. Sie heiſsen gleich, wenn

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

ist. Ist dann $a = b$ und $b = c$, wo $c = c_1 + (-c_2)$ sei, so folgt aus

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \quad \text{und} \quad b_1 + c_2 = b_2 + c_1$$

$$a_1 + c_2 = a_2 + c_1 \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Eine aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen zusammengesetzte Gröſse $a$ heiſst wieder *endlich*, wenn eine positive Gröſse existirt, die gröſser ist als der absolute Betrag irgend eines Bestandtheiles von $a$.

Ist $a$ endlich, so muſs umgekehrt sowohl die aus den positiven als auch die aus den negativen Elementen von $a$ allein zusammengesetzte Gröſse endlich sein. —

*Eine Zahlengröſse $a$ aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen $\varepsilon_{m_\mu} = \frac{1}{m_\mu}$ resp. $\varepsilon'_{n_\nu} = -\frac{1}{n_\nu}$ kann durch eine endliche Anzahl von Operationen stets so transformirt werden, daſs der absolute Betrag der negativen (oder positiven) Elemente kleiner wird als eine beliebig kleine positive Gröſse $\delta$.*

Bezeichnet man

$$\alpha = \sum_{\mu = 1, 2 \dots} \frac{1}{m_\mu}, \quad \beta = \sum_{\nu = 1, 2 \dots} \frac{1}{n_\nu}$$

und ist etwa $\alpha > \beta$, so kann man $\beta = \beta_1 + \beta_2$ so zerlegen, daſs $\beta_1$ Bestandtheil von $\alpha$ und $\beta_2 < \delta$ wird. Setzt man darnach $\alpha = \alpha_1 + \beta_1$, so wird

$$a = \alpha - \beta = \alpha_1 + (-\beta_2).$$

Wäre $\alpha < \beta$, so entstünde in dieser Form ein positiver Theil, der kleiner ist als das vorgegebene $\delta$.

Aus den letzten Definitionen und Sätzen gehen für die neuen Gröfsen aus positiven und negativen Elementen wie früher die Definitionen der Summe, des Productes und der Differenz entsprechend den Verknüpfungsregeln ganzer Zahlen hervor.

Wir betrachten hierauf wieder *die Summe einer unendlichen Menge positiver und negativer Gröfsen*, unter denen keine mit unendlichem absoluten Betrage und keine unendlich oft vorkommt. Sie wird endlich sein, wenn eine positive Gröfse $g$ existirt, die gröfser ist als der absolute Betrag jedes Bestandtheiles der Menge, und daraus folgt, dafs die Summen der positiven und negativen Elemente für sich endlich sind, wenn die aus beiderlei Elementen gebildete Gröfse endlich ist (nach der früheren Definition).

Wir können auch sagen, *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Summe endlich ist, besteht in der Endlichkeit der Summe der positiven und negativen Elemente für sich, oder der Endlichkeit der Summe der absoluten Beträge aller Elemente.*

Nennen wir nämlich diejenigen Gröfsen, in welchen die positiven Elemente überwiegen, $a_\nu$, diejenigen, wo die negativen Elemente vorherrschen, $b_\nu$, und setzt man

$$a_\nu = a_\nu^{(1)} + (-a_\nu^{(2)}), \quad b_\nu = b_\nu^{(1)} + (-b_\nu^{(2)})$$

und denkt

$$a_\nu^{(2)} < \delta_\nu, \qquad b_\nu^{(1)} < \varepsilon_\nu$$

gewählt, wo $\delta_\nu$ und $\varepsilon_\nu$ kleiner seien als das Glied $\alpha_\nu$ einer Reihe positiver Elemente:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$$

mit endlicher Summe, so wird die ursprüngliche Summe gewifs endlich sein, sobald

$$\sum a_\nu^{(1)} \quad \text{und} \quad \sum b_\nu^{(2)}$$

endlich sind.

In den Reihen aus positiven und negativen Gliedern von endlicher Summe kann man die Summanden beliebig vertauschen und willkürlich in Gruppen zusammenfassen, ohne das Resultat der Summation zu ändern.

Mit den neuen Summen rechnet man wie früher mit den aus blos positiven Gröfsen gebildeten Summen.

Ist ferner

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

eine unendliche Menge positiver und negativer Gröfsen, so sagt man wieder, die Summen

$$S_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n \ldots)$$

*convergiren* nach einer Gröfse $S$, wenn nach Wahl einer beliebig

kleinen positiven Gröſe $\delta$ ein $m$ der Beschaffenheit zu finden ist, daſs für jedes $n \geqq m$ der absolute Betrag von $S - S_n$:

$$|S - S_n| < \delta.$$

Besitzt die unendliche Menge von Gröſsen eine endliche Summe $S$, so convergiren die Gröſsen $S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$ gegen die Gröſse $S$, und convergiren umgekehrt $S_1, S_2, \ldots. S_n \ldots$ nach $S$, so ist die Summe der Menge $S$.

Wieder kann man die aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen zusammengesetzten Gröſsen als Summe der Reihen einführen. —

Mit der genannten Definition der Endlichkeit einer aus entgegengesetzten Einheiten und deren Bruchtheilen gebildeten Gröſse sind diejenigen Reihen positiver und negativer Gröſsen $a_\nu$ und $b_\nu$ ausgeschlossen, welche eine endliche Summe besitzen, ohne daſs die Reihen der $a_\nu$ und $b_\nu$ für sich allein endliche Summen haben.

Solche Reihen, in denen $\sum a_\nu$ und $\sum b_\nu$ zugleich unendlich sein müssen, indem sonst $\sum a_\nu + \sum b_\nu$ nicht endlich sein könnte, besitzen nicht den Charakter von Summen und sollen deshalb aus der Rechnung ausgeschlossen werden. Die Additionsgesetze verlieren nämlich hier ihre Geltung. Nehmen wir so lange positive Elemente $a_\nu$, bis ihre Summe gröſser ist als der absolute Betrag einer vorgegebenen Gröſse $c$, und dann negative Glieder $b_\nu$, bis der absolute Betrag der neuen Summe kleiner ist als $|c|$, nehmen dann wieder positive Glieder, bis der absolute Betrag der so veränderten Summe gröſser ist als $|c|$ usw., so ist die Abweichung von $|c|$ nie gröſser als der absolute Werth des vor dem letzten Wechsel verwendeten Gliedes $a_\nu$ oder $b_\nu$. Gibt es unter den Gröſsen $a_\nu$ und $|b_\nu|$ unendlich viele beliebig kleine, so werden die Abweichungen des absoluten Betrages der auf die genannte Weise entstehenden Summe von $|c|$ beliebig klein zu machen sein, wenn man nur hinlänglich viele Glieder $a_\nu$ und $b_\nu$ benützt. Sind demnach unter den Gröſsen $a_\nu$ und $|b_\nu|$ keine unendlich groſsen und nicht unendlich oft dieselben, dann kann man durch passende Anordnung der Summanden die Summen $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$ so bilden, daſs diese nach jeder beliebig vorgegebenen Gröſse $c$ convergiren. Die Summe der gegebenen Reihe ist also von der Anordnung der Summanden abhängig.*)

Wir schlieſsen diese Reihen aus und behalten blos diejenigen Reihen zurück, welche eine von der Anordnung der Summanden endliche Summe besitzen. Wir nennen sie *unbedingt* und *absolut conver-*

*) Vergl. Riemann's gesammelte Werke.

*gent*, indem auch die Summen der absoluten Beträge jeder endlichen Anzahl von Termen nach einer bestimmten Gröfse convergiren. —

Wir haben jetzt noch nachzusehen, ob wir den Quotienten zweier aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten Gröfsen $a$ und $b$ den genannten Forderungen entsprechend definiren können.

Der Divisor $b$ sei gleich eine aus unendlich vielen positiven Elementen gebildeten Gröfse, denn die Division von $a$ durch eine rationale Zahlengröfse $b = \frac{\alpha}{\beta}$ besteht einfach in der Multiplication von $a$ mit $\frac{\beta}{\alpha}$, indem dann die neue Gröfse $\frac{a}{b}$ wirklich den Forderungen gemäfs definirt ist.

Es sei $b = p + q$ und hierin $p$ zwar gröfser als $q$, aber doch nur ein aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildeter Bestandtheil von $p$. Der Dividend sei auch positiv.

Hierauf nehmen wir die folgenden Transformationen vor:

$$\frac{a}{p+q} = \frac{a}{p} + \left(\frac{a}{p+q} - \frac{a}{p}\right) = \frac{a}{p} - \frac{aq}{p(p+q)},$$

$$-\frac{aq}{p(p+q)} = -\frac{aq}{p^2} - \left(\frac{aq}{p(p+q)} - \frac{aq}{p^2}\right) = -\frac{aq}{p^2} + \frac{aq^2}{p^2(p+q)},$$

$$\frac{aq^2}{p^2(p+q)} = \frac{aq^2}{p^3} + \left(\frac{aq^2}{p^2(p+q)} - \frac{aq^2}{p^3}\right) = \frac{aq^2}{p^3} - \frac{aq^3}{p^3(p+q)}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(-1)^n \frac{aq^n}{p^n(p+q)} = (-1)^n \frac{aq^n}{p^{n+1}} + (-1)^n \left(\frac{aq^n}{p^n(p+q)} - \frac{aq^n}{p^{n+1}}\right)$$
$$= (-1)^n \frac{aq^n}{p^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{aq^{n+1}}{p^{n+1}(p+q)}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

und erhalten für $\frac{a}{p+q}$ die Reihe:

$$\frac{a}{p} - \frac{a}{p}\,\frac{q}{p} + \frac{a}{p}\,\frac{q^2}{p^2} - \cdots + (-1)^n \frac{a}{p}\,\frac{q^n}{p^n} + \cdots$$

Wir müssen aber zeigen, dafs diese formal gebildete Reihe unendlich vieler bestimmter Glieder eine bestimmte Bedeutung hat, also die Summe jeder endlichen (sonst beliebigen) Anzahl von Gliedern kleiner ist als eine angebbare Gröfse, und dafs die Multiplication der neu gebildeten Gröfse mit $(p+q)$ $a$ gibt, denn dann haben wir die Division durch $p + q = b$ oder die Gröfse $\frac{a}{b}$ unseren Forderungen gemäfs definirt.

Betrachten wir allgemein eine Reihe

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n + \cdots,$$

in der die positiven Gröfsen $a_\nu$ rational sind und der absolute Betrag

der rationalen Gröſse $c$ kleiner ist als Eins, und vergleichen sie mit einer Reihe

$$a + ac + ac^2 + \cdots + ac^n + \cdots,$$

wo $a$ gröſser ist als jede der Gröſsen $a_\nu$. Die Summe der ersten Reihe ist gewiſs kleiner als die der zweiten, denn jeder Bestandtheil jener gehört auch dieser an. Die Summe der ersten $n$ Glieder der ersten Reihe ist nicht gröſser als

$$a + ac + ac^2 + \cdot \quad \cdot + ac^{n-1} = a\frac{1-c^n}{1-c}$$

und der absolute Betrag jener Summe ist kleiner als die endliche Zahlengröſse

$$\frac{a}{1-c}.$$

Das gilt für jedes $n$, daher ist die Summe der ersten Reihe endlich.

Bestehen die Gröſsen $a_\nu$ und $c$ aus unendlich vielen Elementen, so bestimme man zwei positive rationale Gröſsen $\alpha$ und $\gamma$, derart daſs

$$\alpha > a_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots) \quad \text{und} \quad 1 > \gamma > |c|,$$

wo $|c|$ den absoluten Betrag von $c$ bezeichnet. Dann ist der absolute Betrag jedes Gliedes $a_\nu c^\nu$

$$|a_\nu c^\nu| < \alpha\gamma^\nu$$

und der absolute Betrag der Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der vorgelegten Reihe wird wieder kleiner als

$$\frac{\alpha}{1-\gamma},$$

d. h. auch jetzt ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=0,1,2\ldots} a_\nu c^\nu$ endlich.

Die Anwendung dieser Betrachtungen auf die oben gebildete Reihe

$$\frac{a}{p} + \frac{a}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) + \frac{a}{p}\left(-\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \frac{a}{p}\left(-\frac{q}{p}\right)^n + \cdots,$$

deren Glieder immer kleiner und kleiner werden, lehrt unmittelbar, daſs sie eine endliche Summe besitzt. —

Das Product der Reihe und $(p+q)$ ist ferner gleich $a$, denn man kann entsprechend einem vorgelegten Bestandtheile von $a$ ein $n$ so bestimmen, daſs auch die Summe

$$(p+q)\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a}{p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\nu-1} = (p+q)\cdot\frac{a}{p}\,\frac{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(-\frac{q}{p}\right)}$$

oder

$$a\left(1-\left(-\frac{q}{p}\right)^n\right)$$

diesen Bestandtheil besitzt, und umgekehrt ist jeder Bestandtheil des Productes in $a$ enthalten.

Die Änderungen in den Annahmen, $b$ sei negativ, $a$ positiv oder negativ, bedürfen gewiſs keiner Besprechung mehr und wir können sagen, daſs wir für die aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen zusammengesetzten endlichen Gröſsen die arithmetischen Operationen den Forderungen gemäſs definirt haben und berechtigt sind, die neuen Gröſsen als Summen unendlicher Reihen in die Rechnung aufzunehmen.

## § 7. Zweite Definitionsform der irrationalen Zahlengröſsen.

Zur Begründung der neuen Gröſsen, die wir *irrationale Zahlengröſsen* nennen, wenn sie nicht wie die Reihe $\sum\limits_{\nu=1,2\ldots}\frac{3}{10^\nu}$ mit rationalen Gröſsen übereinkommen, wurden wir veranlaſst, als die Forderung gestellt war, die rationalen Zahlengröſsen in einer bestimmten Form darzustellen. Man wird zu den neuen Gröſsen bei vielen anderen Aufgaben gedrängt. Fragt man z. B. nach einer Gröſse $x$, welche die Eigenschaft hat, mit sich selbst multiplicirt eine positive rationale Zahlengröſse $A$ zu geben, so stellt sich heraus, daſs unter den rationalen Zahlengröſsen keine der verlangten Art existirt, wenn $A$ nicht selbst die zweite Potenz einer solchen ist.

Gibt es eine rationale Gröſse $x = \frac{p}{q}$, derart daſs

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{q} = A = \frac{a}{b}$$

ist, wo $a$ und $b$ und ebenso $p$ und $q$ ohne gemeinsamen Theiler vorauszusetzen sind, auf daſs auch $p^2$ und $q^2$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so ist

$$p^2 b = q^2 a.$$

Weil hier $p^2$ und $a$, $q^2$ und $b$ wechselweise durcheinander theilbar sein müssen, zerfällt die letzte Gleichung in die folgenden

$$p^2 = a, \quad q^2 = b,$$

und man hat nur mehr Gröſsen $p$ und $q$ zu suchen, die mit sich selbst multiplicirt die ganzen Zahlen $a$ respective $b$ geben.

Ist $\alpha$ eine bestimmte ganze Zahl gleich oder gröſser als 2, so schreiben wir zunächst die ganze Zahl $a \geqq \alpha$ in der Form:

$$c_0\,\alpha^m + c_1\,\alpha^{m-1} + \cdots + c_m,$$

worin $c_0, c_1 \ldots c_m$ Zahlen aus der Folge $0, 1, 2 \ldots \alpha - 1$ bezeichnen. Das Verfahren zur Ermittlung einer Gröſse $p$, welche der Gleichung $pp = a$ genügt, besteht dann darin, daſs man zuerst die gröſste Zahl $\alpha_1$ der Form $\beta_1\,\alpha^\mu$ $(\beta_1 < \alpha)$ sucht, für welche

$$a - \alpha_1{}^2 > 0$$

ist, dann die gröſste Zahl $\alpha_2$ der Form $\beta_2 \alpha^{\mu-1}$ $(\beta_2 > \alpha)$, derart daſs

$$a - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 > 0$$

wird usw.

Wenn es keine rationale Zahl

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \beta_1 \alpha^\mu + \beta_2 \alpha^{\mu-1} + \cdots + \beta_{\mu+1}$$

der verlangten Beschaffenheit gibt, oder — wie man sagt — keine rationale zweite Wurzel aus $a$, so läſst sich das angegebene Verfahren unbegrenzt fortsetzen und die successive gewonnenen rationalen Gröſsen

$$p_1 = \alpha_1, \quad p_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \ \ldots \ p_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \ldots$$

haben die Eigenschaft, die von $p$ geforderte Beschaffenheit immer genauer und genauer zu erfüllen, indem die Differenzen

$$a - p_1^2, \quad a - p_2^2, \quad \ldots \ a - p_n^2, \ \ldots$$

immer kleiner und kleiner werden. Zu einer beliebig kleinen positiven Gröſse $\delta$ kann man aber ein $m$ so bestimmen, daſs die Differenz jedes auf $p_m$ folgenden Gliedes $p_{m+\mu}$ der unbegrenzt fortsetzbaren Reihe

$$p_1, \ p_2, \ \ldots \ p_n \ \ldots$$

und $p_m$ selber kleiner wird als $\delta$.

Wir betrachten allgemeiner eine unendliche Menge rationaler Gröſsen

$$a_1, \ a_2, \ \ldots \ a_n, \ \ldots$$

und setzen fest, daſs zu jeder beliebig klein gewählten positiven (rationalen) Gröſse $\delta$ nur eine endliche Anzahl $(m - 1)$ von Gliedern der Folge $(a_1, \ a_2, \ a_3 \ldots)$ gehöre, derart daſs die übrigen Glieder paarweise eine dem absoluten Betrage nach kleinere Differenz besitzen, als $\delta$ anzeigt. Eine solche Reihe von Gröſsen mit der Eigenschaft

$$|a_{n+\nu} - a_n| < \delta \qquad \begin{pmatrix} n \geq m \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

heiſst eine *Fundamentalreihe* und speciell eine *Elementarreihe*, wenn die absoluten Beträge der Gröſsen $a_n$ mit wachsendem Index $n$ unter jede noch so kleine positive Gröſse herabsinken.*)

Aus diesen Definitionen geht hervor, daſs die absoluten Beträge der Glieder einer Fundamentalreihe stets kleiner bleiben als eine endliche Gröſse und gröſser als eine von Null verschiedene Gröſse.

*Eine Reihe endlich bleibender Gröſsen $a_\nu$, deren absolute Beträge von einem bestimmten $m$ ab niemals abnehmen, ist eine Fundamentalreihe.*

Wäre nämlich die Eigenschaft

$$|a_{n+\nu} - a_n| < \delta$$

nicht erfüllt, so müſsten die absoluten Beträge $|a_\nu|$ mit wachsendem

*) Vergl. Heine's Abhandlung in Crelle's J. Bd. 74.

$\nu$ größer werden als jede angebbare Größe, und das widerspricht der Voraussetzung.

Derselbe Satz gilt auch für Reihen endlicher Größen, deren absolute Beträge von einem bestimmten $m$ ab niemals zunehmen.

Zugleich mit zwei Reihen

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n,\ \ldots$$

sind auch die folgenden

$$\begin{array}{llll} a_1 + b_1, & a_2 + b_2, & \ldots\ a_n + b_n, & \ldots \\ a_1 - b_1, & a_2 - b_2, & \ldots\ a_n - b_n, & \ldots \\ a_1 b_1, & a_2 b_2, & \ldots\ a_n b_n, & \ldots \\ \frac{a_1}{b_1}, & \frac{a_2}{b_2}, & \ldots\ \frac{a_n}{b_n}, & \ldots \end{array}$$

Fundamentalreihen, denn es ist

$$\begin{aligned} |(a_{n+\nu} + b_{n+\nu}) - (a_n + b_n)| &= |(a_{n+\nu} - a_n) + (b_{n+\nu} - b_n)| \\ |(a_{n+\nu} - b_{n+\nu}) - (a_n - b_n)| &= |(a_{n+\nu} - a_n) - (b_{n+\nu} - b_n)| \\ |a_{n+\nu} b_{n+\nu} - a_n b_n| &= |b_{n+\nu}(a_{n+\nu} - a_n) - a_n(b_{n+\nu} - b_n)| \\ \left|\frac{a_{n+\nu}}{b_{n+\nu}} - \frac{a_n}{b_n}\right| &= \left|\frac{b_{n+\nu}(a_{n+\nu} - a_n) - a_n(b_{n+\nu} - b_n)}{b_{n+\nu} b_n}\right| \end{aligned}$$

und die rechten Seiten dieser Gleichungen sind beliebig klein zu machen. Blos in der vierten Reihe dürfen die Größen $b_\nu$ keine Elementarreihe bilden.

*Zwei Fundamentalreihen heißen gleich*, wenn die zugehörige Reihe

$$a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots\ a_n - b_n,\ \ldots$$

eine Elementarreihe ist.

Darnach sind alle Elementarreihen gleich und niemals kann eine Elementarreihe einer Fundamentalreihe gleich sein, weil die aus beiden entstehende Reihe mit dem allgemeinen Gliede $a_\nu - b_\nu$ keine Elementarreihe sein kann.

*Jeder Fundamentalreihe ordne man eine durch sie zu definirende Größe zu*, d. h. man denke durch die Fundamentalreihe ein neues Ding gesetzt, und suche auf Grund von Definitionen den Vergleich desselben mit den rationalen Zahlengrößen zu bewerkstelligen.

Wir nennen dieses neue Object jetzt schon Größe und definiren hierauf:

> *Die gleichen Fundamentalreihen zugeordneten Größen heißen gleich.* Zu Fundamentalreihen, deren Glieder $a_\nu$ alle gleich $a$ sind, ordne man $a$ selbst zu.

Darnach gehört zu jeder Elementarreihe die Größe Null, denn die den Elementarreihen zugeordneten Größen sind einander gleich und der besonderen Elementarreihe $(0, 0, \ldots)$ ist die Null zuzuordnen.

Unter dem *absoluten Betrage* der der Fundamentalreihe $(a_1, a_2 \ldots)$ zugeordneten Gröſse versteht man die zu der neuen Fundamentalreihe $(|a_1|, |a_2|, \ldots)$ gehörige Gröſse.

Der absolute Betrag der einer Reihe $(a_1, a_2 \ldots)$ zugeordneten Gröſse $a$ heiſst *gröſser* oder *kleiner* als der absolute Betrag der einer zweiten Reihe $(b_1, b_2, \ldots)$ zugehörigen Gröſse $b$, jenachdem die Differenzen $|a_n| - |b_n|$ von einem bestimmten $n$ ab stets positiv oder negativ bleiben.

Läſst man in einer Fundamentalreihe $(a_1, a_2, \ldots)$ eine beliebige aber endliche Anzahl von Gliedern fort, so ist die der neuen Reihe

$$a_1', a_2', \ldots a_n' \ldots$$

zugeordnete Gröſse gleich der der ersten zugehörigen Gröſse, denn

$$a_1 - a_1', \quad a_2 - a_2', \ldots . a_n - a_n' \ldots$$

ist eine Elementarreihe.

Man kann jetzt sagen, daſs die einer Fundamentalreihe zugehörige Gröſse $a$ ist, wenn die Terme von einem bestimmten endlichen ab gleich $a$ sind.

Nach diesen Definitionen, durch welche der Begriff der neuen Gröſse fixirt ist, fragt es sich, ob und wie man für dieselben die arithmetischen Grundoperationen zu definiren hat, damit unsere früher gestellten Forderungen auch hier erfüllt werden.

Man definire die Rechnungsoperationen durch die Fundamentalreihen; und zwar verstehe man unter den Gröſsen

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b},$$

wo $a$ und $b$ die den Reihen $(a_1, a_2 \ldots)$ resp. $(b_1, b_2 \ldots)$ zugeordneten Gröſsen bedeuten, diejenigen, welche der Reihe nach zu den neuen Fundamentalreihen

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \quad (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots)$$
$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots), \quad \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\right)$$

gehören.

Dann haben die Gleichungen

$$a + b = c, \quad a - b = c, \quad ab = c, \quad \frac{a}{b} = c$$

die bestimmte Bedeutung: die Fundamentalreihen, zu welchen die Gröſsen auf beiden Seiten gehören, sind gleich.

Man beweist leicht die Giltigkeit der arithmetischen Grundgesetze und ebenso die Richtigkeit der aus den letzten Gleichungen entstehenden Beziehungen:

$$a = c - b, \quad a = c + b, \quad a = \frac{c}{b}, \quad a = bc.$$

Wenngleich wir bereits zu beurtheilen im Stande sind, ob eine rationale Zahlengröfse gleich, gröfser oder kleiner ist als die einer Fundamentalreihe $(a_1, a_2, \ldots)$ zugeordnete Gröfse, müssen wir das Verhalten der neuen Gröfsen zu den rationalen noch genauer untersuchen.

Wenn man zu einer unendlichen Menge rationaler Zahlengröfsen $a_1, a_2, \ldots$ eine rationale Zahlengröfse $\alpha$ so angeben kann, dafs der absolute Betrag $|\alpha - a_n|$ mit wachsendem $n$ kleiner wird als jede noch so kleine positive Gröfse $\delta$, dann heifst $\alpha$ *der limes oder die Grenze der Gröfsen* $a_\nu$.

Besitzen darnach die Glieder einer Fundamentalreihe eine rationale Grenze $\alpha$, so ist $\alpha$ die der Reihe zugeordnete Gröfse $a$, denn

$$\alpha - a_1, \alpha - a_2, \ldots$$

ist zufolge der Definition der Grenze eine Elementarreihe. Jetzt ist

$$\alpha - a = 0, \quad \alpha = a \quad \text{oder} \quad \lim_{\nu = \infty} a_\nu = a,$$

wenn die Grenze der Gröfsen $a_\nu$ bei wachsendem $\nu$ mit $\lim a_\nu$ bezeichnet wird, und $\infty$ das Zeichen dafür ist, dafs $\nu$ unbeschränkt in's Unendliche wachsen soll. —

Wir finden also, die Grenze $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ existirt und ist gleich $a$.

Um diesen Satz verallgemeinern zu können, schicken wir wieder eine Definition voraus.

Man sagt, die Glieder einer unendlichen Menge von Gröfsen

$$a_1, a_2, \ldots a_\nu \ldots,$$

die der Reihe nach den Fundamentalreihen

$$(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_m^{(n)} \ldots) \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

zugeordnet sein mögen, sinken mit wachsendem $\nu$ unter jeden angebbaren Werth herab, wenn zu einer beliebig kleinen von Null verschiedenen positiven Gröfse $\delta$ stets ein $\nu = m$ so bestimmt werden kann, dafs

$$|a_{n+\nu}|$$

für jedes $\nu$ kleiner wird als $\delta$, sobald $n \geqq m$ ist.

Hier kann die Gröfse $\delta$ eine rationale Gröfse sein, oder zu einer Fundamentalreihe $(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\mu \ldots)$ gehören. Die Fundamentalreihen zugeordneten Gröfsen umfassen die rationalen, und wenn dann die Gröfsenmenge $(a_1, a_2, \ldots)$ für alle rationalen $\delta$ die genannte Eigenschaft besitzt, besteht sie auch für Gröfsen $\delta$, welche den aus den rationalen Gröfsen $\delta_\mu$ gebildeten Fundamentalreihen zugeordnet sind. In der That: es gibt eine positive rationale Zahlengröfse $d$, die kleiner ist als die Gröfsen $\delta_{n+\nu}$, wenn nur $n$ hinlänglich grofs gewählt ist, denn die $\delta_\mu$ sinken nicht unter jeden Werth herab. Werden nun die Gröfsen $|a_{n+\nu}|$ und $|a_\mu^{(n+\nu)}|$ kleiner als $d$, so bleiben

$$d - |a_\mu^{(n+\nu)}| \quad \text{und} \quad \delta_\mu - |a_\mu^{(n+\nu)}|$$

gleichzeitig positiv, w. z. b. w.

Ist jetzt $\alpha$ die einer Fundamentalreihe zugeordnete Gröſse und sinken die absoluten Beträge der Gröſsenmenge

$$\alpha - a_1, \quad \alpha - a_2, \ldots \alpha - a_\nu \ldots$$

unter jede noch so kleine positive Gröſse $\delta$, so heiſst $\alpha$ wieder die Grenze der $a_\nu$.

*Daraus folgt, daſs* $\alpha$ *gerade die Grenze der Terme jener Reihe* $(a_1, a_2, \ldots a_\nu \ldots)$ *ist, welcher* $\alpha$ *zugehört*, denn

$$\alpha - a_1, \quad \alpha - a_2, \ldots \alpha - a_n \ldots$$

sinken für hinlänglich groſse $n$ unter jeden Werth $\delta$ herab. *Lim* $\underset{\nu=\infty}{}\alpha_\nu$ *existirt und ist gleich* $\alpha$. —

Bei einem Rückblick bemerken wir nun, daſs uns bei der Einführung der den Fundamentalreihen zugeordneten Gröſsen $a$ ganz dieselben Aufgaben begegnen wie bei den gebrochenen und negativen Gröſsen. In Folge neuer Aufforderungen werden neue Gröſsen definirt und deren Eigenschaften untersucht und endlich deren Rechnungsregeln ermittelt. Hier ist

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

die besondere Rechnungsregel, wie z. B. $(-1)(-1) = 1$ eine war.

In dem vorigen Paragraphen nahmen wir die aus einer unendlichen Menge endlicher rationaler Zahlengröſsen (unter denen keine unendlich oft vorkommt) zusammengesetzten Gröſsen auf, setzten aber fest, daſs sie nicht jede rationale Gröſse als Bestandtheil enthalten, dann konnten wir diese Gröſsen mit den rationalen und untereinander vergleichen, konnten für dieselben die Addition und Multiplication den Forderungen gemäſs definiren, und nachdem so — wie Georg Cantor sagt — „die neue Gröſse vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine bestimmte Realität in unserem Geiste erhalten“ hatte, lieſs sich dieselbe als Summe unendlich vieler Gröſsen in die Rechnung einführen, denn diese Summe war dadurch zu definiren, daſs man sie der neuen Gröſse gleich setzt.

*Die durch die Fundamentalreihen gewonnenen Zahlengröſsen sind keine anderen als die durch die Zusammensetzung unendlich vieler bestimmter rationaler Gröſsen definirten Gröſsen.*

Da nämlich in der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

kein Element $\frac{1}{m_\nu}$ unendlich oft vorkommen darf, so können die absoluten Beträge der Terme $a_n$ nicht beständig wachsen, sondern sie müssen von einem bestimmten ab beständig abnehmen. Es gibt also

unter den Gröfsen $|a_\nu|$ unendlich viele, die kleiner sind als eine beliebig kleine Gröfse $\delta$. — Weil ferner der absolute Betrag der Summe jeder beliebigen aber endlichen Anzahl von Gliedern kleiner bleiben mufs als eine angebbare Gröfse $g$, so kann man nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ stets eine ganze Zahl $n$ derart angeben, dafs der absolute Betrag

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+\mu}|$$

für jedes $\mu$ kleiner wird als $\delta$, sobald nur $m \geqq n$ ist.

Darum ist die Reihe der Gröfsen

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_2, \ldots \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$$

eine Fundamentalreihe und die derselben zugeordnete Gröfse $S$ ist gerade die Summe der Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

denn es gilt $S = \lim\limits_{n=\infty} S_n$, und $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ ist diejenige Gröfse, nach welcher $S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$ convergiren, d. h. die Summe der Reihe.

Es entsteht nun noch die Frage, ob mit Hilfe der rationalen und irrationalen Zahlengröfsen $a$ und $b$ auch andere Gröfsen zu definiren sind, indem man den Fundamentalreihen aus rationalen und irrationalen Gröfsen neue Gröfsen $c$ zuordnet und ob derselbe Fortgang fernerhin zu neuen Gröfsen führt oder nicht.

Man sieht leicht, dafs man einer Reihe

$$b_1, b_2, \ldots b_\nu \ldots$$

stets eine Fundamentalreihe aus rationalen Zahlengröfsen $a$ so zuordnen kann, dafs

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \ldots . \; b_\nu - a_\nu \ldots$$

eine Elementarreihe wird, darum ist die der ersten Reihe zugeordnete Gröfse $b$ gleich der zu der zweiten Reihe zugeordneten irrationalen Gröfse $a$; man erhält also keine neuen Gröfsen $c$.

Indefs aber das Gebiet der rationalen Gröfsen $a$ und das durch die Fundamentalreihen dieser definirte Gebiet von Gröfsen $b$ in derartiger Beziehung steht, dafs jedes $a$ unter den $b$ vorkommt und nicht jedes $b$ in dem Gebiete $a$ enthalten ist, wird nicht allein jedes $b$ unter den $c$, sondern auch jedes $c$ unter den $b$ vorkommen. —

Trotz dieser gegenseitigen Deckung der Zahlengebiete $b$ und $c$ spricht man von Zahlengröfsen $c$ *zweiter Ordnung* gegenüber den dem Gebiete angehörigen (rationalen und irrationalen) Gröfsen der ersten Ordnung, dann von Gröfsen dritter und $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn sie aus den Gröfsen der ersten zwei oder $(n-1)$ Gebiete gebildet sind, obgleich nirgends mehr neue Gröfsen durch Fundamentalreihen hervorgehen, die nicht in dem Gebiete $b$ enthalten wären. —

Diese Bemerkung werden wir später verwerthen. —

Jetzt gehen wir auf die Bestimmung der Zahlengröfse zurück, welche mit sich selbst multiplicirt eine positive rationale Zahlengröfse $a$ ergeben sollte, die wir mit $\sqrt{a}$ bezeichnen. Da das oben angedeutete Verfahren zu der Bestimmung von $x$ eine Folge von rationalen Gröfsen lieferte, welche die Eigenschaft von $x$ immer näher und näher erfüllte, die Folge aber eine Fundamentalreihe war, so ist $x$ die Grenze ihrer Glieder und eine rationale oder irrationale Zahlengröfse. Neben $x = \sqrt{a}$ hat die entgegengesetzte Zahlengröfse $-\sqrt{a}$ dieselbe Eigenschaft wie $\sqrt{a}$, d. h. es ist

$$(-\sqrt{a}) \cdot (-\sqrt{a}) = a.$$

Selbstverständlich existirt auch $x = \pm\sqrt{a}$, wenn $a$ eine irrationale positive Zahlengröfse ist.

Der Bestimmung der zweiten Wurzel aus einer positiven Zahlengröfse entnehmen wir die Bemerkung, dafs wir bei der Berechnung einer Gröfse von verlangter Eigenschaft die Aufmerksamkeit auf die Entdeckung eines Verfahrens zu richten haben, durch welches eine Gröfsenreihe bestimmt wird, welche eine Fundamentalreihe constituirt, deren Glieder die Eigenschaft der gesuchten Gröfse mit immer gröfserer Annäherung erfüllen.

Die Grenze der Fundamentalreihe ist die gesuchte Gröfse.

## § 8. Aus mehreren Haupteinheiten zusammengesetzte Gröfsen.

Mit der Bildung der rationalen und irrationalen Zahlengröfsen haben wir einen gewissen Abschlufs erreicht, indem die Wiederholung der vier Rechnungsarten der Addition, Multiplication und den inversen Operationen der Subtraction und Division mit den gefundenen Gröfsen keine neuen Zahlengröfsen erzeugt. (Die Producte unendlich vieler Factoren werden wir später betrachten.) Wir finden aber in vielen Aufgaben die Aufforderung zur Gründung neuer Zahlengröfsen, wenn sie in den bisherigen Gröfsen noch nicht lösbar sind, wie z. B. in der Aufgabe, $x$ unter der Bedingung $b - \left(\frac{a}{2}\right)^2 > 0$ so zu bestimmen, dafs die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ besteht.

Anstatt die Einführung neuer Gröfsen an eine besondere Aufgabe zu knüpfen und darnach zu zeigen, warum wir mit dem gewonnenen System von Gröfsen das Gebiet derjenigen Zahlengröfsen abzuschliefsen haben, welche unsere stets eingeführte Forderung erfüllen, dafs sich nämlich für die neuen Gröfsen die arithmetischen Grundoperationen den Verknüpfungsregeln ganzer Zahlen entsprechend definiren lassen, wollen wir die direct auf den Abschlufs gerichtete letzte denkbare Verallgemeinerung bei der Bildung neuer Gröfsen vornehmen, indem

wir auch noch aus mehreren Grundelementen und deren Bruchtheilen zusammengesetzte Gröfsen einführen.

Setzen wir in den aus der positiven und negativen Einheit und deren Bruchtheilen gebildeten Zahlengröfsen

$$\xi = \sum_{\nu} \frac{1}{m_\nu},$$

wo $m_\nu$ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, an Stelle des Grundelementes 1 das unbestimmte $e$, so sind die aus diesem Elemente gebildeten Zahlengröfsen der bisherigen Art durch

$$\xi e = \sum_{\nu} \frac{e}{m_\nu}$$

repräsentirt. Wir nennen sie Zahlengröfsen mit einem *Hauptelement* oder einer *Haupteinheit* $e$.

Indem wir Zahlengröfsen, die aus zwei entgegengesetzten Grundelementen $e$ und $e'$ und deren Theilen $e_n$ und $e'_n$ gebildet sind, stets so umformen können, dafs sie die genannte Gestalt erhalten, fragen wir, ob es aus mehreren Hauptelementen $e_1, e_2, \ldots e_n$ zusammengesetzte Gröfsen

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

gibt, für die sich die Grundoperationen so definiren lassen, dafs zugleich mit $a$ und $b$ auch $a + b$, $a - b$, $ab$, $\frac{a}{b}$ Gröfsen der Gesammtheit der aus denselben $n$ Hauptelementen gebildeten Gröfsen sind und dafs die für die Zahlengröfsen aus einer Haupteinheit bestehenden arithmetischen Gesetze ihre Giltigkeit behalten.

Aus den Gesetzen der Rechnungsoperationen ganzer Zahlen ist dann abzuleiten, wie sich das Rechnungsverfahren der neuen complexen Gröfsen gestaltet.

Zwei complexe Gröfsen

$$a = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu, \quad b = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu e_\nu,$$

wo die griechischen Buchstaben Zahlengröfsen aus einer Haupteinheit bezeichnen sollen, sind gleich, wenn sie dieselben Einheiten und deren gleiche Bruchtheile in gleicher Anzahl enthalten, wenn also die $n$ Gleichungen

$$\alpha_\nu = \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

bestehen.

Die in den Gleichungen

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = (a + c) + b, \quad (a - b) + b = a$$

ausgesprochenen Gesetze verlangen, dafs man die Summe $a + b$ und die Differenz $a - b$ durch die Formeln definirt:

$$a + b = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu + \beta_\nu) e_\nu, \quad a - b = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - \beta_\nu) e_\nu.$$

Es soll auch $ab$ eine aus den Einheiten $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ gebildete complexe Gröfse $c$ sein:

$$c = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e_\nu,$$

und zwar soll sie dadurch abgeleitet werden, dafs man die Gesetze der Multiplication ganzer Zahlen auf $a$ und $b$ anwendet.

Daraus folgt

$$ab = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} (a_\mu e_\mu)(b_\nu e_\nu) = \sum_\mu \sum_\nu (a_\mu b_\nu)(e_\mu e_\nu),$$

und indem das Product zweier Einheiten $e_\mu e_\nu$ ebenfalls eine complexe Gröfse der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\mu,\nu} e_\lambda$$

sein soll, ergibt sich

$$ab = \sum_{\mu,\nu,\lambda} (a_\mu b_\nu \overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\mu\nu}) e_\lambda,$$

wo unter $\sum\limits_{\mu,\nu,\lambda}$ das Zeichen $\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \sum\limits_\lambda$, also eine dreifache Summe zu verstehen ist.

Da die Gleichungen

$$e_\mu e_\nu = e_\nu e_\mu, \quad (e_\mu e_\nu) e_\lambda = (e_\mu e_\lambda) e_\nu \quad (\mu, \nu, \lambda = 1, 2 \ldots n)$$

bestehen, sind die Gröfsen $\overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\mu\nu}$ an Bedingungsgleichungen gebunden, und zwar führen die ersten Gleichungen zu den Bedingungen

$$\overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\mu,\nu} = \overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\nu,\mu},$$

die zweiten auf die Gleichungen

$$\sum \overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\mu\nu} \overset{(\lambda')}{\varepsilon}_{\mu'\lambda'} = \sum \overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\nu'\nu} \overset{(\lambda')}{\varepsilon}_{\mu'\mu}.$$

Im Falle $n=2$ lauten diese Gleichungen mit Rücksicht auf die ersten:

$$\varepsilon_{11}^{(2)} \varepsilon_{22}^{(1)} - \varepsilon_{12}^{(2)} \varepsilon_{12}^{(1)} = 0$$

$$\varepsilon_{12}^{(2)} \left(\varepsilon_{11}^{(1)} - \varepsilon_{12}^{(2)}\right) - \varepsilon_{11}^{(2)} \left(\varepsilon_{12}^{(1)} - \varepsilon_{22}^{(2)}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)} \left(\varepsilon_{11}^{(1)} - \varepsilon_{12}^{(2)}\right) - \varepsilon_{12}^{(1)} \left(\varepsilon_{12}^{(1)} - \varepsilon_{22}^{(2)}\right) = 0.$$

Den angegebenen Bedingungsgleichungen kann man aber bei jedem $n \geqq 2$ noch durch unendlich viele Werthsysteme für $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ genügen.

In dem Falle $n = 2$ setze man nur

$$\varepsilon_{11}^{(1)} - \varepsilon_{12}^{(2)} = \pi\sigma \qquad \varepsilon_{12}^{(1)} - \varepsilon_{22}^{(2)} = \pi'\sigma$$
$$\varepsilon_{12}^{(1)} = \pi\varrho \qquad \varepsilon_{22}^{(1)} = \pi'\varrho$$
$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \pi\tau \qquad \varepsilon_{12}^{(2)} = \pi'\tau,$$

dann folgt:

$$e_1 e_1 = (\pi\sigma + \pi'\tau) e_1 + \pi\tau e_2$$
$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = \pi\varrho e_1 + \pi'\tau e_2$$
$$e_2 e_2 = \pi'\varrho e_1 + (\pi\varrho - \pi'\sigma) e_2$$

und hier kann man $\pi$, $\pi'$, $\sigma$, $\varrho$, $\tau$ irgend welche Werthe beilegen, nur dürfen $\pi$ und $\pi'$ nicht gleichzeitig Null sein, sonst wären alle Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ und die Producte $e_\mu e_\nu$ und $ab$ Null.

Wenn man aber *ein* Werthesystem fixirt, dann ist auch das Product $ab$ unzweideutig definirt, d. h. es ist ein Multiplicationsverfahren festgesetzt und zwar so, dafs die Multiplicationsgesetze

$$ab = ba, \quad (ab)c = (ac)b, \quad (a + b)c = ac + bc$$

gelten.

Soll endlich noch $a$ durch $b$ dividirt werden, so hat man eine Gröfse

$$c = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e_\nu$$

dadurch zu bilden, dafs man $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ aus der Gleichung $cb = a$ oder den $n$ äquivalenten Gleichungen:

$$\gamma_1 \sum_\mu \varepsilon_{\mu 1}^{(\lambda)} \beta_\mu + \gamma_2 \sum_\mu \varepsilon_{\mu 2}^{(\lambda)} \beta_\mu + \cdots + \gamma_n \sum_\mu \varepsilon_{\mu n}^{(\lambda)} \beta_\mu = \alpha_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

bestimmt, in denen die Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ nur mit den früheren Bedingungsgleichungen verträgliche Werthe annehmen.

Die Behandlung eines Systems linearer Gleichungen setzen wir hier als bekannt voraus, da die Lösung solcher Gleichungen, d. h. die Bestimmung der zu suchenden Gröfsen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ ohne weitere Definitionen ausführbar ist. —

Hat die Determinante $\varDelta$ des Gleichungssystems einen von Null verschiedenen Werth, so lassen sich die Gröfsen $\gamma_\nu$ eindeutig bestimmen, und die Division ist möglich.

Ist hingegen $\varDelta = 0$, so ist die Division nur ausführbar, wenn die $n$ Gleichungen derart zusammenhängen, dafs sie auf $(n - 1)$ zurückkommen, d. h. wenn zwischen den Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ eine bestimmte Beziehung besteht. Doch dann gibt es unendlich viele Werthe für die Gröfsen $\gamma_\nu$ und der Quotient $\frac{a}{b}$ hat unendlich viele Werthe.

Um diesen Fall auszuschliefsen, müssen wir festsetzen, dafs die Determinante $\varDelta$ nicht für beliebige Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ (oder identisch) verschwindet. Doch wenn selbst die Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ solche

Werthe haben, dafs $\varDelta$ nicht für ein beliebiges Werthesystem $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$ Null wird, kann es trotzdem specielle Werthesysteme und specielle Gröfsen $b$ geben, für die $\varDelta$ verschwindet. Wählt man aber die Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ allen genannten Bedingungen gemäfs, setzt $a = 0$ oder $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ und bestimmt hierauf die Gröfsen $\beta_1$, $\beta_2, \ldots \beta_n$, derart, dafs $\varDelta = 0$ ist, so kann man für die Gröfsen $\gamma_\nu$ unendlich viele Werthe angeben, welche den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Bigl(\gamma_\nu \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} \beta_\mu\Bigr) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

genügen, und zu jedem Werthesystem gehört dann eine Gröfse $c$ der Beschaffenheit, dafs das Product unseres speciellen $b$ und $c$ Null ist, ohne dafs ein Factor verschwindet.

Deshalb heifst eine solche specielle Gröfse $b$ ein *Theiler der Null.*

In der Theorie der Zahlengröfsen aus einer Haupteinheit konnte man nur der Null unendlich viele Gröfsen $\gamma$ gleicher Art zuordnen, so dafs

$$0 . \gamma = 0$$

ist, es war also nur die Null ein Theiler der Null, oder ein Product konnte nicht verschwinden, wenn nicht einer der Factoren Null war.

Will man diesen Satz in der Theorie der aus mehreren Haupteinheiten zusammengesetzten Gröfsen erhalten sehen, so mufs man offenbar den Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\nu)}$ noch derartige Beschränkungen auferlegen, dafs $\varDelta$ nur für $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ verschwindet. Wir thun dies in dem Falle zweier Einheiten $e_1$ und $e_2$. — Da lauten die Bestimmungsgleichungen für die Gröfsen $\gamma_1$ und $\gamma_2$ mit Rücksicht auf die bei der Multiplication eingeführten Bedingungen für die Gröfsen $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 [(\pi\sigma + \pi'\tau)\beta_1 + \pi\varrho\beta_2] + \gamma_2 [\pi\varrho\beta_1 + \pi'\varrho\beta_2] &= \alpha_1 \\ \gamma_1 [\pi\tau\beta_1 + \pi'\tau\beta_2] + \gamma_2 [\pi'\tau\beta_1 + (\pi\varrho - \pi'\sigma)\beta_2] &= \alpha_2 . \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems wird

$$\varDelta = (\tau\pi'^2 + \sigma\pi\pi' - \varrho\pi^2) \cdot [\tau\beta_1^2 - \sigma\beta_1\beta_2 - \varrho\beta_2^2]$$

und die Auflösungen heifsen:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\varDelta}\Bigl\{[\pi'\tau\beta_1 + (\pi\varrho - \pi'\sigma)\,\beta_2]\,\alpha_1 - [\pi\varrho\beta_1 + \pi'\varrho\beta_2]\,\alpha_2\Bigr\}$$

$$\gamma_2 = \frac{-1}{\varDelta}\Bigl\{[\pi\tau\beta_1 + \pi'\tau\beta_2]\,\alpha_1 - [(\pi\sigma + \pi'\tau)\,\beta_1 + \pi\varrho\beta_2]\,\alpha_2\Bigr\} .$$

Da nun $\varDelta$ nicht identisch oder für jedes beliebige Werthepaar $(\beta_1, \beta_2)$ Null sein soll, darf der von $\beta_1$ und $\beta_2$ freie Factor

$$\delta = \tau\pi'^2 + \sigma\pi\pi' - \varrho\pi^2$$

nicht verschwinden. Mit dieser Bedingung ist das identische Verschwinden unserer Determinante ausgeschlossen, denn offenbar kann

der zweite Factor von $\varDelta$ nur dann für jedes Werthepaar $(\beta_1, \beta_2)$ Null sein, wenn $\tau$, $\sigma$ und $\varrho$ gleichzeitig Null gesetzt werden, und dann ist ja auch $\delta = 0$. Immerhin kann man aber $\beta_1$ und $\beta_2$ noch so wählen, daſs

$$\tau\beta_1^2 - \sigma\beta_1\beta_2 - \varrho\beta_2^2$$

und somit $\varDelta$ Null wird. Dazu hat man nur den Quotienten $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ entsprechend der Gleichung

$$\tau\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 - \sigma\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) - \varrho = 0$$

zu bestimmen. Eine solche Gleichung läſst aber für $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ keine Lösungen in Zahlengröſsen aus einer Haupteinheit zu, sobald $\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \varrho\tau$ negativ ist. Setzen wir demnach fest, daſs $\sigma$, $\varrho$, $\tau$ gerade die Bedingung

$$-\left(\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \varrho\tau\right) > 0$$

erfülle, womit bestimmt wird, daſs weder $\varrho$ noch $\tau$ verschwindet und die eine dieser Gröſsen positiv ist, wenn die andere negativ ist, und endlich $\delta$ nicht verschwindet, so bleibt als einziges Werthepaar, für welches die Determinante $\varDelta$ Null wird, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ übrig.

Entsprechend den nach diesen Bedingungen noch möglichen Werthesystemen für die Gröſsen $\pi$, $\pi'$, $\varrho$, $\sigma$, $\tau$ erhält man zu jedem einmal fixirten System eine bestimmte Definition von $ab$ und $\frac{a}{b}$, so daſs die Multiplicationsgesetze, ferner das Gesetz $\frac{a}{b} \cdot b = a$ gilt und endlich auch der Satz besteht: ein Product ist nur dann Null, wenn einer der Factoren verschwindet.

Es handelt sich nunmehr darum, durch besondere Wahl der noch willkürlichen Gröſsen ein möglichst einfaches Multiplications- und Divisionsverfahren complexer Gröſsen kennen zu lernen. Zu diesem Zwecke führen wir als eine Haupteinheit diejenige Gröſse $g_0$ ein, welche die Eigenschaft hat, daſs für jeden Werth von $b$

$$g_0 b = b g_0 = b$$

ist. Es gibt eine solche Gröſse $g_0$, denn ist $b$ eine Gröſse derart, daſs $\varDelta \gtrless 0$ ist, so wird $\frac{b}{b}$ eine Gröſse $g_0$, mit der multiplicirt jede andere Gröſse unverändert bleibt. Sie hat aber auch für jeden Werth von $b$ denselben Werth, denn $\frac{b}{b}$ und $\frac{b'}{b'}$ sind gleich, weil diese Gröſsen mit $b$ multiplicirt $b$ unverändert lassen.

Ist ferner

$$g = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

irgend eine andere Gröſse, für die $\varDelta$ auch nicht verschwindet, und sind $\xi_1$ und $\xi_2$ so gewählt, daſs man aus den Gleichungen

$$g = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

und

$$g \cdot g = g^2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$$

$e_1$ und $e_2$ in bestimmter Weise entnehmen kann:

$$e_1 = \varepsilon_1^{(1)} g + \varepsilon_1^{(2)} g^2$$
$$e_2 = \varepsilon_2^{(1)} g + \varepsilon_2^{(2)} g^2$$

und bildet man

$$g^3 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2$$

oder nach Substitution von $e_1$ und $e_2$ die Gleichung

$$g^3 + \varepsilon_1 g^2 + \varepsilon_2 g = 0,$$

die bei der Division durch $g$ die Form erhält:

$$g^2 + \varepsilon_1 g + \varepsilon_2 g_0 = 0,$$

so ergibt sich für die aus den Einheiten $e_1$ und $e_2$ zusammengesetzten Gröfsen, welche wir jetzt in der Form

$$\xi_0 g_0 + \xi_1 g$$

schreiben, das in der Gleichung

$$a.b = (\alpha_0 g_0 + \alpha_1 g)(\beta_0 g_0 + \beta_1 g) = \alpha_0 \beta_0 g_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) g + \alpha_1 \beta_1 g^2$$
$$= (\alpha_0 \beta_0 - \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_2) g_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 - \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1) g$$

ausgesprochene Multiplicationsverfahren.

Die Gröfse $g_0$ finden wir dadurch, dafs wir in den allgemeinen Ausdrücken für $\gamma_1$ und $\gamma_2$

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2$$

setzen. Es wird

$$\gamma_1 = \frac{\pi'}{\delta}, \quad \gamma_2 = -\frac{\pi}{\delta}$$

und

$$g_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \frac{1}{\delta}(\pi' e_1 - \pi e_2).$$

Um auch $g$ passend zu wählen, beachten wir, dafs zwischen den Haupteinheiten $e_1$ und $e_2$ die folgende mit Hilfe der Ausdrücke für $e_1 e_1$, $e_1 e_2$, $e_2 e_2$ leicht zu verificirende Gleichung

$$\varrho^2 e_1 e_1 - \varrho \sigma e_1 e_2 - \varrho \tau e_2 e_2 = 0$$

besteht. Setzt man hier $\varrho e_1 = g e_2$, so folgt

$$e_2^2 (g^2 - \sigma g - \varrho \tau) = 0.$$

Suchen wir die in

$$g = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

vorkommenden Gröfsen $\xi_1$, $\xi_2$, indem wir den Quotienten $\frac{\varrho e_1}{e_2}$ bilden, also in den allgemeinen Ausdrücken für $\gamma_1$ und $\gamma_2$

$$\alpha_1 = \varrho, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1$$

setzen, so wird

$$g = \frac{\pi' \sigma - \pi \varrho}{\delta} e_1 + \frac{\pi \tau}{\delta} e_2.$$

und jetzt ist leicht ersichtlich zu machen, dafs nicht $e_2 = 0$, sondern

$$g^2 - \sigma g - \varrho \tau g_0 = 0$$

ist.

An Stelle von $g_0$ und $g$ setzen wir noch andere Haupteinheiten $e$ und $i$, zwischen denen die einfachere Gleichung

$$i_2^2 + e_2^2 = 0$$

stattfindet.

Bildet man aus der Gleichung zwischen $g$ und $g_0$ die folgenden:

$$g^2 - \sigma g g_0 - \varrho \tau g_0^2 = 0, \quad \left(g - \frac{\sigma}{2} g_0\right)^2 - g_0^2\left(\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \varrho\tau\right) = 0,$$

bezeichnet die positive Gröfse $-\left(\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \varrho\tau\right)$ mit $k^2$, so stehen die Gröfsen

$$i = \frac{1}{k}\left(g - \frac{\sigma}{2} g_0\right) \quad \text{und} \quad e = g_0$$

in der verlangten Beziehung — und ebenso $e = g_0$ und

$$i = -\frac{1}{k}\left(g - \frac{\sigma}{2} g_0\right).$$

Weil $e = g_0$ eine Gröfse ist, mit der multiplicirt jede Gröfse ungeändert bleibt, setzen wir $e = 1$ und finden

$i^0 = 1, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4\mu+\nu} = i^\nu. \quad (\nu = 0, 1, 2, 3.)$

Unter $i$ selbst kann man die positive oder negative zweite Wurzel aus $-1$ verstehen. Kommen wir überein, $\sqrt{-1}$ mit $i$ zu bezeichnen, so ist das früher genannte Multiplicationsverfahren für die aus den besonderen Einheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ zusammengesetzten Gröfsen der Form

$$\xi_1 + \xi_2 i$$

in der Gleichung:

$$ab = (\alpha_1 + \alpha_2 i)(\beta_1 + \beta_2 i) = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) i$$

und das Divisionsverfahren in der Gleichung

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 i}{\beta_1 + \beta_2 i} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\, i$$

ausgesprochen.

Die Gröfsen $a = \alpha_1 + \alpha_2 i$ nennt man im engeren Sinne *complexe Zahlengrössen*, 1 und $i$ sind ihre Haupteinheiten, $-1$ und $-i$ die entgegengesetzten (negativen) Hauptelemente. Die aus der Einheit 1 und deren Bruchtheilen gebildeten Zahlengröfsen $\alpha$ heifsen *reell,* 1 die reelle Einheit, und die aus diesen entstehenden Gröfsen $\alpha i$ *imaginär* und $i$ die imaginäre Einheit. Darnach hat die complexe Gröfse $a = \alpha_1 + \alpha_2 i$ einen reellen und einen imaginären Theil.

Diese Zahlengröfsen werden wir in die Rechnung aufnehmen, denn sie erfüllen alle gestellten Forderungen. Man mufs aber jetzt fragen, ob man nicht auch Gröfsen, die aus mehr als zwei Hauptein-

heiten zusammengesetzt sind, unseren Forderungen entsprechend construiren kann. Diese Frage ist entschieden zu verneinen, wenn man die Theiler der Null aufser der Null selbst nicht zuläfst, indem die aus einer Haupteinheit gebildeten Gröfsen $\varepsilon_{\mu,\nu}^{(\lambda)}$ nicht derart zu beschränken sind, dafs die nicht identisch verschwindende Determinante $\varDelta$ nur für das Werthesystem

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0 \quad (n > 2)$$

den Werth Null annimmt.

Von dem Nachweis dieser Behauptung müssen wir hier absehen, da uns die nöthigen Hilfsmittel fehlen, und ebensowenig können wir an dieser Stelle auf die Untersuchungen des Herrn Weierstrafs eingehen, die zu dem Resultate führen, dafs selbst die Gesammtheit der aus $n$ Haupteinheiten zusammengesetzten Gröfsen nicht mehr bietet als das oben definirte Gebiet von Gröfsen mit den Haupteinheiten $e_1$ und $e_2$ oder $g_0$ und $g$ oder 1 und $i$, wenn man darin die Theiler der Null in naturgemäfser Verallgemeinerung des Falles, dafs für $n = 1$ und $n = 2$ Null ein Theiler der Null ist, zuläfst, indem nämlich statt der ursprünglichen $n$ Haupteinheiten $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ $n$ andere $(e_1', e_2', \ldots e_n')$ eingeführt werden können derart, dafs das Gebiet von Gröfsen

$$\xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \cdots + \xi_n e_n'$$

in Theilgebiete mit einer oder zwei Einheiten zerfällt, in denen das Multiplications- und Divisionsverfahren nach denjenigen Regeln gestaltet ist, welche für die Gröfsen $\alpha$ respective $\alpha_1 + \alpha_2 i$ aufgestellt wurden, wonach es dann „überflüssig“ erscheint, eine Arithmetik complexer Gröfsen mit mehr als zwei Haupteinheiten zu begründen.

Damit ist der Aufbau des Systems von Zahlengröfsen beendet, welche wir in der Rechnung benützen werden. Ob unsere Gröfsen aber ausreichen werden, d. h. ob jeder durch die Elementaroperationen definirte Zusammenhang zwischen gegebenen Gröfsen unserer Art und zu suchenden Gröfsen durch Gröfsen aus unserem Gebiete zu lösen sein wird, mufs die fernere Untersuchung lehren. Wir können nicht wissen, ob gewisse Aufgaben nicht Gröfsen erfordern werden, die auf anderer Basis als auf Grund der Permanenz der arithmetischen Gesetze aufgebaut sind, denn es ist z. B. erlaubt, Gröfsen einzuführen, welche nicht allen Rechnungsgesetzen ganzer Zahlen gehorchen (wie die Quaternionen) und andererseits besteht noch die Möglichkeit, dafs es neben der Addition, Multiplication, Subtraction und Division weitere Elementaroperationen gibt. Man kann nicht beweisen, dafs es keine anderen mehr gibt, und darum sind die Untersuchungen über die Zahlengröfsen nur insoweit abgeschlossen, als sie auf die nun genugsam hervorgehobenen Anforderungen gegründet sind.

## § 9. Graphische Darstellung der Zahlengröfsen.

Wenn wir zu dem Begriff der Zahl nur durch Betrachtung realer Objecte mit gemeinsamen Merkmalen gelangen konnten, liegt es nun nahe zu fragen, ob wir nicht von den rationalen und irrationalen und den complexen Zahlengröfsen ein Abbild schaffen können, an dem uns das formale Denken zuversichtlich erleichtert wird, da unser Denken ohnehin in letzter Instanz an Dinge der Sinnenwelt anknüpft und auf Erfahrungen über Vorgänge an Dingen der Sinnenwelt gestützt ist.

Auf einer geraden Linie lassen sich die Punkte dadurch begrifflich fixiren, dafs man nach Annahme einer Mafseinheit ihre Entfernungen von einem festen Punkte $O$ der geraden Linie in dieser Mafseinheit angibt. Diesem Punkte $O$ ordnen wir die Zahl Null zu und fassen ihn als „*Träger*“ der Null auf. Tragen wir von $O$ aus die bestimmte Strecke, welche als Mafseinheit fixirt ist, ein, zwei, $n$ mal auf den beiden Theilen der geraden Linie auf, so sollen die Endpunkte dieser Vielfachen der Mafseinheit Träger der Zahlen $+1, +2, \ldots +n \ldots$ resp. $-1, -2, \ldots -n \ldots$ sein, je nachdem wir uns in dem vorher fixirt gedachten positiven oder negativen Theile der Linie befinden. Die gleich grofsen Strecken zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten, die die Träger von $+a$ oder $-a$ und $\pm(a+1)$ sind, theile man in $n$ gleiche Theile und fasse den $m$ten Theilungspunkt, den man bei dem Fortschreiten von dem $O$ näher liegenden Punkte erreicht, als Träger von

$$\pm\left(a+\frac{m}{n}\right)$$

auf. — So wird die Entfernung durch eine rationale Zahlengröfse fixirt, wenn sie in rationalem Verhältnis zur Mafseinheit steht; wenn aber dieses Verhältnis irrational ist, wird man eine unendliche Anzahl rationaler Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ so angeben können, dafs die den Summen

$$a_1, \quad a_1+a_2, \ldots a_1+a_2+\cdots+a_n, \ldots \tag{$\alpha$}$$

zugehörigen Punkte dem durch eine Zahlengröfse zu fixirenden Punkte mit wachsendem $n$ beliebig nahe kommen, und man sagt: Die Entfernung des Punktes ist $a$, wenn $a$ die der unendlichen Reihe $(a_1+a_2+\cdots)$ oder wenn $a$ die der Fundamentalreihe $(\alpha)$ zugehörige Zahlengröfse ist.

Nach diesen Festsetzungen leuchtet ein, dafs zwei Entfernungen gleich oder verschieden sind, wenn die dieselben fixirenden Zahlengröfsen gleich oder verschieden sind.

So dienen die reellen Zahlengröfsen zur Bestimmung der Lage eines Punktes, und da umgekehrt jeder Zahlengröfse ein bestimmter Punkt der geraden Linie zuzuordnen ist (ein Satz, den Cantor mit

vollem Recht als Axiom bezeichnet), so haben die reellen Zahlengröfsen in der That ein Abbild auf der geraden Linie.

Es fällt nun auch nicht schwer, ein Abbild der complexen Zahlengröfsen zu schaffen.

Legen wir durch einen festen Punkt $O$ zwei einander senkrecht schneidende gerade Linien, die eine etwa horizontal, dann liegt jeder Punkt der durch die beiden Linien bestimmten Ebene auf einer oder keiner der Geraden oder Axen, nur $O$ liegt auf beiden.

Die Punkte der Axen fixiren wir in der früheren Weise durch die Entfernungen von $O$ und zwar mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem der Punkt der horizontalen Axe rechts oder links von $O$, und der der verticalen Axe ober- oder unterhalb der horizontalen Axe liegt.

Ein Punkt $A$ der genannten Ebene, der aufserhalb der Axen liegt, ist fixirt, wenn man seine senkrechten Abstände von den Axen oder die gleichgrofsen Entfernungen der Fufspunkte $P_1$ und $P_2$ der von dem Punkte $A$ auf die Axen gefällten Lothe von $O$ kennt, oder wenn man die Länge des von $A$ auf die horizontale Axe gefällten Lothes und die Entfernung des zugehörigen Fufspunktes $P_1$ von $O$ angeben kann. Diese Entfernung heifst die Abscisse und jenes Loth die Ordinate des Punktes $A$. Die Abscisse ist positiv, wenn $A$ rechts von der verticalen Axe liegt, und negativ im entgegengesetzten Falle. Die Ordinate wird positiv oder negativ genannt, je nachdem $A$ ober- oder unterhalb der horizontalen Axe gelegen ist.

Jeder Punkt der Ebene ist nach diesen Festsetzungen durch seine Coordinaten, die Abscisse und Ordinate bestimmt; zu einem Paar von Zahlengröfsen, von denen die erste die Abscisse, die zweite die Ordinate ausdrücken soll, gehört aber auch ein bestimmter Punkt. Wenn wir darum in der complexen Zahlengröfse $a_1 + a_2 i$ die reelle Zahlengröfse $a_1$ als Abscisse und die zweite reelle Zahlengröfse $a_2$ als Ordinate eines Punktes ansehen, so gehört zu jeder Zahlengröfse $a_1 + a_2 i$ ein bestimmter Punkt und umgekehrt zu jedem Punkt auch eine Zahlengröfse.

Die reellen Zahlengröfsen finden ihre Träger auf der horizontalen, die rein imaginären auf der verticalen Axe, insbesondere sind die den vier Zahlengröfsen $1$, $-1$, $i$, $-i$ zugehörigen Punkte die in der Entfernung Eins auf dem positiven resp. negativen Theile der *„Axe der reellen oder rein imaginären Zahlengröfsen“* befindlichen Punkte.

Die Entfernung des der Zahlengröfse $a_1 + a_2 i = a$ zugehörigen Punktes $A$ von dem Anfangspunkte der Coordinaten d. i. dem Punkte $O$ ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze durch den positiven Werth der zweiten Wurzel aus der Summe der zweiten Potenzen $a_1^2$ und $a_2^2$ gemessen. Man nennt diese Gröfse

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

den *absoluten Betrag* von $a$ und bezeichnet diesen wie früher mit

$$|a| \quad \text{oder} \quad |\alpha_1 + \alpha_2 i|.$$

Diese Definition des absoluten Betrages stimmt mit der früheren überein, wenn $\alpha_2 = 0$ und $a$ eine reelle Gröſse wird.

Die Betrachtung der gegenseitigen Lage der den Gröſsen

$$0, \quad a, \quad b, \quad a+b$$

zugehörigen Punkte

$$O, \quad A, \quad B, \quad C$$

lehrt, daſs die Entfernungen

$$OA, \quad OB, \quad AC, \quad OC$$

durch die Gröſsen

$$|a|, \quad |b|, \quad |b|, \quad |a+b|$$

gemessen werden, und weil eine Seite eines Dreiecks nicht gröſser sein kann als die Summe und nicht kleiner ist als die Differenz der beiden andern, so folgen die Ungleichungen

$$\big||a| - |b|\big| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Da ferner der absolute Betrag der Differenz zweier Gröſsen $a$ und $b$ durch die Entfernung der Träger derselben repräsentirt ist — wornach die der Bedingung $|x - \alpha| = r$ genügenden Zahlengröſsen $x$ in den Punkten eines Kreises um $a$ mit dem Radius $r$ ihre Träger besitzen — ist die Entfernung der Punkte $A$ und $B$ durch $|a - b|$ gemessen und auf Grund des oben genannten Satzes entstehen die Ungleichungen:

$$|a| + |b| \geqq |a - b| \geqq \big||a| - |b|\big|.$$

Wir beweisen die in den aufgestellten Ungleichungen ausgesprochenen Sätze in zweiter Linie durch Vergleich der absoluten Beträge von $|a+b|$ und $|a-b|$ mit den Gröſsen $|a| + |b|$ und $|a| - |b|$, weil wir die bei dem Beweise verwendeten geometrischen Beziehungen gewiſs durch arithmetische Relationen ersetzen können und auch ersetzen müssen, wenn wir den Beweis als arithmetisch bindend erkennen wollen.

Es sei

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 i, \quad b = \beta_1 + \beta_2 i,$$

dann ist

$$a + b = \alpha_1 + \beta_1 + i(\alpha_2 + \beta_2),$$

$$|a + b| . |a + b| = |a + b|^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2$$
$$= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)$$

und

$$\big[|a| + |b|\big]^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Da aber

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 \geqq 0$$

und somit

$$2\,\alpha_1\beta_1\,\alpha_2\beta_2 \leqq \alpha_1{}^2\beta_2{}^2 + \alpha_2{}^2\beta_1{}^2$$

ist, wird

$$4\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 \leqq 4\,(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)\,(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2),$$

$$2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \leqq 2\sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2}\,.\,\sqrt{\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2}$$

und endlich

$$|a + b|^2 \leqq \big[|a| + |b|\big]^2$$

oder

$$|a + b| \leqq |a| + |b|,$$

d. h. *der absolute Betrag einer Summe ist nicht gröſser als die Summe der absoluten Beträge der Summanden.**)

Mit Hilfe derselben Schlüsse folgt ferner, daſs der absolute Betrag einer Summe nicht kleiner ist als der absolute Betrag der Differenz der absoluten Beträge der Summanden, daſs ferner der absolute Betrag einer Differenz nicht kleiner ist als der absolute Betrag der Differenz des absoluten Betrages von Minuend und Subtrahend, aber auch nicht gröſser als die Summe der absoluten Beträge von Minuend und Subtrahend.

*Der absolute Betrag eines Productes ist gleich dem Producte der absoluten Beträge der Factoren.*

Indem

$$ab = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,i$$

ist, wird

$$|ab| = \sqrt{(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2} = \sqrt{(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)\,(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)}$$

und diese Gröſse ist wirklich $|a|.|b|$.

*Der absolute Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der absoluten Beträge des Dividends und Divisors.*

Da der Quotient

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2}{\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2}\,i$$

ist, wird

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\frac{(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2}{(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2}{\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2}}$$

und jetzt ist der Satz bewiesen; denn die Wurzel aus einem Quotienten ist gleich dem Quotienten der Wurzel aus Dividend und Divisor.

---

*) Der bei diesem Beweise benützte Satz: Die zweite Wurzel aus einem Producte ist gleich dem Product der Wurzeln aus den Factoren, folgt aus der Definition der Wurzel $\sqrt{m.n}$ als derjenigen Gröſse, welche mit sich selbst multiplicirt $mn$ gibt und der Definition des Productes zweier Gröſsen $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$.

## § 10. Summen unendlich vieler complexer Gröſsen.

Die Summen unendlich vieler rationaler Zahlengröſsen sind bereits untersucht, es bleibt uns noch übrig, die Summen unendlich vieler complexer Zahlengröſsen

$$a_\nu = \alpha_\nu' + \alpha_\nu'' i \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

zu betrachten.

Wir wissen bereits, was man unter einer solchen Summe zu verstehen und wann sie eine Bedeutung für uns hat, denn die früheren Definitionen sagen ja aus, daſs die Summe diejenige Gröſse ist, deren reeller und imaginärer Theil

$$(\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \cdots) \quad \text{resp.} \quad (\alpha_1'' + \alpha_2'' + \alpha_3'' + \cdots)i$$

ist und es müssen die Summen

$$\sum_\nu \alpha_\nu' \quad \text{und} \quad \sum_\nu \alpha_\nu''$$

für sich endlich sein, damit $\sum_\nu a_\nu$ endlich ist. — Gibt es unter den Gröſsen $\alpha'$ positive und negative ($\beta'$ und $\gamma'$), ebenso unter den Gröſsen $\alpha''$ entgegengesetzt bezeichnete $\beta''$ und $\gamma''$, so müssen die Summen

$$\sum \beta_\nu', \quad \sum \beta_\nu'', \quad -\sum \gamma_\nu', \quad -\sum \gamma_\nu''$$

lauter endliche positive Gröſsen sein.

Hier handelt es sich darum, neue Kriterien für das Endlichsein einer Summe unendlich vieler complexer Gröſsen aufzustellen. Wir setzen voraus, daſs die Summen

$$\sum_\nu |\alpha_\nu'| = \sum_\nu \beta_\nu' + \sum_\nu (-\gamma_\nu')$$

$$\sum_\nu |\alpha_\nu''| = \sum_\nu \beta_\nu'' + \sum_\nu (-\gamma_\nu'')$$

endlich sind, dann ist

$$|\alpha_\nu'| + |\alpha_\nu''| \geqq \sqrt{\alpha_\nu'^2 + \alpha_\nu''^2} = |\alpha_\nu|$$

und man sieht, daſs die Summe der absoluten Beträge einer unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

nothwendig endlich sein muſs, wenn die Reihe eine endliche Summe haben soll.

Hat umgekehrt die Reihe $\sum_\nu |a_\nu|$ eine endliche Summe, so sind wegen der Ungleichungen

$$|a_\nu| = \sqrt{\alpha_\nu'^2 + \alpha_\nu''^2} \geqq |\alpha_\nu'|$$

$$|a_\nu| = \sqrt{\alpha_\nu'^2 + \alpha_\nu''^2} \geqq |\alpha_\nu''|$$

die Summen der Reihen $\sum|\alpha'_\nu|$, $\sum|\alpha''_\nu|$ und $\sum\alpha_\nu$ endlich. Wir haben also den Satz:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Summe unendlich vieler complexer Gröfsen endlich ist, besteht in dem Endlichsein der Summe der absoluten Beträge dieser Gröfsen.*

Ferner erkennt man als eine nothwendige und hinreichende Bedingung für das Endlichsein der Summe der unendlichen Reihe die folgende:

*Es mufs der absolute Betrag der Summe von beliebig aber nicht unendlich vielen willkürlich gewählten Gliedern der Reihe kleiner bleiben als eine endliche positive Gröfse $g$.*

Angenommen die Summe der unendlich vielen Gröfsen $a_\nu$ sei endlich, dann ist auch die Summe der Reihe $\sum\limits_\nu|a_\nu|$ endlich und darum existirt eine positive endliche Gröfse $g$, die gröfser ist als die Summe irgend einer endlichen Anzahl von Gliedern $|a_\nu|$. Ist aber für irgend einen Werth von $n$

$$g > \sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|,$$

so wird umsomehr

$$g > \Big|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\Big|$$

und die genannte Bedingung ergibt sich als nothwendig. Sie ist aber auch hinreichend, denn aus der Voraussetzung

$$g > \Big|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\Big|$$

folgt jetzt

$$g > \sum_{\nu=1}^{n}\beta'_\nu, \quad g \geqq \sum_{\nu=1}^{n}(-\gamma'_\nu), \quad g > \sum_{\nu=1}^{n}\beta''_\nu, \quad g > \sum_{\nu=1}^{n}(-\gamma''_\nu).$$

In der That nehmen wir diejenigen Gröfsen $a_\nu$ aus der Summe $\sum a_\nu$ heraus, in welchen z. B. der reelle Theil positiv ist, und nennen wir sie $\beta'_\nu + \alpha''_\nu i$, so wird

$$g > \Big|\sum_{\nu=1}^{n}\beta'_\nu + i\sum_{\nu=1}^{n}\alpha''_\nu\Big| \geqq \sum_{\nu=1}^{n}\beta'_\nu$$

usw.

Ein weiteres Theorem ist das nachstehende:

*Haben die unendlich vielen Zahlengröfsen*

$$a_\nu = \alpha'_\nu + \alpha''_\nu i \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

*eine unendliche Summe $S$, so kann man nach Wahl einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$ stets ein $n$ finden derart, dafs der absolute Betrag von*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+\mu} = \sum_{\nu=m+1}^{m+\mu} a_\nu$$

*für jedes $\mu$ kleiner wird als $\delta$, sobald nur $m \geqq n$ ist.*

Da diese Behauptung für die Reihe der absoluten Beträge

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu| + \cdots$$

zutrifft und die Summe von absoluten Beträgen $|a_\nu|$ nicht kleiner ist als der absolute Betrag der Summe der Gröfsen $a_\nu$, so ist das Theorem richtig.

Die Summen $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ *convergiren* nach der endlichen Gröfse $S$, denn es ist

$$|S - S_n| < \delta \quad (n \geqq m)$$

und darum sagt man: *die unendliche Reihe $\sum_\nu a_\nu$ convergirt.*

Wie die Rechnungsoperationen mit Reihen complexer Gröfsen ausgeführt werden, bedarf keiner Erläuterung mehr.

Die in Rede stehenden Reihen, in welchen die Reihen der positiven und negativen Glieder $\sum \alpha'_\nu$ und $\sum \alpha''_\nu$ für sich endliche Summen haben, nennt man *unbedingt convergent*, womit angezeigt sein soll, dafs die Convergenz nach $S$ unabhängig von der Anordnung der Terme $a_\nu$ eintritt. Nun sprechen wir den ersten der obigen Sätze folgendermafsen aus:

> Convergirt eine Reihe unendlich vieler complexer Gröfsen unbedingt, so convergirt auch die Reihe der absoluten Beträge der Gröfsen, und umgekehrt mufs eine Reihe unbedingt convergent sein, wenn die Reihe der absoluten Beträge — oder wie man sagt — wenn die Reihe *absolut* convergirt.

Reihen, deren Summe $S$ von der Anordnung ihrer Glieder abhängig ist, heifsen *bedingt convergent*, und Reihen, deren Summe bei jeder Anordnung der Terme unendlich sind, *divergent.* Die bedingt convergenten Reihen nehmen wir nicht in die Rechnung auf, da ihnen der Charakter von Summen abgeht.

## § 11. Producte unendlich vieler Factoren.*)

In diesem Capitel haben wir noch das Product unendlich vieler Zahlengröfsen $c_\nu$ zu definiren. Den früheren Betrachtungen gemäfs mufs die Definition derart gewählt werden, dafs das *unendliche Product* den Fall eines endlichen Productes $c_1 c_2 \ldots c_n$ umfafst und für

*) Siehe Weierstrafs in Crelle's Journal Bd. 51, Pincherle l. c. und Mittag-Leffler in Acta mathematica Bd. 4.

dasselbe die Multiplicationsgesetze gelten. Ferner darf es nicht unendlich sein, wenn die durch Multiplication bestimmter Gröfsen $c_1$, $c_2$, $c_3 \ldots$ begrifflich festgestellte Gröfse für uns eine Bedeutung haben soll.

Bringt man die Gröfsen $c_\nu$ auf die Form $1 + a_\nu$, bildet dann

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1 + a_1 \\
P_2 &= (1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \\
P_3 &= (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \\
&= 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 + a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n &= (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \\
&= 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1 a_n + a_2 a_n + \cdots \\
&\qquad + a_1 a_2 \cdots a_n,
\end{aligned}
$$

so läfst sich $P_n$ als Summe der folgenden $(n + 1)$ Gröfsen $g_\nu$ darstellen:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= 1 \\
g_1 &= a_1 \\
g_2 &= a_2 + a_1 a_2 = (1 + a_1) a_2 \\
g_3 &= a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 = (1 + a_1)(1 + a_2) a_3 \\
g_4 &= a_4 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_1 a_2 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 \\
&= (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) a_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_n &= a_n + a_1 a_n + a_2 a_n + a_1 a_2 a_n + a_3 a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\
&= (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_{n-1}) a_n.
\end{aligned}
$$

*Das Product der unendlich vielen Factoren $c_\nu = 1 + a_\nu$ wird jetzt als Summe der unendlich vielen Summanden $g_\nu$ definirt*, deren Bildungsgesetz die obigen Gleichungen klar erkennen lassen.

Diese Definition ist erlaubt, weil das Product einer endlichen Anzahl von Gröfsen mit eingeschlossen ist.

Wir fragen, wann das unendliche Product

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_\nu) \cdots,$$

welches mit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + a_\nu)$$

bezeichnet wird, endlich ist.

Offenbar dann, wenn ein Factor $(1 + a_\nu)$ Null ist. Wir denken aber diese Factoren abgesondert und untersuchen das Product unendlich vieler nicht verschwindender Factoren.

Soll ein solches Product unabhängig von der Anordnung der

Factoren endlich sein und das ist ja oben verlangt worden, so mufs die unendliche Reihe

$$g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_\nu + \cdots$$

unbedingt convergiren; dann aber convergirt diese Reihe nothwendig absolut.

Bezeichnet man den absoluten Betrag von $a_\nu$ hier mit $\alpha_\nu$ und setzt

$$\gamma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_1 \alpha_\nu + \alpha_2 \alpha_\nu + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_\nu + \alpha_3 \alpha_\nu + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu,$$

so wird $\gamma_\nu \geq |g_\nu|$, und setzt man voraus, dafs die Reihe positiver Gröfsen

$$1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu + \cdots$$

convergirt, so convergirt die Reihe der $g_\nu$ absolut. Damit aber von einer endlichen Summe der Reihe $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots$ die Rede sein kann, mufs nothwendig die Reihe der absoluten Beträge der Gröfsen $a_\nu$ endlich sein, enthält ja doch $\gamma_\nu$ die Gröfse $|a_\nu| = \alpha_\nu$, und diese Bedingung ist offenbar auch für die unbedingte Convergenz der Reihe der $g$ nothwendig.

Wir nehmen also an, dafs die Reihe

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots \tag{A}$$

eine endliche Summe $S$ besitze, und setzen fest, dafs $S$ kleiner sei als Eins. Andernfalls kann man durch Absonderung einer blos endlichen Anzahl von Gliedern $\alpha_\mu$ eine Reihe bilden, in welcher diese Forderung erfüllt ist, und in dem von der Anordnung der Factoren unabhängigen unendlichen Producte kann man die den Gliedern $\alpha_\mu$ entsprechenden Factoren $(1 + a_\mu)$ abtrennen, deren Product für sich endlich ist. Es bleibt dann ein unendliches Product zur Untersuchung übrig, dessen zugeordnete Reihe (A) eine endliche Summe $S < 1$ besitzt. Die positiven Gröfsen $\alpha_\nu$ sind jetzt kleiner als Eins, folglich wird

$$1 + \alpha_\nu < \frac{1}{1 - \alpha_\nu}$$

und

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \ldots (1 - \alpha_n)}.$$

Doch weil auch

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_n) > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

wird das Product

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}$$

und umsomehr

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{1 - S}.$$

Nun ist das unendliche Product $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 + a_\nu)$ endlich, wenn die unendliche Reihe

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_\nu + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu)$$

convergirt; da aber die Summe der ersten $n+1$ Glieder

$$1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)$$

kleiner ist als die endliche Zahlengröfse $\frac{1}{1-S}$, was auch $n$ sei, so ist das unendliche Product $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$, welches durch die Summe der unendlichen Reihen $1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ definirt ist, und umsomehr der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \quad \text{oder} \quad \prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$$

endlich.

Wir erhalten somit den Satz: *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs nie ein von der Anordnung der Factoren unabhängiges Product* $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ *endlich ist, besteht in der Convergenz der unendlichen Reihe*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu| + \cdots$$

Man sagt, die Producte $P_1, P_2, \ldots P_n$ *convergiren* nach einem bestimmten Werthe $P$, wenn nach Wahl einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$ stets ein $n$ so bestimmt werden kann, dafs für jedes $\nu \geqq n$

$$|P - P_\nu| < \delta.$$

Darnach behaupten wir, dafs in dem von der Anordnung der Factoren unabhängigen Producte $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$, welches mit $P$ bezeichnet sei, die Producte

$$P_n = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$$

mit wachsendem $n$ nach dem unendlichen Producte $P$ convergiren.

Bildet man den absoluten Betrag des Quotienten $\frac{P}{P_n}$, d. i.

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots|$$

und bezeichnet

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty}(1+a_\nu) = (1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\ldots$$

mit $1+\varepsilon_n$, wo

$$|\varepsilon_n| < \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \cdots,$$

so wird

$$\left|\frac{P}{P_n}\right| \leqq 1 + |\varepsilon_n| < (1+\alpha_{n+1})(1+\alpha_{n+2})\cdots$$

Nennt man die Summe der Gröfsen

$$\alpha_{n+1},\quad \alpha_{n+2},\ \ldots\ \alpha_{n+\nu},\ \ldots$$

$S_n$, so wird für hinlänglich grofse $n$ $S_n$ kleiner als 1 und kleiner als eine beliebig kleine vorgelegte Gröfse. Dann ist

$$1+|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{1-S_n}$$

und

$$\left|\frac{P}{P_n}\right| \leqq \frac{1}{1-S_n}.$$

Bringt man endlich $\frac{1}{1-S_n}$ auf die Form $1+\varepsilon$, wo $\varepsilon$ beliebig klein ist, und setzt

$$\varepsilon\,|P_n| = \delta,$$

so wird

$$\left|\frac{P}{P_n}\right| - 1 \leqq \left|\frac{P}{P_n} - 1\right| < \frac{\delta}{|P_n|}$$

oder

$$|P - P_n| < \delta,$$

und der Beweis ist erbracht.

Man sagt wieder, *das unendliche Product* $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ *convergirt*, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$ stets eine solche ganze Zahl $n$ angebbar ist, dafs der absolute Betrag

$$\left|\prod_{\nu=m}^{\infty}(1+a_\nu) - 1\right|$$

oder dafs für jeden Werth von $\mu$ der Betrag

$$\left|\prod_{\nu=m}^{m+\mu}(1+a_\nu) - 1\right|$$

kleiner ist als $\delta$, sobald nur $m \geqq n$ ist. *Die endliche Gröfse, nach welcher die Producte $P_n$ convergiren, ist der Werth der unendlichen Productes.*

Ein unendliches Product heifst *absolut convergent*, wenn auch noch $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$ convergirt. In diesem Falle ist wegen der Ungleichung

$$(1+\alpha_{m+1})(1+\alpha_{m+2})\cdots(1+\alpha_{m+\mu}) - 1 > \alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\cdots+\alpha_{m+\mu}$$

die unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \cdots$$

absolut convergent.

Sind die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ alle kleiner als Eins und hat ihre Summe einen endlichen Werth, so ist nicht allein $\prod(1+\alpha_\nu)$, son-

dern auch das beständig abnehmende Product $\prod(1-\alpha_\nu)$ convergent ohne Null zu werden, denn es ist

$$\frac{P_{m+\mu}}{P_m} = \prod_{\nu=m+1}^{m+\mu}(1-\alpha_\nu) > 1-(\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\cdots+\alpha_{m+\mu})$$

und wenn $m$ so grofs gewählt ist, dafs die Summe in den Klammern kleiner ist als $\delta$, wird

$$P_{m+\mu} > P_m(1-\delta).$$

Zeigt man umgekehrt in einem besonderen Falle zunächst die Convergenz der Producte $P_n$ nach einer von Null verschiedenen Gröfse, so folgt, dafs die Reihe der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine endliche Summe besitzt. Die Convergenz von $\prod(1-\alpha_\nu)$ zieht nämlich diejenige von $\prod(1+\alpha_\nu)$ nach sich, indem

$$\begin{aligned} 1-\delta &< (1-\alpha_{m+1})(1-\alpha_{m+2})\cdots(1-\alpha_{m+\mu}) \\ &\leqq (1-\alpha_{m+1}^2)(1-\alpha_{m+2}^2)\cdots(1-\alpha_{m+\mu}^2) \leqq 1 \end{aligned}$$

und somit

$$1 \leqq (1+\alpha_{m+1})(1+\alpha_{m+2})\cdots(1+\alpha_{m+\mu}) \leqq \frac{1}{1-\delta}$$

wird, wo die rechte Seite bei hinlänglich grofsen $m$ und beliebig kleinen $\delta$ von 1 um beliebig wenig abweicht. Z. B. das Product

$$\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)$$

ist convergent, denn die Producte

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right) &= \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{3.4\ldots(n+1)}{2.3\ldots n} \\ &= \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

convergiren mit wachsendem $n$ nach $\frac{1}{2}$, und darum ist auch die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

und umsomehr

$$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}+\cdots \quad (m>2)$$

endlich.

Bei der Auswerthung eines absolut convergenten Productes kann man die Factoren beliebig in Gruppen zusammenfassen, und andererseits läfst sich das Product $\prod(1+\alpha_\nu)$ in ein convergentes unendliches Product verwandeln, dessen Factoren selbst unendliche Producte sind.

Es sei etwa

$$1 + b_1 = (1 + a_1)(1 + a_1')\ldots$$
$$1 + b_2 = (1 + a_2)(1 + a_2')\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo die Gröſsen $a_1$, $a_1'\ldots$, $a_2$, $a_2'\ldots$ Gröſsen $a_\nu$ sind, dann wird

$$b_1 = a_1 + a_1' + a_1 a_1' + \cdots$$
$$b_2 = a_2 + a_2' + a_2 a_2' + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und man sieht, daſs die das Product $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1 + b_\nu)$ definirende Summe keine anderen Glieder enthält als die Summe, durch welche das Product $\prod(1 + a_\nu)$ bestimmt ist. Doch diese endlichen Summen sind von der Anordnung der Summanden unabhängig und einander gleich.

Mit Producten der hier betrachteten Art rechnet man wie mit den früheren Zahlengröſsen.

Um z. B. das Product

$$\prod(1 + a_\nu) = P \quad \text{und} \quad \prod(1 + b_\nu) = Q$$

zu bilden, hat man das Product

$$\prod(1 + a_\nu)(1 + b_\nu) = \prod(1 + a_\nu + b_\nu + a_\nu b_\nu)$$

zusammenzusetzen. Es ist endlich und hat den Werth $PQ$, denn erstens ist

$$\sum|a_\nu + b_\nu + a_\nu b_\nu| \leqq \sum\Big\{|a_\nu| + |b_\nu| + |a_\nu b_\nu|\Big\}$$

mit $\sum|a_\nu|$ und $\sum|b_\nu|$ endlich und zweitens gibt der Vergleich der das neue Product definirenden Summe mit dem Producte der Reihen

$$\sum g_\nu = 1 + a_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty}(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_{\nu-1})a_\nu$$

$$\sum h_\nu = 1 + b_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty}(1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_{\nu-1})b_\nu\,,$$

daſs die zweite Behauptung richtig ist.

*Enthält das endliche Product* $\prod(1 + a_\nu) = P$ *keinen verschwindenden Factor, so ist das Product* $\prod\left(\frac{1}{1 + a_\nu}\right)$ *ebenfalls endlich und besitzt den Werth* $\frac{1}{P}$.

Setzt man

$$\prod\left(\frac{1}{1 + a_\nu}\right) = \prod\left(1 - \frac{a_\nu}{1 + a_\nu}\right)$$

und zeigt, daſs

$$\sum\left|\frac{a_\nu}{1+a_\nu}\right|$$

zugleich mit $\sum|a_\nu|$ endlich ist, so hat das neue Product gewifs einen endlichen Werth, und zwar folgt aus

$$\prod(1+a_\nu)\cdot\prod\left(\frac{1}{1-a_\nu}\right)=\prod(1+a_\nu)\,\frac{1}{1+a_\nu}=1$$

$$\prod\left(\frac{1}{1+a_\nu}\right)=\frac{1}{P}\,.$$

Die genannte Summe ist wirklich endlich, denn bezeichnet $\alpha$ einen positiven Werth, der kleiner ist als jeder der von Null verschiedenen Werthe $|1+a_\nu|$, so gilt die Ungleichung

$$\sum\left|\frac{a_\nu}{1+a_\nu}\right|<\frac{1}{\alpha}\sum|a_\nu|\,,$$

in der die rechte Seite kleiner ist als eine noch angebbare Gröfse $g$.

Man kann an diesen Satz die Bemerkung knüpfen: *Ein absolut convergentes Product* $\prod(1+a_\nu)$ *kann nicht verschwinden, wenn nicht einer der Factoren* $(1+a_\nu)$ *Null ist.* —

Der Quotient zweier endlichen Producte

$$\prod(1+a_\nu),\quad\prod(1+b_\nu)$$

mit den Werthen $P$ und $Q$, deren zweites keinen verschwindenden Factor hat, ist

$$\prod\left(\frac{1+a_\nu}{1+b_\nu}\right)$$

und hat den Werth $\frac{P}{Q}$, denn es ist

$$\prod\left(\frac{1+a_\nu}{1+b_\nu}\right)=\prod(1+a_\nu)\cdot\prod\left(\frac{1}{1+b_\nu}\right)=\frac{P}{Q}\,.$$

Wenn die einem Producte $\prod(1+a_\nu)$ zugeordnete Reihe

$$a_1+a_2+\cdots+a_\nu+\cdots$$

nur bedingt convergirt, kann man die früheren Schlüsse über die Convergenz des Productes nicht mehr ziehen. Das Product kann wohl mit der Reihe zugleich endlich sein, aber nicht bei jeder Factorenfolge, es ist nur bedingt convergent.

Z. B. ist das Product

$$\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+(-1)^\nu\,\frac{1}{\nu}\right)$$

bedingt convergent, denn die Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2\nu-1}+\frac{1}{2\nu}-\cdots$$

convergirt nur bei bestimmter Summationsfolge. Indefs

$$\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}\right)+\cdots$$

oder

$$-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(2\nu-1)2\nu}+\cdots$$

convergirt und mithin

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\left(1-\frac{2}{5.6}\right)\cdots$$

endlich ist, wird

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\nu}+\cdots$$

und

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\nu-1}+\cdots$$

unendlich, und von den Producten

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right) \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right)$$

divergirt das erste nach Unendlich, das zweite nach Null, ohne daſs ein Factor verschwindet.

Die von der Anordnung der Factoren abhängigen unendlichen Producte haben nicht den Charakter der Producte, darum führen wir sie ebensowenig wie die bedingt convergenten unendlichen Reihen in die Rechnung ein.

# Zweites Capitel.

## I. Abschnitt.

## Veränderliche Gröfsen, Gröfsenmengen.

### § 12. Definition der algebraischen rationalen ganzen und gebrochenen Ausdrücke.

Mit den in dem vorigen Capitel gewonnenen Zahlengröfsen haben wir zu operiren.

Ist eine endliche Anzahl reeller oder complexer Zahlengröfsen $a_1, a_2 \dots a_n$ vorgelegt und verknüpft man dieselben eine endliche Anzahl Male durch die vier Rechnungsoperationen, wobei die Division der Beschränkung unterliegt, dafs der Divisor nicht Null sein darf, so erhält man Ausdrücke, deren Untersuchung den Gegenstand der *Algebra* bildet. Schliefsen wir die Division zunächst ganz aus, so liefert die Anwendung der drei übrigen Elementaroperationen Ausdrücke der Form:

$$A_1 a_1^{m_1^{(1)}} a_2^{m_2^{(1)}} \dots a_n^{m_n^{(1)}} + A_2 a_1^{m_1^{(2)}} a_2^{m_2^{(2)}} \dots a_n^{m_n^{(2)}} + \dots$$
$$+ A_k a_1^{m_1^{(k)}} a_2^{m_2^{(k)}} \dots a_n^{m_n^{(k)}},$$

wo einige der (positiven) ganzen Zahlen $m_1^{(\varkappa)} \dots m_n^{(\varkappa)}$ auch den Werth Null haben können, in welchem Falle $a_\nu^0 = 1$ zu setzen ist, und wo die positiven und negativen ganzzahligen Gröfsen $A_\varkappa$ *Coefficienten* genannt werden.

Solche *„algebraische, rationale und ganze“* Ausdrücke haben offenbar die Eigenschaft, untereinander durch die ersten drei Rechnungsarten verbunden, wieder Ausdrücke derselben Art zu geben.

Wendet man bei der Verknüpfung der Elemente $a_\nu$ auch die Division an, so entstehen Quotienten ganzer Ausdrücke. Indem man ferner die durch Addition, Multiplication und Subtraction verbundenen Quotienten auf gemeinsame Nenner bringt, wird der allgemeinste *algebraische, rationale und gebrochene* Ausdruck unter der Form des Quotienten zweier ganzen Ausdrücke erscheinen.

Bei der Bildung genannter Ausdrücke wollen wir festsetzen, dafs einige Elemente $a_\nu$ einmal fixirte Werthe unveränderlich beibehalten, andere Elemente nach und nach andere Werthe aus unserem Gröfsen-

system annehmen. Die ersteren Gröfsen heifsen *unveränderliche* oder *constante*, die letzteren *veränderliche* oder *variable*.

Der algebraische Ausdruck ändert seinen Werth, wenn man den Variabeln verschiedene Werthe beilegt. Diese Abhängigkeit des Werthes eines Ausdruckes von den Werthen der Variabeln spricht man dadurch aus, dafs man den Ausdruck eine *Function der Variabeln* nennt und zwar eine algebraische rationale ganze oder gebrochene Function, je nachdem die variabeln Gröfsen bei der Division nicht in Verwendung kamen oder aber auch bei dieser Rechnungsoperation zugelassen wurden.

Die algebraische rationale ganze Function ist eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form:

$$A_{\nu_1,\, \nu_2 \, \ldots \, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m},$$

wo die constanten Coefficienten $A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}$ beliebige Zahlengröfsen und die $x_1, x_2 \ldots x_m$ die Variabeln bedeuten.

Zwei Glieder der ganzen Function, in welchen die Exponenten der Variabeln der Reihe nach übereinstimmen, kann man zu einem Gliede vereinigen. Sind die Exponenten einmal alle gleich Null, so hat die ganze Function ein von den Variabeln freies, constantes Glied $A_{0,\,0 \ldots 0}$. Kann der Exponent $\nu_\mu$ $(\mu = 1, 2 \, . \, . \, m)$ alle Werthe von 0 bis $m_\mu$ durchlaufen, so schreibt man die ganze Function in Form der $m$fachen Summe:

$$\sum_{\nu_1=0}^{m_1} \sum_{\nu_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{m_m} A_{\nu_1,\, \nu_2 \ldots \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m},$$

oder einfacher:

$$\sum_{\nu_1,\, \nu_2 \, \ldots \, \nu_m = 0}^{m_1,\, m_2 \, . \, . \, m_m} A_{\nu_1,\, \nu_2 \, . \, . \, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m},$$

und hierin können einige der Coefficienten $A_{\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_n'}$ wieder Null sein. Die algebraische rationale gebrochene Function ist der Quotient solcher Summen.

## § 13. Unbeschränkt veränderliche Gröfsen.

Bevor wir an die Untersuchung der eingeführten Functionen gehen können, müssen wir eine Reihe von Definitionen vorausschicken.

Wir sagten, eine Gröfse heifst veränderlich, wenn sie verschiedene Werthe annehmen kann. Diese Veränderlichkeit ist ganz unbestimmt, und im Allgemeinen wird eine solche Gröfse nicht zu verwerthen sein. Wir führen darum die *unbeschränkt veränderliche Gröfse* ein und verstehen darunter eine Gröfse, die jeden Werth unseres Gröfsen- oder Zahlensystems annehmen kann und auch gröfser werden darf, als jede vorgegebene Gröfse.

Eine solche Variable $x$ hat folgende Eigenschaft:

Ist $x_0$ ein bestimmter endlicher Werth und $r$ eine gegebene positive (reelle) Gröſse, so gehört die Gesammtheit von Zahlengröſsen $x$, für welche der absolute Betrag $|x - x_0|$ kleiner ist als $r$, ebenfalls zu den Werthen der Variabeln.

Wird eine Variable als eine Gröſse $x$ definirt, welche alle Werthe annimmt, für die $|x - x_0|$ kleiner ist als eine beliebig kleine positive Gröſse $\delta$, — wo $x_0$ einen ersten Werth bezeichnet — so nennt man sie *stetig veränderlich.* Die unbeschränkt variable Gröſse ist also stetig veränderlich.

Die Gesammtheit der Werthe $x$, welche die Bedingung

$$|x - x_0| < r$$

erfüllen, bezeichnet man als *Umgebung von* $x_0$. Der Ursprung dieser Bezeichnung ist durch die geometrische Repräsentation der Variabelnwerthe erklärt. Die Träger dieser Werthe sind die Punkte der *Zahlenebene*, der Träger des Werthes $x_0$ ist ein bestimmter *Punkt* oder eine *Stelle*, und die der genannten Bedingung unterworfenen $x$ Werthe liegen innerhalb des um die Stelle $x_0$ mit dem Radius $x$ beschriebenen Kreises. Nach der Gröſse $r$ heiſst die *Umgebung* von $x_0$ diejenige *mit dem Radius r,* oder die Umgebung $r$ der Stelle $x_0$.

Es seien $n$ von einander unabhängige unbeschränkt veränderliche Gröſsen $x_1, x_2 \dots x_n$ vorgelegt.

Ein specielles Werthesystem $(a_1, a_2 \dots a_n)$ oder, wie wir kürzer anzeigen wollen, ein Werthesystem $(a)$ heiſse eine Stelle oder ein Punkt aus der Gesammtheit der Werthesysteme $(x)$.

Die Gesammtheit derjenigen Werthesysteme $(x)$, welche die Bedingungen

$$|x_1 - a_1| < \delta, \quad |x_2 - a_2| < \delta, \quad \dots |x_n - a_n| < \delta$$

erfüllen, heiſse die Umgebung $\delta$ der Stelle $(a)$; allgemeiner definirt man durch die Gesammtheit der den verschiedenen Bedingungen

$$|x_1 - a_1| < \delta_1, \quad |x_2 - a_2| < \delta_2 \dots |x_n - a_n| < \delta_n$$

genügenden Werthesysteme die Umgebung $(\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n)$ oder $(\delta)$ der Stelle $(a)$.

Sind die Variabeln wiederum so definirt, daſs die Gesammtheit der den Ungleichungen $|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu$ $(\nu = 1, 2 \dots n)$ mit beliebig kleinen Gröſsen $\delta_\nu$ genügenden Werthesystemen auch den Variabelwerthen angehören, so heiſsen sie stetig veränderlich.

Wir sagen: Die Gesammtheit der reellen Werthe, welche eine unbeschränkte Variable annehmen kann, constituirt eine einfach unendliche Mannichfaltigkeit oder eine Mannichfaltigkeit einer Dimension.

Die Gesammtheit der reellen Werthesysteme, die $n$ von einander unabhängige, unbeschränkt veränderliche Gröſsen $x_1, x_2 \dots x_n$ an-

nehmen können, bildet eine $n$fach unendliche Mannichfaltigkeit oder eine Mannichfaltigkeit $n^{\text{ter}}$ Dimension.

Die Gesammtheit der $n$ unbeschränkt veränderlichen Gröſsen

$$x_\nu = \xi_\nu + i\eta_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

wo $\xi_\nu$ und $\eta_\nu$ reelle Werthe bedeuten oder unbeschränkt reelle Variabeln sind, constituirt eine Mannichfaltigkeit von $2n$ Dimensionen und ein specielles Werthesystem $(a_\nu)$ ist eine Stelle oder ein Punkt dieser Mannichfaltigkeit. —

Wir denken nun in der zweifach unendlichen Mannichfaltigkeit eine unendliche Menge $(A)$ von einander verschiedener *endlicher* Punkte gegeben, die durch eine bestimmte Regel oder eine gemeinsame Definition charakterisirt seien, wie z. B. dadurch, daſs in $x = \xi + i\eta$ die Coördinaten $\xi$ und $\eta$ rationale Zahlengröſsen sein sollen.

Hierauf definiren wir: *eine* (wenn auch noch so kleine) *Umgebung* $r$ *einer Stelle* $x_0$ der Gesammtheit von Werthen $x$ *gehört der Punktmenge* $(A)$ *an*, wenn nebst $x_0$ jede Stelle dieser Umgebung ein Punkt der Menge ist.

Gibt es keinen Punkt $x_0$ unter den gegebenen, dem eine der Menge $(A)$ angehörige Umgebung zuzuordnen ist, so heiſst die Punktmenge *discret*.

Angenommen, daſs eine solche Stelle $x_0$ existirt, so kann man eine der Bedingung $|x - x_0| < r$ genügende Stelle $x_1$ herausnehmen, für die sich offenbar wieder eine der Menge $(A)$ angehörige Umgebung $r_1$ finden läſst. Fährt man so fort, sucht stets die Umgebung $r_\nu$ einer Stelle $x_\nu$, die der der Menge $(A)$ angehörigen Umgebung $r_{\nu-1}$ von $x_{\nu-1}$ entnommen ist, so constituirt die Gesammtheit von Punkten, zu denen man auf diese Weise gelangen kann, in der zweifach unendlichen Mannichfaltigkeit von $x$ Werthen oder in der $x$-Ebene, wo die Variable gedeutet wird, eine Menge $(A_1)$ von Stellen, die wir einen *Bereich* nennen. Durch die beschriebene Vermittlung einer endlichen Anzahl von Stellen kann man von jeder Stelle $x_0$ des Bereiches $(A_1)$ zu jeder anderen $x'$ gelangen, ja noch mehr, man kann sogar eine endliche Anzahl von Stellen $x_\nu$ aus $(A)$ zwischen $x_0$ und $x'$ so einschalten, daſs die Entfernungen

$$|x_1 - x_0|, \quad |x_2 - x_0| \ldots\ldots |x' - x_n|$$

kleiner bleiben als eine beliebig kleine Gröſse $\delta$, und die Umgebungen der Stellen $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ mit dem Halbmesser $\delta$ der Punktmenge $(A)$ angehören.

Man sagt, die Stellen $x_1, x_2 \ldots x_n$ vermitteln einen *zusammenhängenden Übergang* oder einen *continuirlichen Weg* von $x_0$ nach $x'$. Ein Bereich $(A_1)$, zwischen dessen Stellen continuirliche Wege zu

legen sind, heiſst ein aus einem zweifach ausgedehnten Stücke bestehendes, zusammenhängendes *Continuum*, oder Continuum kurzweg.*)

Ist $x'$ eine Stelle aus $(A)$, der man eine dem Continuum $(A_1)$ angehörige Umgebung zuordnen kann, so liegt $x'$ *innerhalb* $(A_1)$ und $(A_1)$ *enthält* $x'$.

Gibt es unter den Stellen einer noch so kleinen Umgebung von $x'$ solche, die $(A_1)$ angehören und andere, die $(A_1)$ nicht angehören, so liegt $x'$ *auf der Begrenzung des Bereiches* $(A_1)$.

*Eine Stelle* $x''$ *liegt endlich auſserhalb* $(A_1)$, wenn man ihr eine wenn auch noch so kleine Umgebung zuordnen kann, welche keine dem Bereiche $(A_1)$ angehörige Stellen umfaſst. Die dem Continuum $(A_1)$ angehörigen Umgebungen einer Stelle, die innerhalb $(A_1)$ liegen, können bis an eine Stelle der Begrenzung hinanreichen, aber niemals eine solche Stelle enthalten.**)

Das Continuum $(A_1)$ ist durch einzelne Stellen, durch eine oder mehrere Linien oder durch Punkte und Linien begrenzt.

Die Linie ist (hier etwas umständlich) als die Gesammtheit einer unendlichen Punktmenge $(B)$ der Beschaffenheit aufzufassen, daſs in jeder (selbst beliebig kleinen) Umgebung jeder Stelle von $(B)$ unendlich viele andere Stellen dieser Menge, und noch Stellen $(x'')$ und $(x')$ liegen, die sich auſserhalb resp. innerhalb des Continuums $(A_1)$ befinden.

Die eine Linie definirende Punktmenge bildet kein zweifach ausgedehntes Continuum mehr, aber nothwendig lassen sich wieder zwischen irgend zwei Stellen $\xi_0$ und $\xi_0'$ von $(B)$ nach Annahme einer beliebig kleinen Gröſse $\varepsilon$ eine endliche Anzahl neuer Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\nu$, welche der Menge $(B)$ angehören, den Bedingungen

$$|\xi_1 - \xi_0| < \varepsilon, \ldots |\xi_\nu - \xi'| < \varepsilon$$

gemäſs einschalten. Darum heiſst die Punktmenge $(B)$ *zusammenhängend* und andererseits einfach unendlich oder einfach ausgedehnt, weil sie in der zweidimensionalen Mannichfaltigkeit kein Continuum bildet.

Es ist möglich, daſs unter den Stellen der ursprünglich gegebenen Punktmenge $(A)$ solche existiren, die zwar auſserhalb $(A_1)$ liegen, denen aber eine der Menge $(A)$ angehörige Umgebung zuzuordnen ist. Dann gibt es mindestens ein zweites Continuum $(A_2)$, dessen Begrenzung theilweise mit der des ersten Continuums zusammenfallen kann. So kann man nach und nach alle Continua aus $(A)$ herausnehmen.

Die Gesammtheit der Werthe einer stetig veränderlichen Gröſse $x$ constituirt gewiſs ein Continuum. Indem sich die früheren Betrach-

*) Weierstraſs, Abhandl. aus der Functionenlehre S. 71.

**) Mittag-Leffler, Acta math. Bd. 4.

tungen auf den Fall unendlicher Punktmengen $(A)$ in der $2n$-dimensionalen Mannichfaltigkeit ausdehnen lassen, gilt die letzte Behauptung auch für die Gesammtheit der Werthesysteme von $n$ stetigen Veränderlichen. Die der Linie entsprechende Begrenzung des $2n$fach ausgedehnten Continuums wird aus einer $(2n-1)$fach unendlichen Punktmenge zusammengesetzt sein und ferner werden die Begrenzungen durch $(2n-\nu)$fach unendliche Punktmengen gebildet sein können, indem in der Punktmenge $(A)$ eine Menge von Stellen existiren kann, die niemals ein mehr als $(2n-\nu)$fach ausgedehntes Continuum zu bilden vermögen, in deren Umgebungen aber erstens unendlich viele Stellen dieser Menge selbst und ferner Stellen liegen, die sich innerhalb oder aufserhalb der der Menge $(A)$ angehörenden Continua befinden.

Gibt es unter den Werthen einer Variabeln $x$ solche, die, ohne Null zu sein, dem absoluten Betrage nach kleiner sind als eine beliebig kleine positive Gröfse $\delta$, so sagt man, dafs $x$ *unendlich klein werden* kann.*) Ist $x$ eine stetig veränderliche Gröfse und liegt die Stelle Null in dem Bereich der Gröfse oder auf der Begrenzung, so kann $x$ unendlich klein werden und zwar gibt es *unendlich viele* Werthe $x$, für die $|x|$ kleiner wird als $\delta$.

Die Null selbst erscheint hier im Gegensatz zu den Null werdenden oder unendlich klein werdenden Gröfsen als eine bestimmte Gröfse, nach welcher die Werthe $x$ convergiren.

Ein Gröfsensystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ *wird unendlich klein*, sobald wieder die Stelle $(0)$ in dem Bereich der Veränderlichen oder auf der Begrenzung liegt.

Stehen hierauf zwei oder mehrere Gröfsen $y$ und $x$ oder $y$ und $x_1, x_2 \ldots x_n$ in einem Zusammenhange, durch welchen jeder Stelle $x$ oder $(x)$ ein oder mehrere (vielleicht unendlich viele) Werthe für $y$ zugeordnet werden, und existirt nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\varepsilon$ eine Umgebung der Stelle 0 oder (0)

$$|x| < \delta; \quad |x_\nu| < \delta_\nu, \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

die nur Stellen enthält, denen $y$ Werthe von einem Betrage kleiner als $\varepsilon$ zugeordnet sind, so sagt man, dafs die Gröfse $y$ mit den unabhängigen Variabeln unendlich klein oder mit *unendlich kleinen Werthen der Variabeln* unendlich klein wird.

Wird $y-b$ mit $x-a$ oder mit $x_\nu - a_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ unendlich klein, so gebraucht man die Bezeichnung: $y$ *nähert sich der Grenze* $b$, indem die Gröfse $x$ oder das Gröfsensystem $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nach der Stelle $a$ oder $(a)$ convergirt, d. h. wenn die Stelle $x$ oder

*) Wir werden öfter die Worte *absoluter Betrag* weglassen, wenn es sich um den Vergleich complexer Gröfsen mit positiven (reellen) Gröfsen handelt.

$(x)$ derart nach $a$ oder $(a)$ rückt, daſs die Differenzen $x - a$ oder $(x_\nu - a_\nu)$ unendlich klein werden.

Die Summe oder das Product $y$ einer endlichen Anzahl stetig veränderlicher Gröſen wird mit den Summanden respective mit *einem* Factor unendlich klein, sofern in dem Producte keiner der übrigen Factoren eine noch angebbare Gröſse überschreitet. Der Quotient $y$ zweier stetig veränderlicher Gröſsen wird gewiſs mit dem Dividend unendlich klein, wenn nur der Divisor nicht auch unendlich klein wird.

Eine veränderliche Gröſse wird *unendlich groſs* genannt, wenn ihr absoluter Betrag gröſser werden kann als jede angebbare positive Gröſse. Wie die Null als Grenze unendlich klein werdender Gröſsen aufzufassen ist, betrachtet man die Grenze der unendlich werdenden Gröſsen als eine bestimmte Gröſse: *Unendlich*, und spricht von ihr als dem Werthe des Ausdruckes $\frac{1}{x}$, wenn $x = 0$ gesetzt wird; diesem Werthe oder dieser Gröſse $(\infty)$ kommt der Name Unendlichkeitspunkt zu, herrührend von der geometrischen Repräsentation, bei der man nur einen unendlich fernen Punkt hat, sobald die Ebene als Kugel von unendlich groſsem Radius aufgefaſst wird. Die Gesammtheit der (absolut genommen groſsen) Werthe von $x$, für welche $\left|\frac{1}{x}\right| < r$, heiſst die Umgebung $r$ der Stelle $\infty$. Darnach legt man also dem Ausdruck $x - \infty$ die Bedeutung von $\frac{1}{x}$, und dem Ausdruck $\frac{a-\infty}{x-\infty}$ die Bedeutung von $\frac{x}{a}$ bei.

Sollte die oben benützte Punkt- oder Werthemenge $(A)$ der zweifach unendlichen Mannichfaltigkeit Gröſsen enthalten, deren absoluter Betrag gröſser ist als eine angebbare Grösse und gehört jede einer Bedingung $\left|\frac{1}{x}\right| < r$ genügende Stelle der Menge $(A)$ an, so enthält $(A)$ die Umgebung des unendlich fernen Punktes und *ein Continuum erstreckt sich in das Unendliche.*

## § 14. Häufungsstelle linearer Punktmengen.

Wir müssen die unendlichen Punktmengen noch näher studiren. Wir denken vor Allem in dem Bereich der unbeschränkt reellen Variabeln $x'$, der durch die Gesammtheit der reellen Werthe unserer Variabeln $x$ constituirt ist, eine aus einer einheitlichen Definition flieſsende Menge voneinander verschiedener Werthe gegeben. Dann besteht für jede solch *lineare unendliche Punktmenge* der wichtige Satz*):

*In dem Bereich der reellen Variabeln gibt es mindestens eine*

---

*) Siehe Pincherle l. c.

*Stelle der Beschaffenheit, dafs in jeder noch so kleinen Umgebung derselben unendlich viele Stellen der Punktmenge sich befinden.*

Wir setzen voraus, dafs die absoluten Beträge der gegebenen Gröfsen $(x_1', x_2' \ldots x_\nu' \ldots)$ endlich seien; dann können wir auch bestimmen, dafs sie alle positiv seien, denn andernfalls kann man wegen der ersten Voraussetzung stets eine positive Gröfse $k$ so angeben, dafs

$$y_\nu' = x_\nu' + k \ (\nu = 1, 2 \ldots)$$

positiv werden.

Sind die unendlich vielen Gröfsen $x_\nu'$ nun alle positiv, gröfser als $a$ und kleiner als $a + d$, so theile man das durch diese Gröfsen definirte Intervall (Bereich) in neue Bereiche, so dafs in einem Theilbereiche unendlich viele der gegebenen Gröfsen liegen.

Bezeichnen

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n \ldots$$

Gröfsen, die nur die Werthe 0 und 1 annehmen, so lassen sich unendlich viele Gröfsen $x_\nu'$ in das Intervall

$$\text{von} \quad a + \varepsilon_1 \frac{d}{2} = b_1 \quad \text{bis} \quad b_1 + \frac{d}{2},$$

ferner in das Intervall

$$\text{von} \quad b_2 = b_1 + \varepsilon_2 \frac{d}{2} \quad \text{bis} \quad b_2 + \frac{d}{2},$$

usw., endlich in ein Intervall

$$\text{von} \quad b_n = b_{n-1} + \varepsilon_n \frac{d}{2} \quad \text{bis} \quad b_n + \frac{d}{2}$$

einschliefsen. Nennt man die Summe

$$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{4} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

$\eta_n$, so wird

$$b_n = a + \eta_n d.$$

Wir behaupten, dafs dann, wenn $b_n$ noch nicht die verlangte Stelle ist, die Zahlengröfse

$$b = a + d\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{4} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \cdots\right) = a + d . \eta$$

die gesuchte Stelle in dem Intervall $a$ bis $a + d$ definirt.*)

Diese Zahlengröfse ist vor Allem endlich, denn $\eta$ ist nicht gröfser als

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Ist dann $\delta$ eine beliebig kleine vorgelegte Gröfse und $n$ so gewählt, dafs

*) Vergleiche Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung S. 26.

$$\frac{1}{2^n} < \delta, \quad \frac{1}{2^{n+1}} \geq \delta,$$

so wird $\eta$ an die Ungleichungen gebunden sein:

$$\eta_n < \eta \leq \eta_n + \frac{1}{2^n},$$

oder:

$$\eta - d < \eta_n \quad \text{und} \quad \eta + \delta \geq \eta_n + \frac{1}{2^n}.$$

Dann ist aber das Intervall von $b_n$ bis $b_n + \frac{d}{2^n}$ vollständig in dem Intervalle $(b - \delta d,\ b + \delta d)$ oder $\big(a + (\eta - \delta)d,\ a + (\eta + \delta)d\big)$ enthalten und weil dieses mit $\delta$ beliebig klein zu machen ist, fallen wirklich in jede noch so kleine Umgebung der Stelle $b$ unendlich viele der vorgelegten Punkte.

Enthält die gegebene Punktmenge Gröfsen $x'_\nu$, die gröfser sind als jede angebbare Gröfse, und gehören nicht alle endlichen Stellen der Menge an (in welchem Falle der frühere Satz auch hier bewiesen wäre), so greife man eine solche heraus — sie heifse $\xi'$ —, setze dann

$$y = \frac{x}{x - \xi'},$$

so wird der Bereich der reellen Werthe $y'$ gerade dem Bereich von $x'$ entsprechen, indem

$$y'_\nu = \frac{x'_\nu}{x'_\nu - \xi'} = \frac{1}{1 - \frac{\xi'}{x'_\nu}}$$

reell ist. Die Stellen $y'_\nu$ liegen nicht unendlich fern, da $|y'_\nu|$ endlich bleibt und somit gibt es für die Punktmenge $(y_1', y_2' \ldots y'_\nu \ldots)$ eine ausgezeichnete Stelle der in Rede stehenden Art; sie heifse $Y$. Ihr entspricht in dem Bereiche von $x'$ umgekehrt die Stelle:

$$X = \frac{Y\xi'}{Y-1},$$

und diese ist die gesuchte *Grenz- oder Häufungsstelle* der gegebenen Punktmenge, denn die Stellen der nächsten Umgebung von $Y$ werden in Stellen der nächsten Umgebung von $X$ transformirt.

Wäre $Y = 1$, so folgt $X = \infty$ und dann gibt es in jedem noch so kleinen Bereiche, für welchen $\left|\frac{1}{x'}\right| < \delta$, unendlich viele der gegebenen Stellen. —

Man kann diese Betrachtungen auf den Fall ausdehnen, wo in dem Bereiche der $n$ von einander unabhängigen unbeschränkten aber reellen Variabeln $(x_1', x_2' \ldots x_n')$, (also in einer Mannichfaltigkeit von $n$ Dimensionen), unendlich viele von einander verschiedene (positive) Stellen $(x')$ gegeben sind, die man in bestimmter Folge geordnet denken

mag; z. B. dadurch dafs zwei Stellen $(x')$ und $(\bar{x}')$ dann als aufeinander folgend angesehen werden, wenn $|x_1'| < |\bar{x}_1'|$ ist; sollte es aber zwei Stellen geben, denen dieselben Werthe $x_1'$ zukommen, so folge $(x')$ auf $(\bar{x}')$, wenn $x_2' < \bar{x}_2'$ usw.

In der $n$fach unendlichen Mannichfaltigkeit existirt wieder mindestens eine Stelle, derart, dafs in jeder beliebig kleinen Umgebung $(\delta)$ derselben unendlich viele der gegebenen Punkte enthalten sind.

Will man zeigen, dafs auch die unendliche Punktmenge in dem zweifach ausgedehnten Bereiche der unbeschränkten Variabeln

$$x = \xi + i\eta$$

eine Häufungsstelle besitzt $(b = \beta_1 + \beta_2 i)$, so dafs in jeder noch so kleinen Umgebung $r$ von $b$ unendlich viele der vorgegebenen Stellen $x' = \xi' + i\eta'$ liegen, so setze man $b$ aus den Häufungsstellen $\beta_1$ und $\beta_2$ der Gröfsenmengen $\xi'$ resp. $\eta'$ zusammen und beweise, dafs sich nach Annahme zweier beliebig kleinen Gröfsen $\delta_1$ und $\delta_2$, welche der Bedingung $\delta_1^2 + \delta_2^2 < r^2$ genügen, unendlich viele reelle Werthe $\xi'$ und $\eta'$ finden lassen, für welche

$$|\xi' - \beta_1| < \delta_1, \quad |\eta' - \beta_2| < \delta_2,$$

denn dann gibt es auch unendlich viele Gröfsen $x'$, die die Bedingung $|x' - b| < r$ erfüllen.

In entsprechender Weise gehe man in dem Falle vor, wo die Punktmenge in dem $2n$fach ausgedehnten Bereiche der $n$ (complexen) Variabeln $x_1, x_2 \ldots . x_n$ gegeben ist. Es gibt auch hier mindestens eine Häufungsstelle.

## § 15. Abgeleitete Punktmengen.*)

Ist irgend eine unendliche lineare Punktmenge $P$ gegeben, d. h. eine unendliche Menge verschiedener Punkte, so ist mit dieser eine zweite Punktmenge definirt, nämlich die der Häufungs- oder Grenzstellen. Man nennt die Gesammtheit der Grenzstellen die *erste abgeleitete Punktmenge* von $P$ und bezeichnet sie mit $P^{(1)}$.

Die Punkte von $P^{(1)}$ brauchen der Menge $P$ nicht anzugehören und ebensowenig ist die Menge $P$ in $P^{(1)}$ enthalten. Heifst die Gesammtheit der in $P$ aber nicht in $P^{(1)}$ vorkommenden Stellen $Q$, dann kann man jedem Punkte von $Q$ eine Umgebung zuordnen, welche keine weiteren Stellen aus $Q$ enthält, und die abgeleitete Menge $Q^{(1)}$ kann mit $Q$ keine Stelle gemein haben. Man nennt die Punkte $Q$ *isolirte Punkte.*

Besteht die Punktmenge $P^{(1)}$ aus unendlich vielen Stellen, so besitzt dieselbe eine erste abgeleitete Punktmenge $P^{(2)}$, die die zweite

*) Vergleiche die Untersuchungen von Cantor in den Mathemat. Annalen.

Abgeleitete von $P$ heifst. — $P^{(2)}$ braucht nicht alle Stellen von $P^{(1)}$ zu enthalten, aber jede Stelle von $P^{(2)}$ gehört jetzt $P^{(1)}$ an, denn in jeder Umgebung einer Stelle von $P^{(2)}$ gibt es unendlich viele Stellen von $P^{(1)}$ und in jeder Umgebung dieser Stellen unendlich viele Punkte der Menge $P$. Der Ableitungsprozefs fördert also aus $P$ höchstens einmal neue Stellen.

In der Bildung abgeleiteter Punktmengen kann man weiter gehen und die $\nu^{\text{te}}$ Ableitung von $P$, d. i. die erste Ableitung von $P^{(\nu-1)}$ aufsuchen; stets wird $P^{(\nu)}$ in $P^{(\nu-1)}$, in $P^{(\nu-2)}$ usw., endlich in $P^{(1)}$ enthalten sein. Kommt man bei dieser Succession zu einem Ende, indem eine abgeleitete Menge $P^{(n)}$ nur aus einer endlichen Anzahl von Stellen zusammengesetzt ist und $P^{(n+\nu)}$ für jedes $\nu$ keine Stellen enthält, so heifst die Punktmenge von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung. Man zeigt dies durch die Schreibweise an:

$$P^{(n+1)} \equiv 0 .$$

Beispiele: 1) Die erste abgeleitete Punktmenge der gegebenen Menge $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots\right)$ besteht aus der Stelle Null und es ist $P^{(2)} \equiv 0$.

2) Die erste Abgeleitete der Punktmenge, welche durch die innerhalb des Bereiches von 0 bis 1 befindlichen rationalen Zahlengröfsen definirt ist, besteht aus allen Punkten des Intervalles einschliefslich der durch die Stellen 0 und 1 gebildeten Grenzen und jede folgende abgeleitete Menge enthält dieselben Stellen.

3) Eine irrationale Zahlengröfse $n^{\text{ter}}$ Ordnung war durch eine aus Zahlengröfsen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildete Fundamentalreihe definirt, die irrationale Zahlengröfse erster Ordnung durch eine aus rationalen Gröfsen zusammengesetzte Fundamentalreihe. Sucht man die den rationalen Gröfsen entsprechende Punktmenge, welche eine irrationale Zahlengröfse $n^{\text{ter}}$ Ordnung definirt, so ist dieselbe durch die Identität $P^{(n+1)} \equiv 0$ charakterisirt.

Bezeichnet man das System der zweien Punktmengen $P_1$ und $P_2$ gemeinsamen Stellen mit $D(P_1, P_2)$ und nennt diese Menge den gemeinsamen Theiler von $P_1$ und $P_2$, so erhält der früher ausgesprochene Hauptsatz einer Menge $Q$ isolirter Stellen die Form:

$$D(Q, Q^{(1)}) \equiv 0 ,$$

und die Beziehung auf einander folgender abgeleiteter Punktmengen ist in der Formel enthalten:

$$D(P^{(\nu)}, P^{(\nu+1)}) \equiv P^{(\nu+1)} .$$

Bezeichnet man die durch Vereinigung zweier Punktmengen $P_1$ und $P_2$ ohne gemeinsamen Theiler entstehende Punktmenge $P$ mit $P_1 + P_2$, so ist die frühere Punktmenge $P$ mit der ersten Abgeleiteten

$P^{(1)}$ und der isolirten Menge $Q$ in der nachfolgenden Weise zu charakterisiren:

$$P \equiv Q + D(P,\ P^{(1)}),$$

d. h. jede Punktmenge $P$ ist als Vereinigung einer isolirten Menge und einer Theilmenge von $P^{(1)}$ darzustellen.

Ist $P$ selbst eine abgeleitete Punktmenge, so wird diese Theilmenge von $P^{(1)}$ $P^{(1)}$ selbst, denn es ist:

$$P^{(\nu)} \equiv Q_\nu + D(P^{(\nu)},\ P^{(\nu+1)}) \equiv Q_\nu + P^{(\nu+1)}$$

und $Q_\nu \equiv P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}$ ist eine isolirte Menge. So ersieht man auch, dafs die erste abgeleitete Punktmenge als Vereinigung isolirter Mengen aufzufassen ist, denn es gilt:

$$P^{(1)} \equiv (P^{(1)} - P^{(2)}) + (P^{(2)} - P^{(3)}) + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

oder

$$P^{(1)} \equiv (P^{(1)} - P^{(2)}) + (P^{(2)} - P^{(3)}) + \cdots,$$

je nachdem $P^{(1)}$ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, oder der Ableitungsprocefs im Endlichen keinen Abschlufs erreicht.

Eine Punktmenge $P$, welche ihre erste abgeleitete Punktmenge enthält (wo $D(P,\ P^{(1)}) \equiv P^{(1)}$ ist), heifse eine *abgeschlossene.* Für diese ist:

$$P \equiv Q + P^{(1)},$$

und weil $D(Q,\ Q^{(1)}) \equiv 0$ ist, so mufs $Q^{(1)}$ in $P^{(1)}$ als Theiler enthalten sein. Enthält $P$ neben $Q$ und $Q^{(1)}$ noch eine Punktmenge $R$, so gilt:

$$P = Q + Q^{(1)} + R, \quad Q^{(1)} + R \equiv P^{(1)}.$$

Während in hinlänglich kleinen Umgebungen der Stellen von $Q$ keine Stellen dieser Menge existiren, gibt es in jeder Umgebung der Stellen von $R$ Stellen, die $R$ selbst angehören, folglich gehört $R$ seiner ersten abgeleiteten Punktmenge $R^{(1)}$ an:

$$D(R,\ R^{(1)}) \equiv R\,.$$

Ferner ist nicht blos $D(R^{(1)},\ R^{(2)}) \equiv R^{(2)}$, sondern auch

$$D(R^{(1)},\ R^{(2)}) \equiv R^{(1)},$$

d. h. $R^{(2)}$ enthält alle Stellen von $R^{(1)}$ und keine anderen mehr. Der Ableitungsprocefs bringt demnach an der Menge $R^{(1)}$ keine Aenderung hervor.

Wir schliefsen diese Erörterungen über Punktmengen mit der nunmehr einleuchtenden Bemerkung: Nimmt man aus dem Bereich der unbeschränkt veränderlichen Gröfse $x = \xi + i\eta$ eine abgeschlossene Punktmenge heraus, von der kein Theil ein zweifach ausgedehntes Continuum bildet, so werden in dem Bereich ein oder mehrere Continua entstehen.

## § 16. Obere und untere Grenze unendlich vieler reeller Zahlengröſsen.

Wir kommen jetzt zu neuen Begriffen, denen der oberen und unteren Grenze unendlich vieler reeller positiver Zahlengröſsen $x'$, welche im Allgemeinen keine Fundamentalreihe constituiren sollen.

Wir behaupten: Es gibt eine Zahlengröſse $G$, welche von den gegebenen Gröſsen $x'$ an Gröſse nicht übertroffen wird und die Beschaffenheit hat, daſs entweder gewisse $x'$ gleich $G$ sind oder doch Gröſsen $x'$ innerhalb des beliebig kleinen Intervalles $G$ bis $G - \delta$ liegen. Sie heiſst die *obere Grenze.* Die *untere Grenze* ist eine Gröſse $g$ der Beschaffenheit, daſs keine der Gröſsen $x'$ kleiner ist als $g$, aber Gröſsen $x'$ existiren, welche in das beliebig kleine Intervall $g$ bis $g + \delta$ fallen oder $g$ gleich sind.

Der Beweis für das Vorhandensein dieser Grenzen läſst sich leicht an den für die Häufungsstelle einer Punktmenge anknüpfen, doch ziehen wir vor, einige Modificationen in der Beweisführung eintreten zu lassen, die bei der Wichtigkeit dieser Art von Untersuchungen am Platze sein dürften.

Wir setzen fest, daſs alle Gröſsen $x'$ endlich seien. Wenn sie somit nicht über eine angebbare Gröſse hinausgehen, kann man in der Reihe rationaler Gröſsen:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{m}{n}, \ldots,$$

wo $n > 1$ sein mag, ein erstes Glied $\frac{\mu_1}{n}$ finden, welches gröſser ist als alle Gröſsen $x'$, dann gibt es aber Gröſsen $x'$, die gröſser oder gleich $\frac{\mu_1 - 1}{n}$ sind. Ist niemals $x' > \frac{\mu_1 - 1}{n}$, aber $x' = \frac{\mu_1 - 1}{n}$, so ist $\frac{\mu_1 - 1}{n}$ die obere Grenze. Andernfalls sei in der weiteren Reihe:

$$0, \frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \ldots \frac{m}{n^2}, \ldots$$

$\frac{\mu_2}{n^2}$ das erste Glied, welches gröſser ist als alle Gröſsen $x'$.

Es ist dann

$$\frac{\mu_1 - 1}{n} < \frac{\mu_2}{n^2}, \quad \frac{\mu_1}{n} > \frac{\mu_2 - 1}{n^2}$$

oder

$$\mu_1 n - n < \mu_2, \quad \mu_1 n > \mu_2 - 1$$

und daher

$$\mu_1 n \geqq \mu_2, \quad \frac{\mu_1 - 1}{n} < \frac{\mu_2}{n^2} \leqq \frac{\mu_1}{n}.$$

Definirt man in derselben Weise die Gröſsen:

$$\frac{\mu_3}{n^3}, \frac{\mu_4}{n^4}, \ldots \frac{\mu_m}{n^m}, \ldots$$

für die dann die analogen Ungleichungen gelten:

$$\frac{\mu_{\nu-1}-1}{n^{\nu-1}} < \frac{\mu_\nu}{n^\nu} \leqq \frac{\mu_{\nu-1}}{n^{\nu-1}},$$

und bildet die Gröfse:

$$G = \frac{\mu_1}{n} + \left(\frac{\mu_2}{n^2} - \frac{\mu_1}{n}\right) + \left(\frac{\mu_3}{n^3} - \frac{\mu_2}{n^2}\right) + \cdots,$$

so ist diese die verlangte endliche obere Grenze.

Bringt man $G$ auf die Form:

$$G = \frac{\mu_1}{n} - \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{n\mu_\varkappa - \mu_{\varkappa+1}}{n^{\varkappa+1}},$$

oder schreibt nach Weglassung der ersten $\nu - 1$ Gröfsen $\frac{\mu_\varkappa}{n^\varkappa}$ und $-\frac{\mu_\varkappa}{n^\varkappa}$:

$$G = \frac{\mu_\nu}{n^\nu} - \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} \frac{n\mu_\varkappa - \mu_{\varkappa+1}}{n^{\varkappa+1}}$$

und beachtet die Ungleichungen:

$$n\mu_\varkappa - \mu_{\varkappa+1} < n \quad (\varkappa = \nu, \nu+1, \cdots),$$

so wird die unter dem Summenzeichen stehende Gröfse kleiner als $\frac{1}{n^\varkappa}$. Man kann darnach eine positive Gröfse $h < 1$ so bestimmen, dafs

$$G = \frac{\mu_\nu}{n^\nu} - h\frac{1}{n^\nu}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

wird, folglich ist $G$ wirklich endlich, denn $n$ war gröfser als 1.

Führt der beschriebene Procefs nicht zum Ende, so ist die durch unsere unendliche Reihe definirte Gröfse $G$ so beschaffen, dafs kein $x'$ gröfser ist als $G$ und in dem Intervalle $G$ bis $G - \delta$ Zahlengröfsen $x'$ liegen. Wäre nämlich $x' > G$, so gibt es auch ein $\delta$, für welches noch

$$x' > G + \delta$$

ist. Wählt man hierauf ein $\nu$, der Bedingung

$$h\frac{1}{n^\nu}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{h}{n^\nu}\,\frac{n}{n-1} < \delta$$

entsprechend, so wird

$$G + \delta > \frac{\mu_\nu}{n^\nu},$$

doch weil gemäfs der Definition von $\mu_\nu$ keine Gröfsen $x'$ existiren, die gröfser sind als $\frac{\mu_\nu}{n^\nu}$, kann unsere Annahme nicht richtig sein und es ist jedenfalls $x' \geqq G$. Da aber

$$G < \frac{\mu_\nu{}'}{n^\nu}$$

ist und man stets ein $\nu$ entsprechend einer beliebig kleinen Gröſse $\delta$ so bestimmen kann, daſs neben der letzten Ungleichung auch die folgende gilt:

$$G - \delta < \frac{\mu_{\nu-1}}{n^\nu}$$

— man hat ja nur $\frac{1}{n^\nu} \geqq \delta$ zu machen — so gibt es in dem Intervall von $G$ bis $G - \delta$ Gröſsen $x'$, denn es existiren den Definitionen zufolge Gröſsen $x' \geqq \frac{\mu_\nu - 1}{n^\nu}$.

Sind unter den Gröſsen $x'$ solche, die gröſser sind als eine beliebig vorgegebene Gröſse, so ist die obere Grenze $G = \infty$, und in jeder Umgebung der Unendlichkeitsstelle $\left|\frac{1}{x}\right| < \delta$ gibt es Gröſsen $x'$. Zum Beweise benütze man die schon oben verwendete Transformation:

$$y = \frac{x}{x - \xi}.$$

In genau derselben Weise folgt die Existenz der unteren Grenze. Enthält die gegebene Gröſsenmenge positive und negative Gröſsen $x'$, so trenne man diese, suche die obere Grenze der positiven Gröſsen und andrerseits die der absoluten Beträge der negativen Gröſsen. Die letztere ist nach Aenderung des Zeichens die untere Grenze der gegebenen Gröſsen.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daſs die Häufungsstellen unserer Punktmengen mit den hier bestimmten Grenzen einer unendlichen Anzahl von Zahlengröſsen zusammenfallen können, aber durchaus nicht übereinstimmen müssen, denn die Grenzen waren nicht dadurch definirt, daſs in jeder Umgebung derselben unendlich viele, sondern überhaupt gegebene Gröſsen liegen.

## § 17. Von reellen Variabeln abhängige stetig veränderliche Gröſsen.

Der Begriff der oberen und unteren Grenze unendlich vieler reeller Zahlengröſsen wird dort von Wichtigkeit, wo wir einer mit einer oder mehreren unbeschränkt oder stetig veränderlichen Gröſsen in derartigem Zusammenhang stehenden Gröſse $y$ begegnen, daſs jedem Werthe oder Werthsysteme der Variabeln ($x$ resp. $x_1, x_2 \ldots x_n$), das einem continuirlichen Bereiche entnommen ist, ein oder mehrere bestimmte Werthe der Gröſse $y$ zugehören. Wir zeigen diese Abhängigkeit der Gröſse $y$ von $x$ oder $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch die Schreibweise an:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad y = f(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

und lesen vorderhand nur, $y$ ist eine von $x$ oder $x_1, x_2 \ldots x_n$ ab-

hängige Gröfse der genannten Art. Unter $f(x')$ oder $f(x_1', x_2' \ldots x_n')$ verstehen wir dann die Werthe von $y$ an der Stelle $x'$ oder $(x')$.

Es sei zunächst $y$ eine von der reellen Variabeln $x'$ abhängige Gröfse, die für jeden innerhalb des durch die Stellen $x' = a$ und $x' = b$ begrenzten Bereiches liegenden Werthes $x'$ einen bestimmten endlichen und reellen Werth $y'$ besitze, dann haben die unendlich vielen bestimmten Werthe $y'$ eine obere und untere Grenze $G$ und $g$, für die der folgende Satz gilt:

> Ist $G$ die obere Grenze derjenigen Werthe von $y$, welche den innerhalb des Intervalles von $a$ bis $b$ liegenden Werthen von $x'$ zugehören, so gibt es in diesem Intervalle mindestens eine Stelle $x' = X$ der Beschaffenheit, dafs die obere Grenze der Werthe $y$, welche den in beliebig kleiner Umgebung von $X$ liegenden $x'$ Werthen entsprechen, immer noch $G$ bleibt.

Der Satz für die untere Grenze $g$ lautet analog. Zum Beweise suche man wieder in der Reihe rationaler Gröfsen

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{m}{n}, \ldots$$

wo $n > 1$ ist, zwei Gröfsen $\frac{p}{n}$ und $\frac{p+q}{n}$, welche das Intervall von $a$ bis $b$ einschliefsen, theile das so gewonnene neue Intervall in $q$ gleiche Theile ab, dann gibt es in jedem derselben für die den $x'$ Werthen entsprechenden $y$ Werthe eine obere Grenze und mindestens in einem Intervalle etwa von $\frac{\mu_1}{n}$ bis $\frac{\mu_1+1}{n}$ ist diese obere Grenze gerade $G$. Durch die weitere Reihe

$$0, \frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \ldots \frac{m}{n^2}, \ldots$$

wird wieder mindestens ein Intervall etwa von $\frac{\mu_2}{n^2}$ bis $\frac{\mu_2+1}{n^2}$ zu bestimmen sein, in welchem die den $x'$ Werthen zugeordneten $y$ Werthe die obere Grenze $G$ besitzen. Es ist aber

$$\frac{\mu_1}{n} < \frac{\mu_2+1}{n^2}, \quad \frac{\mu_2}{n^2} < \frac{\mu_1+1}{n}$$

oder

$$n\mu_1 < \mu_2 + 1, \quad \mu_2 < n\mu_1 + 1$$

und deshalb

$$n\mu_1 \leq \mu_2, \quad \mu_2 + 1 \leq \mu_1 + n,$$

$$\frac{\mu_1}{n} \leq \frac{\mu_2}{n^2}, \quad \frac{\mu_2+1}{n^2} \leq \frac{\mu_1+1}{n},$$

d. h. das neue Intervall liegt ganz in dem ersten.

In der Bildung neuer Intervalle gehe man in der angegebenen Weise weiter, so dafs stets

$$0 < \mu_\nu - \nu\mu_{\nu-1} < n$$

bleibt, wie in dem Falle $\nu = 2$. Erhält man niemals einen Werth $\frac{\mu_\nu}{n^\nu}$, dem der Werth $y = G$ entspricht, so definirt der Ausdruck:

$$\frac{\mu_1}{n} + \left(\frac{\mu_2}{n^2} - \frac{\mu_1}{n}\right) + \left(\frac{\mu_3}{n^3} - \frac{\mu_2}{n^2}\right) + \cdots$$
$$= \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2 - n\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_3 - n\mu_2}{n^3} + \cdots$$

oder

$$\frac{\mu_\nu}{n^\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_{\nu-\varkappa}}{n^{\nu+\varkappa}} - \frac{\mu_{\nu+\varkappa-1}}{n^{\nu+\varkappa-1}}\right)$$

die verlangte Stelle $X$. Wegen der genannten Ungleichungen ist erstens

$$X < \frac{\mu_1}{n} + \frac{1}{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{\mu_1}{n} \leqq X < \frac{\mu_1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

und analog

$$\frac{\mu_\nu}{n^\nu} \leqq X < \frac{\mu_\nu}{n^\nu} + \frac{1}{n^\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}},$$

und zweitens wegen

$$\mu_\nu - \nu\mu_{\nu-1} \leqq n - 1$$
$$\frac{\mu_\nu}{n^\nu} \leqq X < \frac{\mu_{\nu+1}}{n^\nu}.$$

Ist hierauf eine beliebig kleine Gröſse $\delta$ vorgelegt, und wählt man $\nu$ der Bedingung gemäſs $\frac{1}{n^\nu} < \delta$, so fällt das Intervall von $\frac{\mu_\nu}{n^\nu}$ bis $\frac{\mu_{\nu+1}}{n^\nu}$, in welchem die $y$ Werthe die obere Grenze $G$ haben, ganz in die Umgebung $\delta$ der Stelle $x' = X$ oder innerhalb des Intervalles von $X - \delta$ bis $X + \delta$; also in der That ist die obere Grenze der $y$ Werthe in beliebig kleiner Umgebung der Stelle $x' = X$ immer noch $G$.

Ist der $x' = X$ entsprechende $y$-Werth genau gleich $G$, so heiſst die obere Grenze das *Maximum* der Gröſse $y$, und $g$ heiſst in dem analogen Falle das *Minimum*.

Da die Grenzen unendlich vieler Gröſsen nicht zu diesen letzteren gehören müssen, ist nicht nothwendig, daſs eine Gröſse $y$ den Maximal- und Minimalwerth erreicht, wir können nur behaupten, daſs sie denselben beliebig nahe kommt.

Nun ist auch der Satz verständlich: Wenn die Werthe $y$ einer Gröſse $K$ beliebig nahe kommen, so existirt mindestens eine Stelle derart, daſs in deren nächster Umgebung Stellen $x'$ liegen, denen der Gröſse $K$ beliebig nahe kommende $y$-Werthe entsprechen. —

Jetzt wollen wir Gröſsen $y$ namhaft machen, welche einem Werthe $K$ und ihren Grenzen $G$ und $g$ nicht blos beliebig nahe kommen, sondern diese Werthe wirklich annehmen.

Existirt in dem Bereiche der Variabeln $x$ ein solches Gebiet $(A)$, dafs nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ für jede Stelle $x_0$ innerhalb $(A)$ eine Umgebung $r_0$ anzugeben ist, die nur Stellen $x'$ umfafst, deren zugehörige Werthe $y'$ die Bedingung

$$|y' - y_0| = |f(x') - f(x_0)| < \delta$$

erfüllen, so heifst $y$ eine in dem Gebiete $(A)$ von $x$ abhängige, *stetig veränderliche* Gröfse.

Ebenso heifst eine von $n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängige Gröfse $y$ in einem continuirlichen Bereiche $(A)$ stetig veränderlich, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$ für jede Stelle $(x^{(0)})$ innerhalb $(A)$ eine solche Umgebung angegeben werden kann, dafs für alle Stellen $(x^{(1)})$ dieser Umgebung der absolute Betrag

$$|f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})| < \delta$$

wird.

Ist nun $y$ eine für jeden Werth $x$ eines Intervalles $(A)$ der (wieder reellen) Variabeln stetig veränderliche, endliche Gröfse, die für alle Werthe einschliefslich der Grenzstellen des Bereiches

$$(x = a, x = b = a + d)$$

definirt ist, *so erreicht* $y$ für einen bestimmten Werth $X$ *die obere Grenze* $G$.

Theilt man das Intervall in der früheren Weise ab, und nennt die Endpunkte der aufeinanderfolgenden Intervalle

$$a_1, b_1; \quad a_2, b_2; \ldots . a_\nu, b_\nu; \ldots .$$

so kommt man entweder auf eine Stelle, bei welcher der Werth von $y$ gleich $G$ ist, und dann ist die Behauptung erwiesen, oder der Theilungsprocefs ist unbegrenzt fortsetzbar. Dann definiren die Grenzstellen der Punktmengen:

$$a_1, a_2 \ldots a_\nu, \ldots$$
$$b_1, b_2 \ldots b_\nu, \ldots$$

eine Stelle $X$ und für diese ist $f(X) = G$. Wäre nämlich $f(X)$ um eine endliche Gröfse $k$ von $G$ verschieden, also

$$f(X) = G - k,$$

so könnte $y$ an der Stelle $X$ nicht stetig sein.*)

In der That kann man für die stetig veränderliche Gröfse $y$ nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ eine Umgebung der Stelle $X$ so ausfindig machen, dafs für jede Stelle dieser Umgebung

$$(x' = X - \xi, x' = X + \xi)$$
$$|f(x') - f(X)| < \delta$$

wird. In das Intervall von $X - \xi$ bis $X + \xi$ fällt aber ein Intervall

*) Vergleiche Serret l. c.

von $a_\nu$ bis $b_\nu$ und zu diesem gehören $y$ Werthe, die von $G$ beliebig wenig abweichen. Setzt man also

$$f(x') = G - \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ beliebig klein ist, so mufs auch

$$|G - \varepsilon - f(X)| = |G - \varepsilon - (G - k)| = |k - \varepsilon| < \delta$$

sein, und das ist unmöglich, wenn $\delta$ und $\varepsilon$ beliebig klein sind. Man mufs $k = 0$ setzen und damit folgt

$$f(X) = G,$$

d. h. *die innerhalb eines Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ einschliefslich dieser Grenzen stetige und endliche Gröfse $y$ erreicht die obere Grenze, sie hat ein Maximum und ebenso ein Minimum.*

Besitzt ferner $y$ an den innerhalb des Intervalles liegenden Stellen $x_1$ und $x_2$ die bestimmten (endlichen) Werthe $f(x_1)$ und $f(x_2)$, so kann man in gleicher Weise zeigen, dafs $y$ für die innerhalb des Theilbereiches von $x_1$ bis $x_2$ gelegenen Stellen jeden Werth annimmt, der zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gelegen ist.

Die stetig veränderliche Gröfse $y = f(x)$ überspringt demnach keinen innerhalb ihres Werthbereiches liegenden Werth, *sie ist continuirlich.*

Dieselben Betrachtungen lassen sich durchführen, wenn man eine Gröfse $y$ mit $n$ reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so verbunden denkt, dafs jeder Stelle eines zusammenhängenden Bereiches der $n$fach ausgedehnten Mannichfaltigkeit (einschliefslich der Grenzen) bestimmte reelle Werthe von $y$ zugehören.

Diese Werthe haben eine obere und untere Grenze. Im Innern oder auf der Begrenzung des genannten Bereiches der Variabeln gibt es eine Stelle $(a)$ derart, dafs die Werthe von $y$, welche den Stellen aus einer beliebig kleinen Umgebung von $(a)$ zugehören, der oberen Grenze beliebig nahe kommen, und diese Grenze wird erreicht, wenn $y$ eine stetig veränderliche Gröfse ist. —

Indem wir bemerken, dafs die in einem Intervall der reellen Variablen $x$ endliche reelle und stetig veränderliche Gröfse $y = f(x)$ an einer Stelle $x'$ des Intervalles denjenigen Werth hat, welcher die Grenze der (den nach $x'$ convergirenden Variabelnwerthen zugehörigen) $y$ Werthe bildet, und umgekehrt eine Gröfse $y$ in einem Intervalle dann stetig zu nennen ist, wenn sie diese Eigenschaft hat, weil man nach Annahme einer Gröfse $\delta'$ stets eine Umgebung von $x'$ so finden kann, dafs für alle Stellen $x$ derselben

$$|f(x) - f(x')| < \delta'$$

wird und die genannte Umgebung nach Wahl einer Gröfse $\delta$ auch so zu bestimmen ist, dafs für jedes $x'$ des ganzen Intervalles dieselbe Ungleichung besteht:

$$|f(x) - f(x')| < \delta,$$

so folgt leicht der nachstehende Satz:

Wenn die Werthe einer von $x$ abhängigen rellen stets positiven Gröfse $y$ bei zunehmendem positiven $x$ selbst wachsen oder abnehmen und in der einfach unendlichen Mannichfaltigkeit einen von den Stellen $A$ und $B$ begrenzten continuirlichen Bereich constituiren, so ist $y$ stetig veränderlich.

Es nehme $y$ mit $x$ zu und $x_1$ und $x_2$ seien zwei Werthe von $x$, denen $y_1$ und $y_2$ zugehören; ferner sei $x_1 < x_2$ und deshalb $y_1 < y_2$. Bezeichnet dann $x'$ einen in dem Intervall von $x_1$ bis $x_2$ liegenden Werth, so wird das zugehörige $y'$ zwischen $y_1$ und $y_2$ liegen. Umgekehrt gehört der zwischen $y_1$ und $y_2$ liegende $y$-Werth zu einem Werthe $x$ des Bereiches mit den Grenzstellen $x_1$ und $x_2$. — $y_1$ und $y_2$ bilden deshalb die untere und obere Grenze der Werthe $y$ für $x > x_1$ resp. $x < x_2$, d. h. $y_1$ ist die Grenze der Werthe $y$, wenn das in dem Intervalle von $x_1$ bis $x_2$ liegende $x$ nach der Stelle $x_1$ convergirt und $y_2$ die Grenze der Werthe $y$, wenn $x$ nach $x_2$ convergirt, aber dann hat $y$ an einer beliebigen Stelle $x_0$ des Bereiches von $x$ denjenigen Werth $y_0$, für welchen $|y - y_0|$ zugleich mit $|x - x_0|$ unendlich klein wird, denn wie nahe an $y_0$ auch $y = y_0'$ gewählt werde, es gibt unter den zu den Stellen der Umgebung von $x_0$ gehörigen $y$-Werthen stets einen mit $y_0$ zusammenfallenden oder zwischen $y_0'$ und $y_0$ gelegenen Werth. Darnach ist $y$ auch stetig veränderlich. —

Daran schliefsen wir endlich eine Untersuchung über die von einer stetig veränderlichen complexen Gröfse $x$ abhängige stetig veränderliche Gröfse $y = f(x)$.

Wir sagen: $y$ ist *in der Umgebung einer Stelle* $x_0$ stetig veränderlich, wenn nach Angabe einer beliebig kleinen Gröfse $\delta_0$ eine solche Umgebung gefunden werden kann, dafs für jede Stelle $x'$ derselben

$$|f(x') - f(x_0)| < \delta_0.$$

Ist hierauf $y$ in einem continuirlichen, zweifach ausgedehnten Bereiche $(A)$ definirt und wissen wir, dafs sie in der Umgebung jeder Stelle $x_0$, die im Innern oder auf der Grenze eines dem Continuum $(A)$ angehörigen endlichen Bereiches $(A')$ liegt, stetig veränderlich ist, so läfst sich zeigen, *dafs $y$ auch in dem ganzen Bereiche $(A')$ stetig ist*, d. h. man kann nach Annahme einer Gröfse $\delta$ für jede Stelle $x_0$ eine solche Umgebung ermitteln, dafs für alle Stellen derselben

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta$$

wird.

Erinnern wir uns, auf welche Weise ein zusammenhängender Bereich $(A)$ definirt war, so können wir die folgenden Erwägungen anstellen: Sind $a$ und $b$ zwei Stellen innerhalb des Bereiches $(A)$, von

denen $b$ in der Umgebung $R$ der Stelle $a$ liegt, und ist $R$ der Radius der bis an eine Stelle der Begrenzung von $(A)$ hinanreichenden, dem Bereiche $(A)$ angehörigen Umgebung von $a$, und bezeichnet $d$ den absoluten Betrag $|b - a|$, d. h. den Abstand der beiden Stellen, so kann der Radius $R_1$ der bis an eine Stelle der Begrenzung von $(A)$ hinanreichenden und $(A)$ angehörigen Umgebung von $b$ nicht kleiner sein als $R - d$. Ist $d < \frac{R}{2}$ und darnach $R_1 > \frac{R}{2}$, so liegt $a$ wieder in der Umgebung $R_1$ von $b$. Es mufs umgekehrt

$$R \geqq R_1 - d$$

sein und es folgt, dafs die Gröfse $R_1$ zwischen den Grenzen

$$R_1 - d \quad \text{und} \quad R + d$$

liegt.*)

Beachten wir jetzt, dafs sich der Radius $R$ der bis an eine Stelle der Begrenzung von $(A)$ hinanreichenden und dem Bereiche $(A)$ angehörigen Umgebung einer Stelle $a$ dieses Bereiches bei stetiger Änderung von $a$ selbst stetig ändert — wie die letzten Sätze leicht erkennen lassen —, so folgt, dafs die untere Grenze $R_0$ derjenigen Werthe $R$, welche der Halbmesser für die innerhalb und auf der Begrenzung von $(A')$ liegenden Stellen annehmen kann, mindestens an einer Stelle erreicht wird und $R_0$ nicht Null sein kann. Theilen wir den Bereich $(A')$ so in eine endliche Anzahl von Bereichen, dafs der Abstand irgend zweier einem Theilbereich entnommenen Stellen kleiner ist als $R_0$, so liegt jeder Theilbereich in der Umgebung $R_0$ einer in demselben willkürlich gewählten Stelle $x'$.

Die an jeder Stelle von $(A')$ stetig veränderliche Gröfse $y$ ist auch in dem ganzen Bereich stetig, denn nach Angabe einer Gröfse $\delta$ genügt offenbar ein endlicher Theilungsprocefs an den gewonnenen Bereichen zur Herstellung neuer, für die $f(x) - f(x_0)| < \delta$ wird. Würde nämlich nur eine unendliche Anzahl neuer Theilungen zum Ziele führen können, so müfste der schliefsliche Bereich um eine Stelle $x_0$ kleiner werden als jeder beliebig kleine Bereich. Nun war aber vorausgesetzt, dafs sich eine endliche, wenn auch noch so kleine Umgebung von $x_0$ finden läfst, wo $|f(x) - f(x_0)| < \delta_0$, und darum ist unsere Behauptung erwiesen.

---

*) Weierstrafs, Abhandlungen aus der Functionenlehre S. 72.

## II. Abschnitt.

# Rationale ganze und gebrochene Functionen einer und mehrerer Variabeln.

### § 18. Rationale ganze Functionen einer Variabeln.

Nach diesen Vorbereitungen, durch die der Begriff der veränderlichen Gröfse festgestellt wurde, gehen wir zu den schon oben definirten algebraischen Functionen zurück, von denen uns zunächst die *rationale ganze Function einer unbeschränkt veränderlichen (complexen) Gröfse* $x$ beschäftigen soll.

Ordnen wir diese ganze Function nach den ganzzahligen Potenzen der Variabeln, so erhält sie die Gestalt

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Sie ist eine für jeden endlichen Werth der Variabeln bestimmte Gröfse $y$, die wir wieder mit $f(x)$ bezeichnen. Die Variable heifst das Argument der Function und nach dem höchsten Potenzexponenten $n$ des *Argumentes* nennt man die Function vom $n^{ten}$ *Grade*, so dafs die ganze Function nullten Grades eine Constante ist und die ganze Function ersten Grades (oder die lineare Function) die Form $a_0 x + a_1$ erhält.

Die Beschaffenheit der ganzen Function irgend eines Grades, welcher zufolge der Entstehung der Function durch eine endliche Anzahl arithmetischer Operationen endlich sein mufs, werden wir beurtheilen können, wenn wir die Frage, ob und für welche Werthe des Argumentes die ganze Function einen bestimmt vorgegebenen Werth $a$ annimmt, zu beantworten im Stande sind. Die erste Frage, ob $y = f(x)$ einen bestimmten Werth annehmen kann, werden wir dahin specialisiren, dafs wir für den Werth $a$ die Null wählen, denn die Bestimmung von Werthen $x$, welche der Gleichung $f(x) = a$ genügen, kommt auf die Ermittelung derjenigen Werthe zurück, welche die ganze Function $f(x) - a$ zu Null machen. Es ist also nachzusehen, ob jede ganze Function für gewisse Werthe des Argumentes verschwindet, dann nimmt sie auch jeden endlichen Werth $a$ an.

Es wird aber ferner zu untersuchen sein, ob die ganze Function $f(x)$ eine stetig veränderliche Gröfse ist, und ob einem Continuum von $x$ Werthen ein Continuum von Werthen $y$ entspricht.

Wir nehmen vorerst an, dafs Zahlengröfsen existiren, für welche $f(x)$ verschwindet — sie heifsen *Nullstellen* von $f(x)$ oder *Wurzeln der Gleichung* $f(x) = 0$ — und stellen die Beziehungen derselben zu

der ganzen Function fest, schicken aber noch folgende Definition voraus: *Wenn sich $f(x)$ als Product zweier ganzer Functionen von $x$ darstellen läſst, so heiſst jeder Factor ein algebraischer Theiler von $f(x)$.*

Darnach ist jede ganze Function nullten Grades Theiler jeder ganzen Function, denn der Quotient von $f(x)$ und einer Constanten ist wieder eine ganze Function. Von diesem Theiler sehen wir ab, gerade wie wir bei den ganzen Zahlen den selbstverständlichen Theiler Eins auſser Acht gelassen, d. h. nicht als Theiler bezeichnet haben.

*Wenn die Function $f(x)$ den Theiler ersten Grades $\alpha_0 x + \alpha_1$ besitzt, verschwindet $f(x)$ für die Wurzel der Gleichung $\alpha_0 x + \alpha_1 = 0$.*

Die letzte Gleichung hat nur eine Wurzel $x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, denn wäre

$$\alpha_0 x_1 + \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 x_1' + \alpha_1 = 0,$$

so müſste das Product $\alpha_0(x_1 - x_1')$ verschwinden, ohne daſs ein Factor Null wäre.

Bringt man $\alpha_0 x + \alpha_1$ auf die Form $\alpha_0(x - x_1)$, so ist auch diese Function ein Theiler von $f(x)$, und offenbar $f(x_1) = 0$.

*Wenn umgekehrt die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $x = x_1$ besitzt, so ist $f(x)$ durch $x - x_1$ theilbar.*

Setzt man an Stelle der Variabeln $x$ irgend eine andere $y$ und bildet die Formel

$$f(x) - f(y) = a_0(x^n - y^n) + a_1(x^{n-1} - y^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - y),$$

so ist $x - y$ ein Factor von $f(x) - f(y)$, denn in

$$f(x) - f(y) = (x - y)\cdot\left[a_0\frac{x^n - y^n}{x - y} + a_1\frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y} + \cdots + a_{n-1}\frac{x - y}{x - y}\right]$$

läſst sich jeder Ausdruck $\frac{x^\nu - y^\nu}{x - y}$ auf die Form

$$x^{\nu-1} + x^{\nu-2}y + \cdots + xy^{\nu-2} + y^{\nu-1}$$

bringen, wenn nur $y$ von $x$ verschieden ist, was festgesetzt werden mag. Ertheilt man nach dieser Umgestaltung, durch welche $f(x) - f(y)$ die Form $(x - y)\,.\,\varphi_1(x, y)$ erhält, worin $\varphi_1(x, y)$ eine ganze Function von $x$ und $y$ bezeichnet, $y$ den Werth $x_1$, so entsteht die Formel

$$f(x) = (x - x_1)\,.\,\varphi_1(x, x_1).$$

Da $\varphi_1(x, x_1)$ eine ganze Function von $x$ ist, so ist die verlangte Darstellung von $f(x)$ als Product zweier Theiler erwiesen.

Der Grad von $\varphi_1(x, x_1)$ ist der $(n-1)^{\text{te}}$ und $x^{n-1}$ hat den Coefficienten $a_0$. Besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ noch eine zweite von $x_1$ verschiedene Wurzel $x_2$, so muſs in

$$f(x_2) = (x_2 - x_1)\,.\,\varphi_1(x_2, x_1)$$

nothwendig $\varphi_1(x_2, x_1)$ verschwinden. Dann läſst die ganze Function von $x$ $\varphi_1(x, x_1)$ eine Zerlegung in das Product von $(x - x_2)$ und einer ganzen Function $\varphi_2(x, x_1, x_2)$ zu, und es wird

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\,\varphi_2(x, x_1, x_2).$$

Man überzeugt sich leicht, dafs $\varphi_2(x, x_1, x_2)$ als Function von $x$ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist und die Potenz $x^{n-2}$ wiederum den Coefficienten $a_0$ aufweist.

Man zeigt durch „den Schlufs von $\nu$ auf $\nu + 1$“, dafs dieser Beweisgang fortzusetzen ist, d. h. angenommen, die Gleichung $f(x) = 0$ habe $\nu$ Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ und dieser entspreche eine Darstellung

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\nu)\,.\,\varphi_\nu(x, x_1, x_2, \ldots x_\nu),$$

wo $\varphi_\nu$ eine ganze Function $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Grades ist, in der der Coefficient der höchsten Potenz $a_0$ ist, so gibt es in dem Falle einer $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Wurzel $x_{\nu+1}$ eine Zerlegung

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\nu)(x - x_{\nu+1})\,\varphi_{\nu+1}(x, x_1, x_2, \ldots x_{\nu+1}),$$

wo die nach abnehmenden Potenzen geordnete ganze Function von $x$ $\varphi_{\nu+1}$ mit dem Gliede $a_0 x^{n-(\nu+1)}$ beginnt.

In der That soll

$$f(x_{\nu+1}) = (x_{\nu+1} - x_1)(x_{\nu+1} - 2)\ldots(x_{\nu+1} - x_\nu)\,\varphi_\nu(x_{\nu+1}, x_1, x_2, \ldots x_\nu)$$

verschwinden, so mufs $\varphi_\nu(x, x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ für $x = x_{\nu+1}$ Null sein und kann darum in das Product von $(x - x_\nu)$ und einer ganzen Function des Argumentes $x$ $\varphi_{\nu+1}(x, x_1, x_2, \ldots x_{\nu+1})$ zerlegt werden. Das Anfangsglied wird das bezeichnete.

Indem aus der Annahme, dafs die in Rede stehende Zerlegung von $f(x)$ im Falle von $\nu$ Wurzeln gilt, die gleichartige Zerlegung bei $\nu + 1$ Wurzeln gefolgert werden kann, gilt dieselbe, welches auch die Anzahl der Wurzeln ist, denn die Darstellungen

$$f(x) = (x - x_1)\,.\,\varphi_1(x, x_1) = (x - x_1)(x - x_2)\,.\,\varphi_2(x, x_1, x_2)$$

wurden bewiesen; nur kann nicht angenommen werden, dafs die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades gröfser als $n$ sei. Falls $\nu = n$ gesetzt wird, ist

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\,.\,\varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

und die ganze Function $\varphi_n$ besitzt das Anfangsglied $a_0 x^{n-n} = a_0 x^0 = a_0$. Besäfse die Gleichung $f(x) = 0$ noch eine von den früheren verschiedene Wurzel $x_{n+1}$, so müfste $\varphi_n = a_0$ verschwinden und es entspränge eine ganze Function

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

die für $n$ Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwindet. Zerlegen wir dieselbe in das Product

$$a_1 (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

so wird ersichtlich, dafs dieses nur für $x = x_n$ Null sein kann, wenn $a_1$ Null ist, nnd die ganze Function

$$a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_n$$

mufs nun noch für die $n-1$ Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ verschwinden. Es folgt wieder $a_2 = 0$, und indem man durch den Schlufs von $n$ auf $n+1$ fortgeht, erfährt man, dafs alle Coefficienten von $f(x)$ Null sein müssen, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ $(n+1)$ Wurzeln haben soll. *Demnach kann eine algebraische Gleichung $n^{ten}$ Grades $f(x) = 0$ nicht mehr als $n$ Wurzeln besitzen,* und verschwindet eine ganze Function $n^{ten}$ Grades für $n+1$ von einander verschiedene Werthe des Argumentes, so sind sämmtliche Coefficienten der Function Null und $f(x) = 0$ ist für jeden Werth $x$ erfüllt.

Der zweite dieser Sätze soll eine wichtige Verwendung finden, indem wir zeigen, dafs die Coefficienten gleich hoher Potenzen zweier für beliebige Variabelnwerthe übereinstimmende ganze Functionen einander gleich sein müssen.

Die beiden Functionen seien von dem $n^{ten}$ resp. $m^{ten}$ Grade und es sei $n \geqq m$, etwa $n = m + \nu$; sie heifsen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m .$$

Dann soll der Voraussetzung gemäfs die ganze Function $n^{ten}$ Grades:

$$f(x) - g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{\nu-1} x^{n-(\nu-1)} + (a_\nu - b_0) x^{n-\nu}$$
$$+ (a_{\nu+1} - b_1) x^{n-(\nu+1)} + \cdots + (a_n - b_m)$$

für beliebige also auch für $(n+1)$ bestimmte aber von einander verschiedene Werthe der Variabeln verschwinden. Dazu mufs

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{\nu-1} = 0, \quad a_\nu - b_0 = 0,$$
$$a_{\nu+1} - b_1 = 0, \ldots a_n - b_m = 0$$

sein und der Satz leuchtet ein.

Ist von zwei ganzen Functionen keine von höherem als dem $n^{ten}$ Grade, so kann man auch sagen: Diese Functionen sind identisch gleich, wenn sie für $(n+1)$ Argumentswerthe dieselben Werthe annehmen.

Ferner besteht der Satz: Läfst sich eine ganze Function in das Product zweier oder mehrerer ganzer Functionen zerlegen, so ist die Summe der Gradzahlen der Factoren gleich dem Grade der gegebenen Function und die Coefficienten gleichnamiger Potenzen der ursprünglichen Function und des Productes sind gleich.

Die unter der Voraussetzung, dafs eine Gleichung $n^{ten}$ Grades $f(x) = 0$ $n$ Wurzeln habe, gewonnene Darstellung der ganzen Function $f(x)$ durch das Product von $n$ Factoren ersten Grades und dem Coefficienten der höchsten Potenz $x^n$:

$$f(x) = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)$$

kann man offenbar auch aus der Annahme ableiten, dafs jede Glei-

chung mindestens eine Wurzel besitze. Wie man aber auch die Zerlegung in Factoren ersten Grades ausführen mag, sie ist nur auf eine Weise möglich, wenn sie überhaupt existirt.

Ist nämlich auch

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (p_\nu x - q_\nu),$$

wo $p_\nu$ und $q_\nu$ Constanten bezeichnen, so mufs vor Allem

$$a_0 = p_1 p_2 \ldots p_n$$

sein, und wenn $a_0$ nicht verschwindet, darf keine der Gröfsen $p_\nu$ Null sein. Setzt man nunmehr

$$f(x) = a_0 \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \frac{q_\nu}{p_\nu}\right),$$

so verschwindet $f(x)$ nicht blos an den Stellen $\frac{q_\nu}{p_\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$, sondern auch an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Diese Werthereihen müssen nach den früheren Sätzen übereinstimmen.

Nennen wir *Primfactor* eine ganze Function ersten Grades, welche nur für einen Werth der Variabeln verschwindet oder nur eine *Nullstelle* hat, so können wir das dem Satze: Eine zusammengesetzte Zahl kann nur auf eine einzige Art in das Product von Primzahlen zerlegt werden, analoge Theorem für die ganze Function folgendermafsen aussprechen:

*Eine ganze Function kann höchstens auf eine Art in das Product von Primfactoren zerlegt werden.*

Bei dieser Zerlegung können einige Primfactoren öfter auftreten, dann erhält $f(x)$ die Form

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_m)^{n_m},$$

wo die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_m$ die Summe $n$ besitzen. Hier heifst $x_\mu$ eine *$n_\mu$-fache Nullstelle der Function* $f(x)$, denn $n_\mu$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind gleich $x_\mu$.

Aus der angenommenen Zerlegung der ganzen Function

$$f(x) = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)$$

geht hervor, dafs man die Coefficienten der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ durch ganze rationale Ausdrücke in den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ darstellen kann. Die Ausführung der Multiplication und der Vergleich der Coefficienten gleichnamiger Potenzen in $\frac{1}{a_0} f(x)$ und $\prod (x - x_\nu)$ ergibt die Beziehungen:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \sum_{\nu'}\sum_{\nu''} x_{\nu'}\, x_{\nu''}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{a_\mu}{a_0} = (-1)^\mu \sum_{\nu', \nu'' \ldots \nu^{(\mu)}} x_{\nu'}\, x_{\nu''} \ldots x_{\nu^{(\mu)}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n,$$

wo die $\mu$-fache Summe in dem Ausdruck für $\frac{a_\mu}{a_0}$ über alle Producte von je $\mu$ verschiedenen der $n$ Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$, oder wie man sagt über alle Combinationen $\mu^{\text{ter}}$ Classe auszudehnen ist.*) Die Anzahl solcher Verbindungen ist bekanntlich gleich:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}$$

oder, wenn man für das Product $1.2.3\ldots m$ das Zeichen $m!$ einführt (gelesen $m$ Facultät), gleich:

$$\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\,.$$

Will man diese Bezeichnung auch in dem Falle benützen, wo $\mu = n$ ist, so mufs man $(n-n)! = 1$ festsetzen.

Man sieht jetzt, dafs eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades der Form

$$\varphi(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

unzweideutig zu bestimmen ist, wenn festgesetzt wird, dafs $\varphi(x)$ die Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ besitze. Die Coefficienten $\alpha_\mu$ sind die angegebenen Ausdrücke:

$$\alpha_\mu = (-1)^\mu \sum_{\nu', \nu'' \ldots \nu^{(\mu)}} \xi_{\nu'}\, \xi_{\nu''} \ldots \xi_{\nu^{(\mu)}} \qquad (\mu = 1, 2 \ldots n).$$

Sind allgemein die Werthe angegeben, welche eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades für $n+1$ bestimmte Argumentwerthe annimmt, so ist die ganze Function auch vollkommen bestimmt, denn man kann ihre Coefficienten nach einer endlichen Anzahl von Rechnungsoperationen finden.

In der That: sind die den Werthen $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ zugeordneten Functionswerthe

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n+1},$$

*) Zum Beweise wende man den Schlufs von $n$ auf $n+1$ an.

so ist

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \eta_\nu \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_{\nu-1})(x-\xi_{\nu+1})\dots(x-\xi_{n+1})}{(\xi_\nu-\xi_1)(\xi_\nu-\xi_2)\dots(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})(\xi_\nu-\xi_{\nu+1})\dots(\xi_\nu-\xi_{n+1})}$$

diejenige ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades von $x$, welche an den bezeichneten Stellen $\xi_\nu$ die vorgegebenen Werthe $\eta_\nu$ erhält, denn in der vorstehenden Summe ist der Factor von $\eta_\nu$ für $x = \xi_\nu$ gleich Eins und der Factor von $\eta_{\nu'}$ verschwindet an dieser Stelle.

Diese Formel heifst die *Lagrange'sche Interpolationsformel.*

Diejenige ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades, welche die $n$-fache Nullstelle $x = \xi$ besitzt und für $x = 0$ den Werth $\eta = (-1)^n \xi^n$ annimmt, erhält nun die Gestalt

$$f(x) = (x-\xi)^n,$$

sie ist die $n^{\text{te}}$ Potenz eines Binoms $(x-\xi)$, die wir mit Hilfe der obigen Ausdrücke für die Coefficienten der ganzen Function nach Potenzen von $x$ ordnen können.

Setzt man in diesen Ausdrücken $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \xi$, so wird

$$\frac{a_\mu}{a_0} = (-1)^\mu \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\,\xi^\mu \quad \text{und speciell} \quad \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \xi^n.$$

Da aber $f(0) = a_n$ den Werth $(-1)^n \xi^n$ haben soll, ist $a_0 = 1$.

Bezeichnet man die Zahlencoefficienten

$$\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{\mu} \quad \text{oder} \quad n_\mu,$$

$$\frac{n!}{n!} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{0} \quad \text{oder} \quad n_0 \text{ *)},$$

so wird

$$(x-\xi)^n = \binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} \xi x^{n-1} + \binom{n}{2} \xi^2 x^{n-2} - \dots$$
$$+ (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \xi^\mu x^{n-\mu} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \xi^n$$

und nach Vertauschung von $\xi$ mit $-\xi$ entsteht die Formel

$$(x+\xi)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} \xi x^{n-1} + \binom{n}{2} \xi^2 x^{n-2} + \dots$$
$$+ \binom{n}{\mu} \xi^\mu x^{n-\mu} + \dots + \binom{n}{n} \xi^n.$$

Mit Hilfe dieser Darstellung der $n^{\text{ten}}$ Potenz eines Binoms oder des sogenannten binomischen Lehrsatzes, den man unabhängig von der

*) Für die zufolge ihrer Definition durch

$$\frac{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}{1.2\dots\mu}$$

das einfache Gesetz

$$\binom{n}{\mu} = \binom{n}{n-\mu} \quad \text{oder} \quad n_\mu = n_{n-\mu}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

gilt.

Zerlegung der ganzen Function in ein Product von Primfactoren durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ beweisen kann, wollen wir jetzt den Werth von $f(x+h)$ bestimmen, wenn

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

gegeben ist.

Es wird offenbar:

$$f(x+h) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu \Big\{ x^{n-\mu} + \binom{n-\mu}{1} x^{n-\mu-1} h + \cdots$$
$$+ \binom{n-\mu}{\mu} x^{n-2\mu} h^{\mu} + \cdots + \binom{n-\mu}{n-\mu} h^{n-\mu} \Big\}$$

und wenn man die Summe nach Potenzen von $x$ ordnet:

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu \Big\{ \binom{n}{\nu} a_0 h^{n-\nu} + \binom{n-1}{\nu} a_1 h^{n-\nu-1} + \cdots$$
$$+ \binom{n-\mu}{\nu} a_\mu h^{n-\nu-\mu} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} a_{n-\nu} \Big\}$$

Wir schreiben den Coefficienten von $x^\nu$ in der entwickelten Form

$$\frac{1}{\nu!} \Big\{ n(n-1)\cdots(n-\nu+1) a_0 h^{n-\nu} + (n-1)(n-2)\cdots(n-\nu) a_1 h^{n-\nu-1} + \cdots$$
$$+ (n-\mu)(n-\mu-1)\cdots(n-\mu-\nu+1) a_\mu h^{n-\nu-\mu} + \cdots$$
$$+ \nu!\, a_{n-\nu} \Big\},$$

bezeichnen diese ganze Function von $h$ mit $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(h)$ und bemerken, dafs $f^{(\nu)}(h)$ aus der Function

$$f^{(\nu-1)}(h) = n(n-1)\ldots(n-\nu+2) a_0 h^{n-\nu+1}$$
$$+ (n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1) a_1 h^{n-\nu} + \cdots$$
$$+ (n-\mu)(n-\mu+1)\ldots(n-\mu-\nu+2) a_\mu h^{n-\nu-\mu+1} + \cdots$$
$$+ \nu!\, a_{n-\nu} h + (\nu-1)!\, a_{n-\nu+1}$$

hervorgeht, wenn man an Stelle jeder Potenz $h^\alpha$ $\alpha h^{\alpha-1}$ und an Stelle von $h^0$ Null setzt.

Man nennt $f^{(\nu)}(h)$ die $\nu^{\text{te}}$ Ableitung der Function $f(h)$, indem auch die erste dieser Functionen

$$f^{(1)}(h) = n a_0 h^{n-1} + (n-1) a_1 h^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} h + a_{n-1}$$

nach derselben Regel aus $f(h)$ entspringt.

Die $n^{\text{te}}$ Ableitung ist offenbar die erste von $f^{(n-1)}(h)$, und die $(n+1)^{\text{te}}$ und jede folgende Ableitung der ganzen Function $n^{\text{ten}}$ Grades $f(h)$ ist Null, denn es gilt die Formel:

$$f^{(n)}(h) = n!\, a_0.$$

Führt man die neu definirten Functionen in den letzten Ausdruck für $f(x+h)$ ein, so erhält man die Darstellung

$$f(x+h) = f(h) + f^{(1)}(h)\frac{x}{1} + f^{(2)}(h)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(h)\cdot\frac{x^n}{n!}$$

oder nach Vertauschung der Buchstaben $x$ und $h$

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)\frac{h}{1} + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

Setzt man an Stelle von $x$ den Werth $x_1$, für $h$ den Werth $x - x_1$ ein, so folgt die Formel

$$f(x) = f(x_1) + f^{(1)}(x_1)\frac{x-x_1}{1} + f^{(2)}(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^n}{n!},$$

die ersichtlich macht, dafs eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades auch vollkommen bestimmt ist, sobald man ihren Werth und den ihrer $n$ Ableitungen $f^{(\nu)}(x)$ an einer Stelle $x_1$ kennt.

Beachtet man, dafs eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades ohne ein von $x$ freies Glied

$$g(x) = \alpha_{n-1}x + \alpha_{n-2}x^2 + \cdots + \alpha_0 x^n$$

in der Umgebung der Stelle $x=0$ stetig veränderlich ist, indem nach Fixirung einer positiven Gröfse $\alpha$, die gröfser ist als jeder der absoluten Beträge $|\alpha_\nu|$,

$$|g(x)| < \alpha|x|\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

wird und nun nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$ eine Gröfse $\varrho$ so bestimmt werden kann, dafs für jede Stelle der durch die Bedingung $|x| < \varrho$ definirten Umgebung von Null,

$$\alpha\cdot|x|\cdot\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} < \delta,$$

so erhellt leicht, dafs eine beliebige ganze Function $f(x)$ in der Umgebung jeder endlichen Stelle $x_1$ stetig ist.

Man kann nämlich nach Angabe einer Gröfse $\delta$ eine Umgebung $\varrho$ dieser Stelle so finden, dafs der absolute Betrag

$$|f(x) - f(x_1)| = \left|f^{(1)}(x_1)\frac{x-x_1}{1} + f^{(2)}(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^n}{n!}\right|$$

für jede Stelle $x$ dieser Umgebung kleiner wird als $\delta$. Dazu ist nur nothwendig, dafs man eine positive Gröfse $\alpha$ angeben kann, die gröfser ist als jeder der absoluten Beträge $|f^{(\nu)}(x_1)|$, und das wird wieder möglich sein, wenn keiner der Coefficienten $a_\nu$ von $f(x)$ und $|x_1|$ nicht unendlich ist.

*Darnach ist die ganze Function* (mit endlichen Coefficienten) *an jeder Stelle des endlichen Bereiches der Variabeln und auch in dem ganzen endlichen Bereiche stetig.*

Wenn damit auch festgestellt ist, dafs die ganze Function in hinreichend kleiner Umgebung einer Stelle $x_1$ nur Werthe annimmt, deren paarweis gebildete Differenz dem absoluten Betrage nach beliebig klein ist, so wissen wir noch nicht, ob die Function continuirlich ist, d. h.

es ist noch nicht nachgewiesen, dafs $y = f(x)$ jeden Werth, der in der nächsten Umgebung einer Stelle $y_1 = f(x_1)$ liegt, bei unendlich kleinen Änderungen der Variabeln annimmt. —

Um der Frage nach der Continuität näher zu kommen, wollen wir uns vorerst über die Frage nach den Nullstellen der ganzen Function orientiren und stellen zunächst die folgenden Betrachtungen an:

Es bestehen die Sätze: *)

1) Für den absoluten Betrag $|x| = \xi$ kann man einen Werth $r$ so angeben, dafs für alle der Bedingung $|x| \geqq r$ genügenden Werthe der Variabeln der absolute Betrag einer ganzen Function $f(x)$ gröfser wird als eine vorgegebene Gröfse $g$. Es sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$= a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right),$$

dann wird

$$|f(x)| \leqq |a_0 x^n| \cdot \left|1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right|.$$

Bezeichnet man den gröfsten Werth unter den absoluten Beträgen $\left|\frac{a_\nu}{a_0}\right|$ mit $\alpha$, so liegt der absolute Betrag von $f(x)$ für diejenigen $x$ Werthe, deren Betrag $|x| = \xi$ ist, wegen der Ungleichung

$$\alpha\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \cdots + \frac{1}{\xi^n}\right) < \frac{1}{\xi}\,\frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\xi}} = \frac{\alpha}{\xi - 1}$$

zwischen den Gröfsen:

$$|a_0|\,\xi^n\left(1 - \frac{\alpha}{\xi - 1}\right) \quad \text{und} \quad |a_0|\,\xi^n\left(1 + \frac{\alpha}{\xi - 1}\right).$$

Macht man hierauf $\frac{\alpha}{\xi - 1}$ dadurch kleiner oder gleich der beliebig kleinen positiven Gröfse $\delta$, dafs man

$$|x| = \xi \geqq \frac{\alpha + \delta}{\delta}$$

setzt, so liegt der besagte absolute Betrag von $f(x)$ zwischen den Werthen

$$|a_0|\,\xi^n(1 - \delta) \quad \text{und} \quad |a_0|\,\xi^n(1 + \delta).$$

Wählt man schliefslich $|x| = r$ noch der Bedingung

$$|a_0|\,r^n(1 - \delta) > g$$

entsprechend, so wird $|f(x)|$ für alle $x$, deren Betrag $|x| \geqq r$ ist, auch gröfser als $g$.

2) Für ein $x$, dessen absoluter Betrag gröfser ist als jede angebbare Gröfse, wird ferner $|f(x)|$ wegen der Ungleichung

$$|f(x)| > |a_0|\,|x^n|\,(1 - \delta)$$

unendlich grofs.

---

*) Vergl. Serret, Höhere Algebra Bd. 1.

3) Es leuchtet auch ein, dafs man der Variabeln $x$ stets Werthe geben kann, für die der absolute Betrag desjenigen Gliedes der ganzen Function, welches die höchste Potenz von $x$ enthält, den absoluten Betrag der Summe der übrigen Glieder übertrifft.

4) Ist andrerseits eine an der Stelle $x=0$ verschwindende ganze Function gegeben

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_m x^m$$
$$= a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} x + \cdots + \frac{a_0}{a_m} x^{n-m}\right),$$

so kann man solche Variabelnwerthe $x$ finden, dafs der absolute Betrag des Gliedes $a_m x^m$ mit der niedrigsten Potenz gröfser wird als der absolute Betrag der Summe der übrigen Glieder.

Bezeichnet nämlich $\alpha$ den gröfsten unter den Werthen $\left|\frac{a_\mu}{a_m}\right|$, so ist für jeden Werth $|x| < 1$

$$\left|\frac{a_{m-1} x}{a_m}\right| + \left|\frac{a_{m-2} x^2}{a_m}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0 x^{n-m}}{a_m}\right| \leqq \frac{\alpha |x|}{1-|x|}.$$

Bedeutet dann $\delta$ eine beliebig kleine Gröfse und wählt man

$$|x| < \frac{\delta}{\alpha + \delta},$$

so wird

$$\frac{\alpha |x|}{1-|x|} < \delta,$$

und nun liegt $|g(x)|$ zwischen den Werthen

$$|a_m x^m| (1-\delta) \quad \text{und} \quad |a_m x^m| (1+\delta),$$

woraus die genannte Behauptung hervorgeht.

5) Dem ersten Satze steht der folgende gegenüber: Ist $f(x)$ eine ganze Function, deren absoluter Betrag nicht verschwindet, wenn man $x$ den bestimmten Werth $x_1$ beilegt, so kann man in beliebig kleiner Umgebung von $x_1$ Stellen $x = x_1 + h$ ermitteln, so dafs

$$|f(x_1 + h)| < |f(x_1)|.*)$$

Es war

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + f'(x_1) \frac{h}{1} + \cdots + f^{(n)}(x_1) \frac{h^n}{n!},$$

doch der Allgemeinheit wegen setzen wir fest, dafs einige der Ableitungen von $f(x)$ und zwar die ersten $\nu - 1$ verschwinden, dann ist

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + f^{(\nu)}(x_1) \frac{h^\nu}{\nu!} + \cdots + f^{(n)}(x_1) \frac{h^n}{n!}$$

und hierin $f(x_1)$ von Null verschieden, da $|f(x)|$ nicht verschwinden sollte, wenn $x = x_1$ gesetzt wird.

---

*) Serret l. c. § 43.

Bezeichnet man die endlichen Gröfsen:

$$\frac{1}{\mu!}\frac{f^{(\mu)}(x_1)}{f(x_1)} \quad \text{mit} \quad C_\mu = \alpha_\mu + i\beta_\mu \qquad (\mu = \nu, \nu+1, \ldots, n),$$

so entsteht die Formel

$$\frac{f(x_1+h)}{f(x_1)} = 1 + (\alpha_\nu + i\beta_\nu)h^\nu + \cdots + (\alpha_n + i\beta_n)h^n$$

und daneben ist:

$$\left|\frac{f(x_1+h)}{f(x_1)}\right| = |1 + (\alpha_\nu + i\beta_\nu)h^\nu + \cdots + (\alpha_n + i\beta_n)h^n|.$$

Es fragt sich nur, ob man $h$ so wählen kann, dafs die rechte Seite kleiner als 1 wird. In dem Falle eines negativen $\alpha_\nu$ kann man gewifs einen positiven reellen Werth von $h$ finden, so dafs in

$$\left|\frac{f(x_1+h)}{f(x_1)}\right| = \sqrt{(1 + \alpha_\nu h^\nu + \cdots + \alpha_n h^n)^2 + (\beta_\nu h^\nu + \cdots \beta_n h^n)^2}$$

der absolute Betrag des negativen Gliedes $2\alpha_\nu h^\nu$ den der Summe aller übrigen unter dem Wurzelzeichen stehenden Glieder, welche $h$ Potenzen enthalten, übertrifft, und dann wird in der That

$$|f(x_1+h)| < |f(x_1)|.$$

In den Fällen

$$\alpha_\nu > 0; \quad \alpha_\nu = 0, \ \beta_\nu > 0; \quad \alpha_\nu = 0, \ \beta_\nu < 0,$$

läfst sich der aufgestellte Satz beweisen, wenn man der Reihe nach Gröfsen $h$ von beliebig kleinem absoluten Betrage finden kann, für die $h^\nu$ reell und negativ, oder $h^\nu$ rein imaginär und positiv respective negativ ausfällt, denn dann sind wir auf den schon behandelten Fall zurückgeführt.*)

Versteht man unter $\Theta$ eine positive reelle Gröfse und setzt

$$h = \Theta k,$$

so mufs man nunmehr fragen, ob man Gröfsen $k$ angeben kann, für welche

$$k^\nu = -1 \quad \text{oder} \quad k^\nu = i \quad \text{oder} \quad k^\nu = -i$$

ist. Ist $\nu$ zunächst eine ungerade Zahl $2\mu+1$, so sind

$$-1, \qquad (-1)^\mu i, \qquad (-1)^\mu(-i)$$

Zahlengröfsen der verlangten Art; ist aber $\nu$ eine gerade Zahl $2^\varkappa(2\mu+1)$, so suche man in den Gleichungen

$$(k^{2^\varkappa})^{2\mu+1} = -1, i, -i$$

erst Werthe für $k^{2^\varkappa}$, deren $(2\mu+1)^{\text{te}}$ Potenz gleich $-1$, $i$, $-i$ sind. Solche Werthe $a$ haben wir eben angegeben, und es handelt sich nur mehr um eine $\varkappa$-malige Wiederholung der Aufgabe, aus einer Gröfse $a$ die zweite Wurzel zu ziehen, denn ist

*) Diesen Vorgang benützt Weierstrafs in seinen Vorlesungen.

$$k^{2^\varkappa} = a, \quad \text{so wird} \quad k^{2^{\varkappa-1}} = \sqrt{a}, \quad k^{2^{\varkappa-2}} = \sqrt{\sqrt{a}} \quad \text{usw.}$$

Die Bestimmung einer Gröfse $p + iq$, deren zweite Potenz gleich $a = \alpha + i\beta$ ist, macht aber keine Schwierigkeit, denn die Gleichung

$$\alpha + i\beta = (p + iq)^2$$

erfordert nur die Ermittlung zweier reeller Gröfsen $p$ und $q$ aus den Gleichungen

$$p^2 - q^2 = \alpha, \quad 2pq = \beta$$

oder den Gleichungen:

$$p^4 - \alpha p^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0, \quad q^4 + \alpha q^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0.$$

Es wird somit:

$$p = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}}, \quad q = \mp\sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}}$$

und wir erkennen, dafs die speciellen Gleichungen $k^\nu = -1, i, -i$ stets Wurzeln besitzen.

Jetzt aber lassen sich in allen möglichen Fällen Werthe $(x_1 + h)$ finden, für die

$$|f(x_1 + h)| < |f(x_1)|,$$

und offenbar auch Werthe in beliebig kleiner Umgebung von $x_1$, denn man kann die Gröfse $\Theta$ beliebig klein wählen.

Nach dem ersten Satze wird der absolute Betrag einer ganzen Function $f(x)$ für alle einer Bedingung $|x| \geq r$ genügenden Werthe gröfser als eine vorgegebene Gröfse $g$, und nach dem letzten Theorem kann man von jeder die Umgebung $r$ der Stelle $x = 0$ begrenzenden Stelle derart in das Innere dieses Bereiches fortschreiten, dafs $|f(x)|$ immer kleiner und kleiner wird. Der absolute Betrag $|f(x)|$ kann nicht unter den Werth Null herabsinken, kann aber der Null beliebig nahe kommen. Wenn $|f(x)|$ die untere Grenze erreicht, dann besitzt die ganze Function $f(x)$ eine Nullstelle und die Gleichung $f(x) = 0$ hat eine Wurzel.

Könnten wir nun zeigen, dafs

$$|f(x)| = |f(\xi + i\eta)| = |\varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)|$$

eine von den reellen Variabeln $\xi$ und $\eta$ abhängige stetig veränderliche Gröfse ist, oder könnten wir die Stetigkeit einer durch die Gleichung

$$z^2 - \big(\varphi^2(\xi, \eta) + \psi^2(\xi, \eta)\big) = 0$$

definirten Gröfse $z$ beweisen, dann müfste $|f(x)|$ innerhalb des durch die Bedingung $|x| < r$ definirten Bereiches die untere Grenze Null für ein Werthepaar $(\xi, \eta)$ erreichen, und jede ganze Function hat dann eine Nullstelle.

Wir kommen also auf ein neues Problem, dessen Erledigung wir besser verschieben, weil wir später die Existenz der Nullstelle und die

Continuität der ganzen Function sehr einfach erkennen werden. Es mag hier nur noch hervorgehoben werden, daſs man zum Beweise der Existenz der Wurzel einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ auch schon an dieser Stelle nach einem Verfahren forschen könnte, durch welches man eine Werthereihe

$$\xi^{(\nu)} + i\eta^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

mit der Grenzstelle $x' = \xi' + i\eta'$ so bestimmt, daſs die zugehörigen Functionswerthe mit den absoluten Beträgen:

$$|f(\xi^{(\nu)} + i\eta^{(\nu)})| = \sqrt{\varphi^2(\xi^{(\nu)}, \eta^{(\nu)}) + \psi^2(\xi^{(\nu)}, \eta^{(\nu)})}$$

eine Elementarreihe constituiren, denn dann würde dem Grenzwerthe $\xi' + i\eta'$ ein Werth

$$\sqrt{\varphi^2(\xi', \eta') + \psi^2(\xi', \eta')} = 0$$

zugehören und weil hierin $\varphi(\xi', \eta')$ und $\psi(\xi', \eta')$ einzeln verschwinden müſsten, wäre auch

$$f(\xi' + i\eta') = \varphi(\xi', \eta') + i\psi(\xi', \eta') = 0,$$

und das Verfahren hätte eine Wurzel $x' = \xi' + i\eta'$ geliefert.*)

## § 19. Gröſster gemeinsamer Theiler zweier ganzer Functionen einer Variabeln.

Nachdem wir in der Zerlegung ganzer Zahlen und ganzer Functionen eine auffallende Übereinstimmung gefunden haben, liegt es nahe, die Verwandtschaft der Theorie der ganzen Functionen mit der der ganzen Zahlen näher zu verfolgen und vor Allem die Bestimmung des gröſsten gemeinsamen Theilers zweier Functionen vom $n^{\text{ten}}$ und $m^{\text{ten}}$ Grade vorzunehmen, d. h. denjenigen algebraischen Theiler zweier Functionen zu suchen, welcher den höchsten Grad besitzt.

Lassen die gegebenen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ die Darstellungen zu:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_\mu)^{n_\mu}$$
$$g(x) = b_0(x - x_1')^{m_1}(x - x_2')^{m_2} \ldots (x - x_m')^{m_\nu},$$

wo $\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu} n_{\mu'} = n$ und $\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu} m_{\nu'} = m$ ist, und sind etwa $x_\alpha, x_\beta \ldots x_\varkappa$ gemeinsame Nullstellen und $\nu_\alpha, \nu_\beta, \ldots \nu_\varkappa$ die kleineren der zugehörigen Exponenten $n_\alpha, n_\beta, \ldots n_\varkappa$ resp. $m_\alpha, m_\beta, \ldots m_\varkappa$, *so ist* offenbar

$$(x - x_\alpha)^{\nu_\alpha}(x - x_\beta)^{\nu_\beta} \ldots (x - x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}$$

*der gröſste gemeinsame Theiler* von $f(x)$ und $g(x)$.

*) Man sehe Lipschitz' Verfahren in seinem Lehrbuche der Analysis nach. Dort sind allerdings die trigonometrischen Functionen benützt, denen wir hier bei der Reproduction des Cauchy'schen Beweises ausgewichen sind.

Es ist leicht, eine *nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle zweier Functionen:*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

aufzustellen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, dann sind durch diese $x$ Werthe die folgenden $m$ Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad x f(x) = 0, \ldots x^{m-1} f(x) = 0$$

gleichzeitig erfüllt und offenbar auch die $n$ Gleichungen

$$g(x) - y = 0, \quad x g(x) - x y = 0, \ldots x^{n-1} g(x) - x^{n-1} y = 0,$$

wenn hierin $x$ und $y$ der Reihe nach die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ resp. $g(x_1), g(x_2), \ldots g(x_n)$ erhalten.

Faſst man die $(m+n)$ genannten Gleichungen als linear in den $(m+n)$ Potenzen $x^0, x^1, \ldots x^{m+n-1}$ auf, so wird die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix}
a_0, & a_1, \ldots a_{m-1}, & a_m, & a_{m+1}, \ldots a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots 0 \\
0, & a_0, \ldots a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_m, \ldots a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \;\cdot \\
0, & 0, \ldots a_0, & a_1, & a_2, \ldots a_{n-m}, & a_{n-m+1}, & a_{n-m+2}, & \ldots a_n \\
b_0, & b_1, \ldots b_{m-1}, & b_m - y, & 0, \ldots 0, & 0, & 0, & \ldots 0 \\
0, & b_0, \ldots b_{m-2}, & b_{m-1}, & b_m - y \ldots 0, & 0, & 0, & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \;\cdot \\
0, & 0, \ldots 0, & 0, & 0, \ldots b_0, & b_1, & b_2, & \ldots b_m - y
\end{vmatrix}$$

jedesmal Null, wenn man $y$ einen der angegebenen Werthe ertheilt.

Die Determinante selbst ist eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades von $y$ mit den Nullstellen $y_\nu = g(x_\nu)$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$. Denken wir die Determinante $\Phi(y)$ nach Potenzen von $y$ geordnet, so ist das letzte von $y$ freie Glied gleich dem Producte von

$$(-1)^n . g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_n)$$

und dem Coefficienten von $y^n$ d. i. $(-1)^n a_0^m$. Dasselbe Product kann man auch gewinnen, indem man in der Determinante $y$ Null setzt, wobei eine neue Determinante $R$ entsteht. Aus der Beziehung

$$a_0^m g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_n) = R$$

schlieſst man aber, daſs die Determinante $R$ verschwinden muſs, wenn die ganze Function $g(x)$ für eine Nullstelle von $f(x)$ Null werden soll.

Ist umgekehrt $R = 0$, so besitzen die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine gemeinsame Wurzel, denn $R$ ist die Determinante der $(m+n)$ Gleichungen

$$f = 0, \quad x f = 0, \ldots x^{m-1} f = 0$$
$$g = 0, \quad x g = 0, \ldots x^{n-1} g = 0$$

mit denselben Unbekannten $x^0, x^1, \ldots x^{m+n-1}$ und diese Gleichungen können nicht (wie es $R=0$ verlangt) gleichzeitig d. h. für dieselben Werthe $x^0, x^1, \ldots x^{m+n-1}$ bestehen, wenn $f$ und $g$ keine Nullstelle gemein haben.

Daher ist $R=0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs $f(x)$ und $g(x)$ mindestens einen gemeinsamen algebraischen Theiler ersten Grades besitzen.

Die ganze Function $R$ der Coefficienten der gegebenen Functionen heifst die *Resultante* von $f$ und $g$.

Tritt an Stelle der Function $g(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ $f'(x)$, so heifst die zu $f$ und $f'$ gehörige Determinante $R$ die *Discriminante* von $f(x)$ und deren Verschwinden besagt, dafs $f(x)$ eine zweifache Nullstelle besitzt, denn die oben gewonnene, von der Existenz der Nullstellen unabhängige Darstellung der ganzen Function

$$f(x) = f(x_1) + f^{(1)}(x_1)\frac{x-x_1}{1} + f^{(2)}(x)\frac{(x-x_1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^n}{n!}$$

läfst erkennen, dafs $f(x)$ im Falle des gleichzeitigen Verschwindens von $f(x_1)$ und $f^{(1)}(x_1)$ durch $(x-x_1)^2$ theilbar ist.

Das analytische Äquivalent dafür, dafs $f(x)$ eine $\nu$fache Nullstelle $x=x_1$ besitzt, besteht in dem Verschwinden von

$$f(x_1),\quad f^{(1)}(x_1), \ldots f^{(n)}(x_1)$$

und umgekehrt wird $x_1$ unter diesen Bedingungen eine $\nu$fache Nullstelle von $f(x)$ sein.

## § 20. Fortsetzung.

Den gröfsten gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen $f_n$ und $g_m$, wo die Indices nun immer die Gradzahlen anzeigen sollen, können wir noch durch ein *Divisionsverfahren* ermitteln.

Wir bemerken, dafs man zwei gegebenen Functionen $f_n$ und $g_m$ (wo $n \geqq m$ sei) stets zwei ganze Functionen vom $(n-m)^{\text{ten}}$ und niedrigerem als dem $m^{\text{ten}}$ Grade $p_{n-m}$ und $q_{m-1}$ so zuordnen kann, dafs

$$b_0^{n-m+1} f_n = g_m p_{n-m} + q_{m-1}$$

wird.*) Bildet man nämlich

$$\begin{aligned}
b_0 f_n - a_0\, x^{n-m}\, g_m &= c_0^{(1)} x^{n-1} + c_1^{(1)} x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}^{(1)} = q_{n-1}\\
b_0 q_{n-1} - c_0^{(1)} x^{n-m-1} g_m &= c_0^{(2)} x^{n-2} + c_1^{(2)} x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}^{(2)} = q_{n-2}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_0 q_m - c_0^{(n-m)} g_m &= c_0^{(n-m+1)} x^{m-1} + c_1^{(n-m+1)} x^{m-2} + \cdots + c_{m-1}^{(n-m+1)} = q_{m-1}
\end{aligned}$$

und multiplicirt diese $(n-m+1)$ Gleichungen der Reihe nach mit

*) Vergl. Weierstrafs: Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze (in den Abhandlungen aus der Functionenlehre S. 117).

$$b_0^{n-m}, \quad b_0^{n-m-1}, \ldots b_0^1, \quad b_0^0$$

und addirt dann alle, so folgt:

$$b_0^{n-m+1} f_n - (a_0 b_0^{n-m} x^{n-m} + c_0^{(1)} b_0^{n-m-1} x^{n-m-1} + \cdots + c_0^{(n-m)}) g_m = q_{m-1}$$

oder wenn man die Klammergröfse mit $p_{n-m}$ bezeichnet, die oben angeschriebene Gleichung.

Soll $f_n$ durch $g_m$ theilbar sein, so mufs $q_{m-1}$ identisch verschwinden, und das tritt ein, wenn die aus den Coefficienten von $f_n$ und $g_m$ durch die ersten drei Rechnungsoperationen zusammengesetzten $m$ ganzen Ausdrücke

$$c_0^{(n-m+1)}, \quad c_1^{(n-m+1)}, \quad \ldots c_{m-1}^{(n-m+1)}$$

alle Null sind.

Es kann nicht mehr als ein Paar Functionen $p$ und $q$ der verlangten Art geben. Denn wäre sowohl

$$b_0^{n-m+1} f_n = g_m p_{n-m} + q_{m-1},$$

als auch

$$b_0^{n-m+1} f_n = g_m P_{n-m} + Q_{m-1},$$

so müfste

$$g_m(P_{n-m} - p_{n-m}) + (Q_{m-1} - q_{m-1}) = 0$$

sein und diese Identität erfordert, dafs die ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $Q_{m-1} - q_{m-1}$ einen Theiler $m^{\text{ten}}$ Grades $g_m$ besitze. Das geht nicht an, folglich mufs

$$Q_{m-1} \equiv q_{m-1}$$

sein. Weil nunmehr $g_m(P_{n-m} - p_{n-m})$ für jeden Werth der Variabeln verschwinden soll, schliefsen wir auch auf das identische Verschwinden von $P_{n-m} - p_{n-m}$ oder die identische Übereinstimmung von $P_{n-m}$ und $p_{n-m}$, und damit ist der Beweis geliefert.

Sollte in der früheren Folge von Gleichungen $q_{m-1}$ nicht identisch verschwinden, so bilde man neben

$$b_0^{n-m+1} f_n = g_m p_{n-m} + q_{m-1},$$

oder wie wir bequemer schreiben:

$$f_n = g_m p_{n-m} + q_{m-1},$$

indem wir den Factor $b^{m-n-1}$ in $p_{n-m}$ und $q_{m-1}$ aufnehmen, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
g_m &= q_{m-1} p_1^{(1)} + q_{m-2}, \\
q_{m-1} &= q_{m-2} p_1^{(2)} + q_{m-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
q_{\mu+1} &= q_\mu p_1^{(m-\mu)} + q_{\mu-1}, \\
q_\mu &= q_{\mu-1} p_1^{(m-\mu+1)},
\end{aligned}$$

wo für die neu eintretenden Functionen $q$ stets der gröfstmögliche Grad angenommen ist. Das nicht weiter zu erläuternde Verfahren führt nothwendig auf einen gemeinsamen Theiler $q_{\mu-1}$ von $f_n$ und $g_m$,

der für $\mu = 1$ in eine Constante übergeht; und zwar ist $q_{\mu-1}$ der gröfste gemeinsame Theiler der gegebenen Functionen, weil jeder Theiler von $f_n$ und $g_m$ in $q_{\mu-1}$ enthalten sein mufs.

Ist $q_{\mu-1}$ eine Constante, so nennt man $f$ und $g_m$ Functionen ohne gemeinsamen Theiler und deren Resultante $R$ ist von Null verschieden.

Wenn umgekehrt $f_n$ und $g_m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, ist $q_{\mu-1}$ eine Constante und dann läfst sich der Quotient von $f_n$ und $g_m$ in der Form eines *Kettenbruches* anschreiben*):

$$\frac{f_n}{g_m} = p_{m-n} + \cfrac{1}{p_1^{(1)} + \cfrac{1}{p_1^{(2)} + \dots + \cfrac{1}{p_1^{(m-1)} + \cfrac{1}{p_1^{(m)}}}}}.$$

Bildet man die Brüche, welche durch Vereinigung von $p_{n-m}$ und den ersten $\nu$ Gliedern der Kette entstehen, d. h.

$$\frac{Z_0(x)}{N_0(x)} = \frac{p_{n-m}}{1}; \quad \frac{Z_1(x)}{N_1(x)} = p_{n-m} + \frac{1}{p_1^{(1)}} = \frac{p_1^{(1)} p_{n-m} + 1}{p_1^{(1)}},$$

$$\frac{Z_2(x)}{N_2(x)} = p_{n-m} + \cfrac{1}{p_1^{(1)} + \cfrac{1}{p_1^{(2)}}} = \frac{p_1^{(2)} Z_1 + Z_0}{p_1^{(2)} N_1 + N_2}$$

usw. und durch den Schlufs von $\nu - 1$ auf $\nu$:

$$\frac{Z_\nu(x)}{N_\nu(x)} = p_{n-m} + \cfrac{1}{p_1^{(1)} + \cfrac{1}{p_1^{(2)} + \dots + \cfrac{1}{p_1^{(\nu)}}}} = \frac{p_1^{(\nu)} Z_{\nu-1} + Z_{\nu-2}}{p_1^{(\nu)} N_{\nu-1} + N_{\nu-2}}\text{**)},$$

und endlich $\dfrac{Z_m(x)}{N_m(x)} = \dfrac{f_n}{g_m}$, so erfüllen zwei aufeinander folgende Brüche die durch denselben Schlufs leicht zu verificirende Beziehung:

$$Z_{\nu-1} N_\nu - Z_\nu N_{\nu-1} = (-1)^\nu$$

und speciell ist

$$(-1)^m (Z_{m-1} g_m - N_{m-1} f_n) = 1.$$

Setzt man

$$(-1)^{m+1} N_{m+1} = \psi_{m-1}, \quad (-1)^m Z_{m-1} = \varphi_{n-1},$$

wo die Indices offenbar gerade wieder die Gradzahlen dieser Functionen anzeigen, so wird

$$\varphi_{n-1} g_m + \psi_{m-1} f_n = 1.$$

1) *Wenn also $f_n$ und $g_m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so gibt es stets zwei bestimmte ganze Functionen des $(n-1)^{ten}$ und $(m-1)^{ten}$ Grades $\varphi_{n-1}$ und $\psi_{m-1}$, welche die Gleichung:*

$$\varphi_{n-1} g_m + \psi_{m-1} f_n = 1 \qquad (\alpha)$$

*identisch erfüllen.*

*) Vergleiche Lipschitz l. c.

**) Ich schreibe ausführlich $\dfrac{p_1^{(\nu)} Z_{\nu-1} + Z_{\nu-2}}{p_1^{(\nu)} N_{\nu-1} + N_{\nu-2}}$.

2) Dann aber gibt es auch zwei ganze Functionen $\Phi_{n+k-1}$ und $\Psi_{m+k-1}$, welche der Gleichung:

$$\Phi_{n+k-1}\, g_m + \Psi_{m+k-1}\, f_n = \Theta_k$$

genügen, denn dazu hat man in der mit $\Theta_k$ multiplicirten Gleichung ($\alpha$) nur

$$\varphi_{n-1}\,\Theta_k = \Phi_{n+k-1}\,, \quad \psi_{m-1}\,\Theta_k = \Psi_{m+k-1}$$

zu setzen.

Bildet man hingegen

$$\varphi_{n-1}(g_m\,\Theta_k) + \psi_{m-1}(f_n\,\Theta_k) = \Theta_k$$

und bezeichnet $g_m\,\Theta_k$ und $f_n\,\Theta_k$ mit $G_{m+k}$ und $F_{n+k}$, so sind diese Functionen mit dem gemeinsamen Theiler $\Theta_k$ zwei Functionen $\varphi_{n-1}$ und $\psi_{m-1}$ derart zugeordnet, dafs

$$\varphi_{n-1}\, G_{m+k} + \psi_{m-1}\, F_{n+k} = \Theta_k$$

wird.

3) Daraus schliefst man, dafs man in dem Falle, wo $g_m$ und $f_n$ einen gemeinsamen Theiler $k^{\text{ten}}$ Grades $\Theta_k$ besitzen, zwei ganze Functionen $\varphi_{n-k-1}$ und $\psi_{m-k-1}$ bestimmen kann, welche die Gleichung:

$$\varphi_{n-k-1}\, g_m + \psi_{m-k-1}\, f_n = \Theta_k$$

erfüllen; für zwei derartige Functionen existirt aber auch eine Gleichung

$$\varphi_{n-k}\, g_m + \psi_{m-k}\, f_n = 0\,,$$

denn es mufs ja einmal

$$f_n = \varphi_{n-k}\,\Theta_k\,, \quad g_n = -\,\psi_{m-k}\,\Theta_k$$

sein; niemals aber ist eine Gleichung der Gestalt

$$\varphi_{n-k-1}\, g_m + \psi_{m-k-1}\, f_n = \Theta_{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1,\, 2,\, \ldots k)$$

möglich. In der That setzt man

$$\frac{g_m}{\Theta_k} = -\,\psi_{m-k}\,, \quad \frac{f_n}{\Theta_k} = \varphi_{n-k}\,,$$

so existirt für diese Functionen ohne gemeinsamen Theiler eine und und nur eine Gleichung der Form:

$$\varphi_{n-k-1}\,\psi_{m-k} + \psi_{m-k-1}\,\varphi_{n-k} = 1\,,$$

mit der die obige nicht vereinbar ist.

4) *Besteht eine Gleichung:*

$$\varphi_{n-k}\, g_m + \psi_{m-k}\, f_n = 0\,,$$

*aber niemals eine Gleichung der Gestalt:*

$$\varphi_{n-k-1}\, g_m + \psi_{m-k-1}\, f_n = 0\,,$$

*so haben $f_n$ und $g_m$ einen gröfsten gemeinsamen Theiler $k^{\text{ten}}$ Grades.*

Setzten wir voraus, dafs

$$f_n = \varphi_{n-k}\,\Theta_k + \varphi'_{n-k-1}$$

$$g_m = -\,\psi_{m-k}\,\Theta_k - \psi'_{m-k-1}$$

wäre, so ergäbe sich nach Multiplication dieser Gleichungen mit $\psi_{m-k}$ resp. $\varphi_{n-k}$ und dann folgender Addition die Beziehung:

$$\varphi'_{n-k-1}\,\psi_{m-k} - \psi'_{m-k-1}\,\varphi_{n-k} = 0,$$

doch darum würde die Summe:

$$\varphi'_{n-k-1}\,g_m + \psi'_{m-k-1}\,f_n = 0.$$

Eine solche Gleichung sollte aber nicht existiren, folglich ist die Annahme unrichtig und $f_n$ und $g_m$ besitzen den Theiler $\Theta_k$, aber gewifs keinen Theiler höheren Grades, denn dann müfste eine Gleichung der ausgeschlossenen Art bestehen.

Das analytische Äquivalent dafür, dafs $f(x)$ den Theiler $g_{nn}$ besitzt, lag in dem Verschwinden von $m$ ganzen Ausdrücken $c_\nu^{(n-m+1)}$ in den Coefficienten von $f_n$ und $g_m$. Ebenso müssen $k$ ganze Functionen dieser Coefficienten verschwinden, wenn $f_n$ und $g_m$ einen gemeinsamen Theiler $k^{\text{ten}}$ Grades haben sollen, denn damit in der Folge von Gleichungen auf S. 101 $q_{\mu-1}$ vom Grade $k$ wird, mufs diese Folge mit der Gleichung

$$q_{k+1} = q_k\,p_1^{(m-k+1)} + q_{k-1}$$

abbrechen und hierin die ganze Function $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades $q_{k-1}$ mit $k$ Coefficienten identisch Null sein.*)

Mit Hilfe der hier abgeleiteten Sätze lassen sich die für die ganzen Zahlen aufgestellten Theoreme über die Theilbarkeit auf die ganzen Functionen übertragen.

1) Sind $f_n$ und $g_m$ ganze Functionen ohne gemeinsamen Theiler und ist $k$ eine beliebige dritte Function, so ist jeder gemeinsame Theiler von $f_n k$ und $g_m$ auch Theiler von $k$.

Es ist nämlich

$$g_m\varphi_{n-1} + f_n\,\psi_{m-1} = 1$$
$$g_m\varphi_{n-1}k + f_n k\,.\,\psi_{m-1} = k$$

und jeder Theiler von $f_n k$ und $g_m$ ist Theiler der links stehenden Summe, er mufs daher auch in $k$ allein vorkommen.

2) Das Product zweier Functionen $f_n$ und $k$, von denen keine durch $g_m$ theilbar ist, kann kein Vielfaches von $g_m$ sein.

3) Sind $f_n$ und $g_m$ Functionen ohne gemeinsamen Theiler, ist aber $g_m$ ein Theiler von $f_n k$, so mufs $k$ durch $g_m$ theilbar sein.

4) Besitzen $f_n$ und $g_m$ keinen gemeinsamen Theiler, so ist jedes gemeinsame Vielfache dieser Functionen von der Form $f_n g_m k$, ist aber $f_n = \varphi\Theta$, $g_m = \psi\Theta$ und haben $\varphi$ und $\psi$ keinen Theiler gemein, so erhält jedes Vielfache von $f_n$ und $g_m$ die Gestalt $\varphi\psi\Theta k_1$ und $\varphi\psi\Theta$ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Die Vielfachen von $f_n$ und $g_m$ besitzen nämlich die Gestalt $f_n p$

*) Weierstrafs l. c. S. 121.

und $g_m q$, und wenn hier $f_n p$ durch $g_m$, $g_m q$ durch $f_n$ theilbar sein soll, mufs nach dem ersten Satze $p = g_m k_1$, $q = f_n k_2$ sein und das gemeinsame Vielfache von $f_n$ und $g_m$ erhält die Gestalt $f_n g_m k$.

Damit ferner die Vielfachen von $\varphi\Theta$ und $\psi\Theta$ z. B. $\varphi\Theta p$ und $\psi\Theta q$ durch einander theilbar sind, mufs wieder $p = \varphi k_1$, $q = \varphi k_2$ werden, und das gemeinsame Vielfache nimmt die Form $\varphi\psi\Theta k$ an.—

Ein weiteres Resultat dieser Untersuchungen besteht darin, dafs wir, ohne den Existenzbeweis der Nullstellen einer ganzen Function und den Beweis für die Darstellung jeder Function $f(x)$ durch ein Product von Primfactoren erbracht zu haben, Zähler und Nenner eines Quotienten ganzer Functionen $\frac{f}{g}$ stets von den gemeinsamen Primfactoren und Theilern befreien können. Der *Quotient* von $f_n = \varphi\Theta$ und $g_m = \psi\Theta$ hat überall dort, wo $\Theta$ von Null verschieden ist, den Werth, welchen der Quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ angibt. Ist $\Theta$ an einer Stelle $x_1$ Null, so setzt man als Werth des Quotienten

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

für $x = x_1$, ebenfalls den Werth $\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$, wenngleich man aus der Relation

$$f\psi - g\varphi = 0$$

diesen Schlufs nicht ziehen kann, weil $f$ und $g$ Null sind. Doch diese Festsetzung ist darin begründet, dafs der Quotient $F(x)$ nach einem bestimmten Werthe und zwar nach $\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$ convergirt, wenn man $x$ nach der Nullstelle von $\Theta(x)$ führt.

## § 21. Ganze rationale Functionen mehrerer unabhängiger Variabeln.

Es ist auch nothwendig, die ganzen Functionen mehrerer von einander unabhängiger Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = A_1 x_1^{m_1^{(1)}} x_2^{m_2^{(1)}} \ldots x_n^{m_n^{(1)}} + A_2 x_1^{m_1^{(2)}} x_2^{m_2^{(2)}} \ldots x_n^{m_n^{(2)}} + \cdots$$
$$+ A_\varkappa x_1^{m_1^{(\varkappa)}} x_2^{m_2^{(\varkappa)}} \ldots x_n^{m_n^{(\varkappa)}}$$

zu betrachten.

Ordnet man diese Function nach fallenden Potenzen einer Variabeln, z. B. $x_1$, so entsteht ein Ausdruck

$$a_0 x_1^{n_1} + a_1 x_1^{n_1 - 1} + \cdots + a_{n_1},$$

in welchem die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n_1}$ Functionen der übrigen $(n-1)$ Variabeln sind. Jede dieser Functionen denke man etwa nach $x_2$ geordnet:

$$a_\nu = a_{\nu,0} x_2^{n_2^{(\nu)}} + a_{\nu,1} x_2^{n_2^{(\nu)} - 1} + \cdots + a_{\nu, n_2^{(\nu)}} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots n_1),$$

und wiederum sind $a_{\nu,\mu}$ ganze Functionen von $x_3, x_4, \ldots x_n$; so fahre man fort.

Wenn in $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ $x_1$ in der $n_1^{\text{ten}}$, $x_2$ in der $n_2^{\text{ten}}$, $x_n$ in der $n_n^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt und man gibt dann $x_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ die $n_\nu + 1$ verschiedenen Werthe:

$$\xi_{\nu,1}, \ \xi_{\nu,2} \ldots \xi_{\nu, n_\nu + 1}$$

und setzt voraus, daſs $f$ für jede Werthecombination

$$x_1 = \xi_{1,\alpha_1}, \quad x_2 = \xi_{2,\alpha_2}, \quad \ldots \ x_n = \xi_{n,\alpha_n}$$

verschwindet, wo $\alpha_\nu$ irgend einen der Werthe $1, 2, \ldots n_\nu + 1$ bezeichnet, so müssen sämmtliche Constanten in $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ Null sein, d. h. $f$ verschwindet identisch, was für ein Werthesystem

$$x_1 = \xi, \ x_2 = \xi_2, \ \ldots x_n = \xi_n$$

man auch wählen mag.

Gibt man den Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ irgend feste der vorgelegten Werthe, so verschwindet die ganze Function $f$ noch für $n_1 + 1$ Werthe von $x_1$ und das ist nur möglich, wenn sämmtliche Constanten

$$a_0, a_1 \ldots a_{n_1}$$

Null sind. Da man denselben Schluſs ziehen muſs, welche der Werthecombinationen für $x_2, x_3, \ldots x_n$ auch verwendet werden, so müssen in jeder ganzen Function $a_0, a_1, \ldots a_{n_1}$ von $x_2, x_3 \ldots x_n$ alle Coefficienten verschwinden und dann ist $f$ identisch Null.

*Eine ganze Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vom $n_\nu^{\text{ten}}$ Grade in*

$$x_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

*wird demnach für jedes Werthesystem $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ Null, wenn sie für die*

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_n + 1)$$

*Combinationen aus $n_1 + 1$ Werthen für $x_1$, $n_2 + 1$ Werthen für $x_2$, und $n_n + 1$ Werthen für $x_n$ verschwindet.*

Wenn jede ganze Function einer Variabeln Nullstellen hat, leuchtet ein, daſs eine ganze Function mehrerer Variabeln unendlich viele Nullstellen $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ besitzen wird, doch unter diesen können nicht alle aus $n_\nu + 1$ Werthen für $x_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ gewonnenen Combinationen vorkommen, sonst wäre die ganze Function an jeder Stelle Null.*)

Zwei ganze Functionen, von denen keine $x_\nu$ in höherem als dem

---

*) In jeder Umgebung einer Nullstelle der ganzen Function liegen schon unendlich viele andere Nullstellen, doch die Gesammtheit constituirt nur ein Continuum von $(2n-2)$-facher Ausdehnung, indem man $(n-1)$ der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige Werthe geben kann und die Werthe der $n^{\text{ten}}$ nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können, wenn die ganze Function nicht identisch Null werden soll. Andernfalls gäbe es nämlich eine Häufungsstelle $(x)$, in deren Umgebungen unendlich viele Werthesysteme $(x')$ liegen, für die die Function verschwindet.

$n_\nu^{\text{ten}}$ Grade enthält, werden nun offenbar in den Coefficienten gleichnamiger Glieder $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ übereinstimmen, wenn sie für alle Werthesysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die man aus

$$x_\nu = \xi_{\nu,1},\ \xi_{\nu,2},\ \ldots\ \xi_{\nu,n_\nu+1} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

zusammensetzen kann, dieselben Werthe annehmen.

Auf diesem Satze beruht die Verallgemeinerung der Lagrange-schen Formel, die wieder anzeigt, wie eine ganze Function

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

aus den Werthen zusammengesetzt ist, welche sie an

$$(n_1+1)(n_2+1) \ldots (n_n+1)$$

Stellen der in Rede stehenden Art annimmt.

Der arithmetische Bau der Formel für $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ist nicht schwer zu beurtheilen, wenn man nur die Lagrange'sche Formel wiederholt anwendet. Zunächst ist:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{n_1+1} f(\xi_{1,\alpha_1}, x_2, \cdots x_n) \frac{(x_1-\xi_{1,1})\cdots(x_1-\xi_{1,\alpha_1-1})(x_1-\xi_{1,\alpha_1+1})\cdots(x_1-\xi_{1,n_1+1})}{(\xi_{1,\alpha_1}-\xi_{1,1})\cdots(\xi_{1,\alpha_1}-\xi_{1,\alpha_1-1})(\xi_{1,\alpha_1}-\xi_{1,\alpha_1+1})\cdots(\xi_{1,\alpha_1}-\xi_{1,n_1+1})}$$

und diese Formel gibt für jedes Werthesystem $(x_1 = \xi_{1,\alpha_1}, x_2, \ldots x_n)$ die verlangte Identität. Zerlegt man hierauf:

$$f(\xi_{1,\alpha_1}, x_2, \ldots x_n) = \xi_{1,\alpha_1}^{n_1} f_0^{(\alpha_1)}(x_2, x_3 \ldots x_n)$$
$$+ \xi_{1,\alpha_1}^{n_1-1} f_1^{(\alpha_1)}(x_2, x_3 \ldots x_n) + \cdots + f_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

und wendet die Lagrange'sche Formel auf die ganzen Functionen $f^{(\alpha_1)}$ von $(n-1)$ Variabeln von Neuem an, so kann man schliefslich so verfügen, dafs die $(n_1+1)(n_2+1) \ldots (n_n+1)$ Gröfsen

$$f(\xi_{1,\alpha_1}, \xi_{2,\alpha_2}, \ldots \xi_{n,\alpha_n})$$

vorgeschriebene Werthe $\eta_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ annehmen. —

Entsprechend der Darstellung:

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)\frac{h}{1} + f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$$

kann man auch $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ als Summe von Gliedern

$$h_1^{\nu_1} h_2^{\nu_2} \ldots h_n^{\nu_n}$$

mit Coefficienten, die ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, ausdrücken, man hat nur den binomischen Lehrsatz zur Entwicklung des einzelnen Gliedes

$$(x_1+h_1)^{m_1}(x_2+h_2)^{m_2} \ldots (x_n+h_n)^{m_n}$$

anzuwenden. Man sieht, dafs die Differenz

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die Gestalt

$$f_1(x_1, x_2 \cdots x_n)h_1 + f_2(x_1, x_2, \cdots x_n)h_2 + \cdots + f_n(x_1, x_2 \cdots + x_n)h_n$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n; h_1, h_2, \ldots h_n)$$

erhält, wo $f_\nu$ und $\varphi_\nu$ ganze Functionen ihrer Argumente sind und $\varphi_\nu$ mit den $n$ Gröſsen $h$ verschwinden.

Bezeichnet man die Ableitungen von $f$ als ganze Function von $x_\nu$ allein betrachtet mit

$$f_{x_\nu}^{(1)}, f_{x_\nu}^{(2)}, \cdots f_{x_\nu}^{(n_\nu)} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2}, \cdots \frac{\partial^{n_\nu} f}{\partial x_\nu^{n_\nu}}$$

und bildet man

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_\nu + h_\nu, x_{\nu+1}, \ldots x_n)$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_\nu} h_\nu + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2} \frac{h_\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\partial^{n_1} f}{\partial x_\nu^{n_1}} \frac{h_\nu^{n_1}}{n_1!},$$

so zeigt eine einfache Ueberlegung, daſs

$$f_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

sein muſs. Man nennt diese ganze Function $f_\nu$ *die erste Derivirte der Ableitung von $f$ nach der Variabeln $x_\nu$.*

Von dieser Function kann man Ableitungen nach anderen Variabeln $x_\mu$ bilden. Bezeichnet man $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ und $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$, so wird aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}.$$

Erinnert man sich, wie der Ableitungsproceſs definirt war, so ist klar, daſs dieser Satz bewiesen sein wird, wenn er an dem einzelnen Gliede der ganzen Function $f$:

$$A_{m_1, m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

bestätigt werden kann. Es ist in der That:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(m_\nu A_{m_1, m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_{\nu-1}^{m_{\nu-1}} x_\nu^{m_\nu - 1} x_{\nu+1}^{m_{\nu+1}} \ldots x_n^{m_n}\right)$$
$$= m_\nu m_\mu A_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_\nu^{m_\nu - 1} \ldots x_\mu^{m_\mu - 1} \ldots x_n^{m_n}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(m_\nu A_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_\mu^{m_\mu - 1} \ldots x_n^{m_n}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_\mu}, \text{ w. z. b. w.}$$

Dieser Satz ist dahin zu verallgemeinern, daſs in

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n} \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}$$

das Resultat unabhängig ist von der Folge der Ableitungsprocesse. Nun fällt es nicht mehr schwer, das einzelne Glied:

$$A_{m_1, m_2, \ldots m_n}(x_1+h_1)^{m_1}(x_2+h_2)^{m_2}\ldots(x_n+h_n)^{m_n}$$
$$= \varphi(x_1+h_1, \ldots x_n+h_n)$$

aus $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ als Summe von Gliedern

$$h_1^{\mu_1} h_2^{\mu_2} \ldots h_n^{\mu_n}$$

anzuschreiben, deren Coefficienten zusammengesetzte Ableitungen von $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sind. Das allgemeine Glied ist offenbar:

$$A_{m_1 m_2 \ldots m_n} \cdot h_1^{\mu_1} h_2^{\mu_2} \ldots h_n^{\mu_n} x_1^{m_1-\mu_1} x_2^{m_2-\mu_2} \ldots$$
$$\ldots x_n^{m_n-\mu_n} \binom{m_1}{m_1-\mu_1}\binom{m_2}{m_2-\mu_2}\ldots\binom{m_n}{m_n-\mu_n}$$
$$= A_{m_1 m_2 \ldots m_n} \prod_{\nu=1}^{n} h_\nu^{\mu_\nu} x_\nu^{m_\nu-\mu_\nu}(m_\nu)(m_\nu-1)\ldots(m_\nu-\mu_\nu+1)\frac{1}{\mu_\nu!}$$
$$= \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\ldots\partial x_n^{\mu_n}} \frac{h_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\frac{h_2^{\mu_2}}{\mu_2!}\ldots\frac{h_n^{\mu_n}}{\mu_n!},$$

und darnach wird

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$$
$$= \sum_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n = 0}^{n_1, n_2, \ldots n_n} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}} \frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{h_1^{\nu_2}}{\nu_2!}\frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!},$$

wo in der $n$-fachen Summe für $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n$ alle Werthecombinationen aus

$$\nu_1 = 0, 1, 2 \ldots n_1; \quad \nu_2 = 0, 1, 2 \ldots n_2; \quad \ldots \nu_n = 0, 1, 2 \ldots n_n$$

zu setzen sind. Der Werth des allgemeinen Gliedes, in welchem $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = 0$ ist, ist $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Die Summe

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$$

kann nicht gröfser sein als die gröfste der Summen der Exponenten in den einzelnen Gliedern $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

Setzt man in der letzten Formel für $x_n$ $a_n$ und für

$$h_n \quad (x_\nu - a_\nu) \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

so erhält man für die ganze Function $f$ die Darstellung:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$= \sum_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n} \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\right)_{x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots x_n=a_n,} \frac{(x_1-a_1)^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{(x_2-a_2)^{\nu_2}}{\nu_2!}\ldots\frac{(x_n-a_n)^{\nu_n}}{\nu_n!}$$

wo die neben der Ableitung von $f$ stehenden Werthe für $x_n$ anzeigen sollen, dafs man der Ableitung den Werth zu ertheilen hat, welchen sie an der Stelle $(a)$ besitzt.

Wir führen die hier gebrauchte Bezeichnung für die Ableitungen auch in dem Falle einer Function einer Variabeln ein, schreiben aber statt runder grade $d$, um ein Unterscheidungszeichen für die vollständige und die oben vorkommende theilweise (partielle) Ableitung nach einer der Variabeln $x_\nu$ zu besitzen, und erhalten:

$$f(x+h)$$
$$= f(x) + \frac{df(x)}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x)}{dx^n}\frac{h^n}{n!},$$
$$f(x) = \big(f(x)\big)_{x=a} +$$
$$+ \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_a \frac{x-a}{1} + \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right)_a \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_a \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Man ordne die ganze Function noch in anderer Weise, bilde in jedem Gliede

$$A_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

die Summe der Exponenten $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$ die sogenannte *Gradzahl des Gliedes* und fasse die Glieder gleichen Grades zusammen.

Nennt man eine ganze Function, deren Glieder alle denselben Grad besitzen, ganze *homogene* Function, so läſst sich jede ganze Function $f$ als Summe homogener Functionen

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_m$$

darstellen, in welchen der Index den Grad des Gliedes anzeige. Die höchste dieser Gradzahlen $m$ heiſst die *Dimension* der Function $f$.

Ist eine ganze Function $f$ ohne constantes Glied $f_0$ gegeben,

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_m,$$

so ist $f$ in der Umgebung der Stelle (0) eine stetige veränderliche Gröſse.

Bezeichnet nämlich $g_\mu$ eine positive Gröſse, die gröſser ist als der gröſste unter den Beträgen der Coefficienten in der homogenen Function $f_\mu$, so ist

$$|f_\mu| < g_\mu (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^\mu.$$

Ist ferner $g$ eine positive Gröſse, gröſser als jedes der $g_\mu$, und nennt man die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \; \xi$, so wird:

$$|f(x_1, x_2 \ldots x_n)| < g(\xi + \xi^2 + \cdots + \xi^m) < g\xi \frac{1}{1-\xi}.$$

Jetzt kann man aber $\xi$ so wählen, daſs $g\xi\frac{1}{1-\xi}$ kleiner wird als eine beliebig kleine Gröſse $\delta$, und darum gibt es auch eine Umgebung $r$ der Stelle (0) derart, daſs für jede Stelle derselben

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n)| < \delta$$

wird und das ist die nothwendige Bedingung für die Stetigkeit der Function $f$ in dem genannten Bereiche.

Aus der Darstellung jeder ganzen Function $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ als Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern:

$$A_{m_1 m_2 \dots m_n}(x_1 - a_1)^{m_1} (x_2 - a_2)^{m_2} \dots (x_n - a_n)^{m_n}$$

folgt aber, *dafs jede ganze Function in der Umgebung jeder endlichen Stelle* $(a)$ *stetig ist,* denn man kann den absoluten Betrag von

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) - (a_1, a_2, \dots a_n)$$

oder

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) - \left(\frac{\partial^0 f(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial x_1^0, \partial x_2^0 \dots \partial x_n^0}\right)_{a_1, a_2 \dots a_n}$$

kleiner machen als eine beliebig kleine Gröfse $\delta$, indem man die Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ in hinreichend kleiner Umgebung der Stelle $(a)$ erhält.

## § 22. Gemeinsame Theiler zweier ganzer Functionen mehrerer Variabeln.

Wir fassen auch wieder das gegenseitige Verhalten zweier ganzer Functionen $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ und $g(x_1, x_2 \dots x_n)$ ins Auge.

Vor Allem läfst sich den früheren Sätzen das Theorem entnehmen:

> Die Function $g(x_1, x_2 \dots x_n)$, als eine von $x_1$ abhängige Gröfse betrachtet, wird bei jedem Werthesystem $x_2, x_3 \dots x_n$ ein Theiler der ganzen Function $f$ von $x_1$ sein, wenn so viele ganze Functionen von $x_2, x_3 \dots x_n$ identisch verschwinden, als der Grad von $g$ in $x_1$ anzeigt.

Für ganze Functionen $f_n$ und $g_m$ einer Variabeln bestand eine bestimmte Gleichung

$$b_0^{n-m+1} f_n = p_{n-m} g_m + q_{m-1},$$

und damit $f_n$ durch $g_m$ theilbar war, mufste $q_{m-1}$ identisch verschwinden. Indem nun in unserem Falle die Coefficienten von $q_{m-1}$ ganze Ausdrücke in den Variabeln $x_2, x_3 \dots x_n$ werden, ist die Behauptung richtig.

Um aber zeigen zu können, dafs unter den genannten Bedingungen, die auf das Verschwinden ganzer Ausdrücke in den Constanten von $f$ und $g_\nu$ zurückkommen, $f$ überhaupt durch $g$ theilbar ist, als Function welcher Variabeln wir auch $f$ und $g$ auffassen, und dafs dann

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = k(x_1, x_2, \dots x_n) \cdot g(x_1, x_2 \dots x_n)$$

wird, setzen wir mit Weierstrafs, in der Vermuthung, den Beweis mit Hilfe des Schlusses von $(n-1)$ auf $n$ erbringen zu können, fest:

1) Für zwei oder mehrere Functionen von $(n-1)$ Variabeln mit einem gemeinsamen Theiler gibt es auch einen gröfsten Theiler,

der durch die Eigenschaft definirt ist, dafs er ein Vielfaches jedes gemeinsamen Theilers ist.

2) Sind $f$ und $g$ ganze Functionen von $(n-1)$ Variabeln ohne gemeinsamen Theiler und keine dritte Function dieser Variabeln, so ist jeder Theiler von $fk$ und $g$ ein Theiler von $k$.

3) Mehrere Functionen von $(n-1)$ Variabeln besitzen auch gemeinsame Vielfache und es existirt eines, das in allen übrigen als Theiler vorkommt. —

Ferner bemerken wir, dafs eine Function $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, die bei jedem Werthe von $x_1$ durch $g(x_2, x_3 \ldots x_n)$ theilbar ist, die Gestalt

$$g(x_2, x_3, \ldots x_n) \,.\, k(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

besitzt.

In der That: ist

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_0\,(x_2, x_3 \ldots x_n)\,x_1^{n_1} + f_1\,(x_2, x_3, \ldots x_n)\,x_1^{n_1-1} + \cdots$$
$$+ f_n(x_2, x_3, \ldots x_n),$$

so kann man die $(n_1+1)$ Functionen $f_\iota$ als lineare Function der in der Darstellung:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{n_1+1} f(\xi_\mu, x_2, x_3 \ldots x_n)\, \frac{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{\mu-1})(x-\xi_{\mu+1})\ldots(x-\xi_{n+1})}{(\xi_\mu-\xi_1)\ldots(\xi_\mu-\xi_{\mu-1})(\xi_\mu-\xi_{\mu+1})\ldots(\xi_\mu-\xi_{n+1})}$$

vorkommenden Gröfsen $f(\xi_\mu, x_2, \ldots x_n)$ ausdrücken, die der Voraussetzung nach durch $g(x_2, x_3 \ldots x_n)$ theilbar sind. (Unter $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n+1}$ sind ganz beliebige endliche Gröfsen zu verstehen.) Deshalb werden die Functionen $f_\iota(x_2, x_3 \ldots x_n)$ durch $g$ theilbar sein und der Satz erscheint erwiesen.

Ist nun $f(x_1^{(n)}, x_2, \ldots x_n)$ durch eine Function

$$g(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m-1} + \cdots + g_m,$$

wo die Functionen $g_0, g_1 \ldots g_m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, theilbar in Hinsicht auf die Variable $x_1$, so wird

$$g_0^{n-m+1} f - p_{n-m}\, g = q_{m-1} = 0,$$

oder wenn man

$$g_0^{n-m+1}(x_2, x_3 \ldots x_n) = \gamma$$

setzt,

$$\gamma f - p_{n-m} g = 0.$$

Zufolge der Voraussetzung über die Beschaffenheit der Functionen $g_0, g_1 \ldots g_m$ kann $\gamma$ kein Theiler von $g$ sein, $\gamma$ mufs vielmehr in $p_{n-m}$ als Theiler vorkommen und dann wird

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = g(x_1, x_2, \ldots x_n)\; k(x_1, x_2 \ldots x_n), \text{ w. z. b. w.}$$

Besitzen $f$ und $g$ als Functionen von $x_1$ einen gemeinsamen Theiler $k^{\text{ten}}$ Grades $\Theta$, so existirt einmal eine Gleichung

$$\varphi g + \psi f = \Theta.$$

Die aus den Coefficienten der $x_1$ Potenzen in $f$ und $g$ gebildeten Coefficienten von $\varphi$, $\psi$, $\Theta$ werden hierin gebrochene rationale Ausdrücke sein können, aber es ist klar, dafs man $\Theta$ die Form

$$x_1^k + \frac{\Theta_1}{\Theta_0} x_1^{k-1} \dots + \frac{\Theta_k}{\Theta_0}$$

geben kann, wo die Coefficienten $\Theta_k$ ganze Ausdrücke in den Variabeln $x_2, x_3, \dots x_n$ sind.

Wir denken die gemeinsamen Theiler dieser $k$-Functionen von $(n-1)$ Variabeln weggeschafft, und bezeichnen:

$$\Theta_0 x_1^k + \Theta_1 x_1^{k-1} + \dots + \Theta_k = \vartheta(x_1, x_2 \dots x_n),$$

dann erfordert die Voraussetzung, $f$ besitze als Function von $x_1$ den Theiler $\Theta$, die Existenz einer Beziehung

$$M(x_2, x_3 \dots x_n) f(x_1, x_2 \dots x_n) = N(x_1, x_2, \dots x_n)\, \vartheta(x_1, x_2 \dots x_n),$$

wo $M$ und $N$ ganze Ausdrücke bedeuten. Die Function $M$ mufs in $N$ oder $\vartheta$ als Theiler vorkommen, kann aber nicht Theiler von $\vartheta$ sein, weil die Functionen $\Theta_k$ keinen gemeinsamen Theiler mehr besitzen sollen, defshalb wird

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \vartheta(x_1, x_2 \dots x_n)\, P(x_1, x_2 \dots x_n)$$

und entsprechend

$$g(x_1, x_2 \dots x_n) = \vartheta(x_1, x_2, \dots x_n)\, Q(x_2, x_3, \dots x_n).$$

Wir finden demnach, dafs $\vartheta(x_1, x_2, \dots x_n)$ auch als Function von $x_2, x_3, \dots x_n$ betrachtet gemeinsamer Theiler von $f$ und $g$ ist, sobald die Functionen $\Theta_k$ von den gemeinsamen Theilern von $(n-1)$ Variabeln befreit sind.

Man kann nunmehr die gemeinsamen Theiler zweier ganzen Functionen von $n$ Variabeln angeben, wenn man die Theiler von Functionen von $(n-1)$ Variabeln zu finden vermag, und da die Lösung dieser Aufgabe in dem Falle *einer* Variabeln auszuführen ist, mufs sie allgemein möglich sein.

Wir haben in $\vartheta(x_1, x_2, \dots x_n)$ den gröfsten Theiler von $f$ und $g$ angegeben, der alle gemeinsame Theiler dieser Functionen enthält, denn die Functionen $P$ und $Q$ erfüllen die Gleichung:

$$\psi Q + \varphi P = 1,$$

die aussagt, dafs $Q$ und $P$ als Functionen der Variabeln $x_1$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen und dann können sie auch als Functionen von $x_\nu$ keinen gemeinsamen Theiler haben. —

Ist die Function $g$ nicht in $f$ enthalten, wohl aber ein Theiler des Productes $fk$, so besteht eine Gleichung:

$$\varphi g + \psi f = 1,$$

in welcher die Coefficienten von $\varphi$ und $\psi$ den kleinsten gemeinsamen

Nenner $n(x_2, x_3 \ldots x_n)$ besitzen mögen. Dividirt man hierauf die Gleichung

$$\varphi k g + \psi f k = k$$

durch $g$, so folgt eine Beziehung:

$$\frac{K(x_1, x_2 \ldots x_n)}{n(x_2, \ldots x_n)} = \frac{k}{g}$$

oder

$$k \cdot n(x_2 \ldots x_n) = g \cdot K(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Setzen wir fest, daſs $g$ nicht in das Product zweier ganzer Functionen zerlegbar sei, deren eine blos $(n-1)$ Variable enthält, so wird

$$k = g \cdot K'(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

d. h. $K$ ist durch $n$ und $k$ durch $g$ theilbar.

Endlich besteht auch für ganze Functionen von $n$ Variabeln der Satz:

> Jedes Vielfache zweier Functionen $f$ und $g$ ohne gemeinsamen Theiler ist durch $fgk$ und jedes Vielfache von $f = \varphi\vartheta$ und $g = \psi\vartheta$ durch $\varphi\psi\vartheta k$ gegeben.

## § 23. Rationale gebrochene Functionen.

Handelt es sich nun darum, den Quotienten ganzer Functionen $f$ und $g$, d. h. die rationale gebrochene Function

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

zu untersuchen, die an jeder Stelle, die nicht Nullstelle des Nenners ist, einen bestimmten Werth besitzt, so können wir $f$ und $g$ von dem gröſsten gemeinsamen Theiler $\vartheta$ befreit denken, denn

$$F = \frac{f}{g} = \frac{\varphi\vartheta}{\psi\vartheta}$$

hat an allen Stellen, die nicht Nullstellen von $\vartheta$ sind, den Werth, welchen $\frac{\varphi}{\psi}$ daselbst besitzt, und der Werth von $F$ an einer Nullstelle $(x^{(0)})$ von $\vartheta$ darf wieder als der Werth von

$$\frac{\varphi((x^{(0)}))}{\psi((x^{(0)}))}$$

definirt werden, indem der Werth von $F$ nach eben diesem convergirt, wenn die Stelle $(x)$ nach $(x^{(0)})$ convergirt.

Zur Beurtheilung der Beschaffenheit der rationalen Function $F$ haben wir demnach nur mehr die Fälle zu untersuchen, wo der Nenner $g$ aber der Zähler $f$ nicht verschwindet, oder wo $g$ und $f$ dieselbe Nullstelle besitzen, ohne daſs das gleichzeitige Verschwinden von $f$

und $g$ durch das Nullwerden eines gemeinschaftlichen Theilers verursacht ist.

*Verschwindet $g$ an einer Stelle $(a)$, ist aber $|f((a))| > 0$, so wird der absolute Betrag von $F$ für die der Stelle $(a)$ unendlich benachbarten Stellen gröfser als jede angebbare Gröfse $G$ und dann sagt man, $F$ wird an der Stelle $(a)$ selbst unendlich.*

In der That: nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ kann man zunächst eine Umgebung $(r)$ von $(a)$ so bestimmen, dafs für alle Stellen derselben

$$\delta > |f((x)) - f((a))| \geqq \big|\, |f((x))| - |f((a))| \,\big|,$$

und somit

$$|f((x))| > |f((x))| - \delta$$

wird. Wählt man hierauf eine positive Gröfse $\gamma$ so klein, dafs

$$\frac{|f((a))| - \delta}{\gamma} > G,$$

und $\gamma$ selbst noch gröfser ist als der gröfste der Werthe:

$$|g(x_1, x_2, \ldots x_n) - g((a))| = |g((x))|$$

aus der Umgebung $(r)$ von $(a)$, was bei hinreichend kleiner Umgebung $(r)$ gewifs möglich ist, so wird die den genannten Stellen $(x)$ entsprechende Ungleichung für $\left|\frac{f}{g}\right|$ noch zutreffender als die angegebene, und deshalb ist die Behauptung erwiesen.

*Verschwinden aber $g$ und $f$ an derselben Stelle $(a)$, dann hat der Quotient der ganzen Functionen mehrerer Variabeln in unendlich kleiner Umgebung jeden beliebigen Werth und an dieser Stelle selbst keinen bestimmten Werth.* Die rationale Function erscheint an der Stelle $(a)$ nicht blos in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, sondern ist daselbst wirklich *unbestimmt*.

Dieser Satz wird bewiesen sein, wenn man in einer unendlich kleinen Umgebung von $(a)$ Werthesysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ finden kann, für welche $f$ oder $f - Ag$ verschwindet, ohne dafs $g$ Null ist, denn dann wird

$$F = \frac{f}{g} = \frac{f - Ag}{g} + A$$

Null respective $A$, und wenn man ferner Stellen angeben kann, an denen $g$ aber nicht $f$ Null ist, denn dann wird $F$ auch unendlich.

Es kommt nur darauf an, einen dieser Fälle auszuführen, wobei wir die Existenz der Nullstellen einer ganzen Function wieder voraussetzen müssen. — Wir fragen demnach, ob man Werthesysteme

$$x_\nu = \alpha_\nu + h_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

finden kann, für die

$$f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \dots a_n+h_n)$$
$$=\sum_{\nu_1,\nu_2\dots\nu_n}{}'\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n}f(x_1,\ x_2\dots x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\dots\partial x_n^{\nu_n}}\right)_{a_1,\,a_2\dots a_n}\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\,\frac{h_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\dots\frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}$$

verschwindet, indessen

$$|g(a_1+h_1,\ a_2+h_2\dots a_n+h_n)|>0$$

wird.

Der Strich bei dem Summenzeichen soll anzeigen, dafs $\nu_1,\ \nu_2\dots\nu_n$ nicht gleichzeitig Null zu setzen sind, indem $f(a_1,\ a_2,\ \dots a_n)=0$ ist.

Stellt man $f(a+h)$ in der Form dar:

$$A_0h_1^{n_1}+A_1h^{n_1-1}+\dots+A_{n_1},$$

so bezeichnen die Coefficienten $A_{\nu_1}$ ganze Functionen von $h_2,\ h_3\dots h_n$. $A_{n_1}$ wird mit den Gröfsen $h_2,\ h_3\dots h_n$ unendlich klein, denn $A_{n_1}$ kann kein constantes Glied enthalten, indem $f$ die Nullstelle $(a)$ besitzt.

Um eine Stelle $(a+h)$ der verlangten Art zu finden, wähle man für $h_2,\ h_3\dots h_n$ ein System von Werthen in unendlich kleiner Umgebung der Stelle $(0)$ und den zugehörigen Werth von $h_1$ entnehme man der Gleichung:

$$A_0h_1^{n_1}+A_1h_1^{n_1-1}+\dots+A_{n_1}=0.$$

Dabei darf man natürlich $h_2,\ h_3\dots h_n$ nicht solche Werthe geben, dafs die Resultante der Functionen $f$ und $g$

$$R(x_2,\ x_3\dots x_n)$$

die Nullstelle $(a_2+h_2,\ a_3+h_3,\dots a_n+h_n)$ besitzt, sonst könnte auch $g$ daselbst verschwinden. Da die Resultante zweier Functionen $f$ und $g$, welche keinen gemeinsamen Theiler haben, nicht identisch verschwinden wird, mufs es möglich sein, solche Werthe zu finden, und es fragt sich nur, ob jedem dieser Bedingung gehorchenden Werthesysteme $(h_2,\ h_3\dots h_n)$ ein $h_1$ von unendlich kleinem absoluten Betrage zugehören kann.

Das Product der unserer Gleichung genügenden Werthe $h_1$ ist

$$(-1)^{n_1}\frac{A_{n_1}}{A_0}.$$

Damit also eine Wurzel $h_1$ von unendlich kleinem Betrage existirt, mufs $\left|(-1)^{n_1}\frac{A_{n_1}}{A_0}\right|$ mit $h_2,\ h_3\dots h_n$ unendlich klein werden. Wenn $A_0(h_2,\ h_3\dots h_n)$ mit $h_2,\ h_3\dots h_n$ nicht unendlich klein wird, oder $A_0$ ein von den Gröfsen $h$ freies Glied enthält, gibt es gewifs eine Wurzel $h_1$ der verlangten Art, denn $A_{n_1}$ enthält keine Constante. Aber $A_0$ besitzt eine Constante, sobald in $f(x_1,\ x_2,\ \dots x_n)$ der Coefficient von $x_1^{n_1}$ ein von den Gröfsen $x_2,\ \dots x_n$ freies Glied enthält.

Andernfalls müssen wir zur Untersuchung der Beschaffenheit von $F$ an der Stelle $(a)$ eine lineare Transformation vornehmen, d. h. wir müssen $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in eine rationale Function neuer Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ umwandeln, die mit den ersten durch $n$ lineare Gleichungen verbunden sind.

Diese Gleichungen seien

$$x_\nu = \alpha_{\nu 1} y_1 + \alpha_{\nu 2} y_2 + \cdots + \alpha_{\nu n} y_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

und die Coefficienten seien nur den Beschränkungen unterworfen, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist und in $F(y_1, y_2, \ldots y_n)$ eine der Potenzen $y_\nu^{n_1}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ ein constantes Glied besitzt. Dann entspricht jeder Stelle $(x)$ eine und nur eine Stelle $(y)$ und umgekehrt, und in unendlich kleiner Umgebung der der Stelle $(a)$ entsprechenden Stelle $y_\nu = b_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, an der $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ und $g(y_1, y_2, \ldots y_n)$ verschwinden, gibt es Stellen $b_\nu + \eta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, wo $f((y))$ Null wird und $g((y))$ nicht verschwindet.

Diesen Stellen entsprechen Stellen $(a_1 + h)$ in unendlich kleiner Umgebung von $(a)$, für die $f((x))$ aber nicht $g((x))$ Null wird.

Der obige Satz ist daher in allen Theilen bewiesen.

Wir behaupten nun noch, dafs die rationale gebrochene Function

$$F = \frac{f}{g}$$

in der Umgebung jeder unendlichen Stelle $(x)$, die nicht Nullstelle des Nenners ist, eine stetig veränderliche Gröfse sei.

In der That: bezeichnen $\Delta f$ und $\Delta g$ die Gröfsen, um welche sich $f$ und $g$ ändern, wenn die Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $x_1 + h_1$, $x_2 + h_2$, $\ldots x_n + h_n$ übergehen, so wird

$$F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$= \Delta F = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g^2 + g\Delta g} = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g^2} - \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g(g^2 + g\Delta g)} \Delta g$$

und es ist ersichtlich gemacht, dafs man $\Delta f$ und $\Delta g$ oder die Gröfsen $h_1, h_2, \ldots h_n$ so wählen kann, dafs $|\Delta F|$ kleiner wird als eine beliebig kleine Gröfse $\delta$, wofern nur $g$ an der Stelle $(x)$ nicht verschwindet. Die rationale gebrochene Function ist deshalb an allen Stellen des $2n$-fach ausgedehnten, im Endlichen gelegenen Bereiches stetig, mit Ausnahme der Nullstellen ihres Nenners.

## § 24. Lagrange'sche Interpolationsformel.

### Summen gleicher Potenzen der Wurzeln einer Gleichung.

Wir haben in diesem Capitel noch eine Reihe von Sätzen über die ganzen und gebrochenen rationalen Functionen einer Variabeln vorzutragen, die eine mannigfache Verwendung finden werden. Wir beginnen mit einer Umgestaltung der Lagrange'schen Formel.

Jede ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades war in der Form dargestellt:

$$f(x) = f(x_1) + f^{(1)}(x_1)\frac{x-x_1}{1} + f^{(2)}(x)\frac{(x-x_1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^n}{n!},$$

und wenn $f(x)$ die $\nu$fache Nullstelle $x_1$ besitzt, wird

$$f(x) = (x-x_1)^\nu\left[\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1) + f^{(\nu+1)}(x_1)\frac{x-x_1}{(\nu+1)!} + \cdots + f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^{n-\nu}}{n!}\right].$$

Der Werth des Quotienten von $f(x)$ und $(x-x_1)^\nu$ an der Stelle $x_1$ ist, wie wir nun wissen, nicht etwa

$$\frac{0}{0}\ \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!},$$

sondern es gilt

$$\left(\frac{f(x)}{(x-x_1)^\nu}\right)_{x=x_1} = \frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1).$$

Gehen wir auf die Bestimmung der ganzen Function $n^{\text{ten}}$ Grades zurück, wenn deren Werth für $(n+1)$ Variabelnwerthe $\xi_1, \xi_1, \ldots \xi_{n+1}$ gegeben ist:

$$f(\xi_\nu) = \eta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1),$$

setzen jetzt

$$\prod_{\nu=1}^{n+1}(x-\xi_\nu) = \varphi(x),$$

so wird

$$(\xi_\nu - \xi_1)\ldots(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})(\xi_\nu - \xi_{\nu+1})\ldots(\xi_\nu - \xi_{n+1})$$
$$= \left(\frac{\varphi(x)}{x-\xi_\nu}\right)_{x=\xi_\nu} = \varphi^{(1)}(\xi_\nu)$$

und die Lagrange'sche Formel erhält die Gestalt:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{\eta_\nu}{\varphi'(\xi_\nu)}\,\frac{\varphi(x)}{x-\xi_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{f(\xi_\nu)}{\varphi'(\xi_\nu)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x-\xi_\nu}.$$

Es erscheint hier wichtig, die erste Ableitung einer ganzen Function mit $n$ Nullstellen, welche also die Darstellung

$$f(x) = a_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-x_\nu)$$

zuläſst, direct bilden zu können.

Die erste Ableitung ist zufolge der Formel

$$f(x+h)=f(x)+f^{(1)}(x)\frac{h}{1}+f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_1)\frac{h^n}{n!}$$

der Coefficient von $h$ in dem entwickelten Producte

$$a_0\prod_{\nu=1}^{n}(x+h-x_\nu).$$

Anstatt aber dieses Product auszuführen und jenen Coefficienten herauszunehmen, bemerken wir, dafs man den Quotienten der ersten Ableitung und $f(x)$ finden kann, indem man den Coefficienten von $h$ in der rationalen Function

$$\frac{f(x+h)}{f(x)}=\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x+h-x_\nu}{x-x_\nu}\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{h}{x-x_0}\right)$$

heraushebt. Da ergibt sich unmittelbar die Formel

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-x_\nu}$$

oder

$$f'(x)=f(x)\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-x_\nu}\,.$$

Hat die vorgegebene Function mehrfache Nullstellen und ist

$$f(x)=a_0\prod_{\mu=1}^{m}(x-x_\mu)^{n_\mu}\quad\left(\sum_{\mu=1}^{m}n_\mu=n\right),$$

so wird

$$f'(x)=f(x)\cdot\sum_{\mu=1}^{m}\frac{n_\mu}{x-x_\mu}\,.$$

Dieser Formel entnehmen wir die Beziehung:

$$f'(x)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}(x-x_\mu)-f(x)\cdot\sum_{\mu=1}^{m}n_\mu(x-x_1)\ldots(x-x_{\mu-1})(x-x_{\mu+1})\ldots$$
$$\ldots(x-x_m)=0,$$

die wir in der Form

$$f'(x)\,\varphi_m-f(x)\,\psi_{m-1}=0$$

anschreiben, um auch gleich abzulesen, dafs $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinsamen Theiler $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades besitzen. Dieser Theiler heifst

$$\prod_{\mu=1}^{m}(x-x_\mu)^{n_\mu-1}$$

und darum wird die $n_\mu$fache Nullstelle der Function $f(x)$ eine $(n_\mu-1)$-fache Nullstelle der ersten Ableitung $f'(x)$.

Weil die $\nu^{\text{te}}$ Ableitung von $f(x)$ die erste von $f^{(\nu-1)}(x)$ ist, wird ferner die $n_\mu$fache Nullstelle von $f(x)$ eine $(n_\mu-\nu)$fache Nullstelle der $\nu^{\text{ten}}$ Ableitung.

Wenn man die beiden Ausdrücke für die Ableitung einer ganzen Function mit $n$ Nullstellen:

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = x_n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

d. i.

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_\nu}$$

und

$$f'(x) = n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

mit einander vergleicht, ergibt sich ein bemerkenswerther Satz für die Summe gleicher Potenzen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Es folgt durch Division:

$$\frac{f(x)}{x - x_\nu} = x^{n-1} + (x_\nu + a_1) x^{n-2} + (x_\nu^2 + x_\nu a_1 + a_2) x^{n-3} + \cdots$$
$$+ (x_\nu^{n-1} + x_\nu^{n-2} a_1 + \cdots + x_\nu a_{n-2} + a_{n-1}),$$

und wenn man

$$x_1^\nu + x_2^\nu + \cdots + x_n^\nu = s_\nu$$

setzt, wird

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_\nu} = n x^{n-1} + (s_1 + n a_1) x^{n-2} + (s_2 + s_1 a_1 + n a_2) x^{n-3} + \cdots$$
$$+ (s_{n-1} + s_{n-2} a_1 + \cdots + s_1 a_{n-2} + n a_{n-1}).$$

Jetzt gibt der Vergleich dieses Ausdruckes für $f'(x)$ mit dem zweiten der oben genannten die Beziehungen:

$$s_1 + a_1 = 0$$
$$s_1 + s_1 a_1 + 2 a_2 = 0$$
$$s_3 + s_2 a_1 + s_1 a_2 + 3 a_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{n-1} + s_{n-2} a_1 + s_{n-3} a_2 + s_{n-4} a_4 + \cdots + s_1 a_{n-2} + (n-1) a_{n-1} = 0,$$

aus denen man successive die Werthe für *die Potenzsummen* $s_\nu$ ermitteln kann:

$$s_1 = - a_1$$
$$s_2 = a_1^2 - 2 a_2$$
$$s_3 = - a_1^3 + 3 a_1 a_2 - 3 a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und endlich $s_{n-1}$; $s_0$ ist gleich $n$.

Um die Summe der $n^{\text{ten}}$ und höherer Potenzen der Wurzeln zu finden, bilde man

$$x^m f(x) = x^{n+m} + a_1 x^{n+m-1} + \cdots + a_n x^m = 0,$$

ersetze hierin $x$ der Reihe nach durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und addire die Resultate, dann entsteht die Relation

$$s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} + \cdots + s_{m+1} a_{n-1} + s_m a_n = 0,$$

aus der die verlangten Summen successive hervorgehen, indem man $m = 0, 1, 2 \ldots$ setzt.

Alle Summen $s_k$ sind ganze rationale Functionen der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$, und umgekehrt die Coefficienten ganze rationale Functionen von $n$ Potenzsummen $s_k$ $(k > 0)$. —

Ist
$$f(x) = x^n - 1,$$
so wird
$$s_0 = s_n = s_{2n} = \cdots = s_{kn} = n,$$
wo $k$ irgend eine ganze Zahl bezeichnet, und die Summen von Potenzen der $n$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, deren Exponenten nicht Vielfache von $n$ sind, werden Null.

Unter dem früheren $m$ kann man auch eine ganze negative Zahl verstehen, nur folgen dann die Summen gleicher Potenzen mit negativen Exponenten. —

Alle die genannten Summen
$$s_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \cdots + x_n^\mu$$
bleiben als Functionen der $n$ Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihrer Form und ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man irgend welche Umsetzungen der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vornimmt.

Ausdrücke von $n$ Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die ihre Form bei gegenseitigen Vertauschungen der Elemente nicht ändern, heifsen *symmetrisch.*

Die Coefficienten der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades
$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = 0$$
sind solche symmetrische Ausdrücke der $n$ Wurzeln, denn bei irgend welchen Vertauschungen der Gröfsen $x_\nu$ in
$$a_\mu = (-1)^\mu \sum_{\nu', \nu'' \ldots \nu^{(\mu)}} x_{\nu'} x_{\nu''} \ldots x_{\nu^{(\mu)}} \quad (\mu = 1, 2 \ldots n)$$
geht jeder Summand in einen anderen über.

*Der symmetrische Ausdruck erfährt bei den Stellungsänderungen der $x_\nu$ offenbar keine Werthänderung.*

*Umgekehrt ist eine ganze rationale Function* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der als veränderlich betrachteten Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ in diesen *symmetrisch, sobald sie bei beliebigen Vertauschungen der Gröfsen* $(x_1, x, \ldots x_n)$ *keine Werthänderung erfährt.**)

*) Vergl. Netto's Substitutionentheorie.

Die Function

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_0(x_2, x_3, \ldots x_n) x_1^{n_1} + f_1(x_2, x_3, \ldots x_n) x_1^{n_1 - 1} + \cdots + f_{n_1}(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

möge bei einer Vertauschung der Gröfsen $x_\nu$ in

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_0(x_2, x_3, \ldots x_n) x_1^{n_1'} + \varphi_1(x_2, x_3, \ldots x_n) x_1^{n_1' - 1} + \cdots + \varphi_{n_1'}(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

übergehen, dann sind die rechts stehenden Ausdrücke der Voraussetzung nach für jedes Werthesystem $(x)$ einander gleich, und man erschliefst, dafs

$$n_1 = n_1', \quad f_0 \equiv \varphi_0, \ldots f_{n_1} \equiv \varphi_{n_1}$$

wird. —

*Eine symmetrische ganze Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ läfst sich stets auf eine und nur eine Art als ganze rationale Function der $n$* (oben genannten) *symmetrischen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ darstellen.*

Ist ein Glied der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von der Form

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\mu^{\nu_\mu} \quad (\mu \leqq n),$$

so kommen in derselben nothwendig alle durch Vertauschung der Gröfsen $x_\nu$ abzuleitenden Glieder vor, gibt es also ein Glied $x_\nu^\alpha$, so enthält $f$ alle Summanden von

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} x_\nu^\alpha = s_\alpha$$

und $s_\alpha$ ist eine ganze rationale Function der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Die Summe aller durch Vertauschung aus $x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha'}$ hervorgehenden Glieder

$$\sum_{\nu, \nu'} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha'}$$

wird gleich

$$s_\alpha s_{\alpha'} - s_{\alpha + \alpha'},$$

wie man bei der Bildung des Productes $s_\alpha s_{\alpha'}$ leicht übersieht, und ferner gilt

$$\sum_{\nu, \nu'} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^\alpha = \frac{1}{2} (s_\alpha^2 - s_{2\alpha}).$$

Da

$$s_{\alpha''} \sum_{\nu, \nu'} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha'} = \sum_{\nu, \nu', \nu''} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha'} x_{\nu''}^{\alpha''} + \sum_{\nu, \nu'} x_\nu^{\alpha + \alpha'} x_{\nu'}^{\alpha''} + \sum_{\nu, \nu'} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha' + \alpha''}$$

ist, wird

$$\sum_{\nu, \nu', \nu''} x_\nu^\alpha x_{\nu'}^{\alpha'} x_{\nu''}^{\alpha''} = s_\alpha s_{\alpha'} s_{\alpha''} - (s_{\alpha + \alpha'} s_{\alpha''} + s_{\alpha' + \alpha''} s_\alpha + s_{\alpha + \alpha''} s_{\alpha'}) + 2 s_{\alpha + \alpha' + \alpha''},$$

und so fortschreitend findet man, dafs jede Summe

$$\sum_{\nu', \nu'' \ldots \nu^{(\mu)}} x_{\nu'}^{\alpha_1} x_{\nu''}^{\alpha_2} \ldots a_{\nu^{(\mu)}}^{\alpha_\mu} \quad (\mu \leqq n)$$

als ganze rationale Function der Potenzsummen oder der symmetrischen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ darstellbar ist.

Setzen wir voraus, dafs dieselbe ganze symmetrische Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sowohl durch $g_1(a_1, a_2, \ldots a_n)$ als auch durch $g_2(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ausdrückbar sei, dann ist die Differenz

$$g_1 - g_2$$

zwar für alle Werthesysteme $(x)$ identisch Null, aber als Function der Gröfsen $a$ soll sie nicht identisch verschwinden, denn sonst wären die Darstellungen für $f$ gleich.

Die genannten Eigenschaften sind nicht miteinander verträglich, denn die Umsetzung von $g_1((a)) - g_2((a))$ in eine Function der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gäbe eine nicht identisch verschwindende Function, die für jedes Werthesystem $(x)$ Null sein soll.

Es gibt also nur eine Darstellung der ganzen symmetrischen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ als Function der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche die *elementarsymmetrischen Functionen* heifsen.

## § 25. Darstellung der rationalen gebrochenen Function einer Variabeln durch Partialbrüche.

Die oben gewonnene Formel

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{n_\mu}{x - x_\mu}$$

für den Quotienten der ganzen Functionen $f'(x)$ und $f(x)$ gibt die Anregung zu der allgemeinen Aufgabe:

> Es ist der Quotient ganzer Functionen als Summe solcher rationaler gebrochener Functionen darzustellen, die einzeln an den Nullstellen des Nenners unendlich werden, oder, was dasselbe sagt, als Summe rationaler Functionen, deren Nenner die Primfactoren des Nenners der vorgegebenen Function sind.

Auch diese Aufgabe hat in der Theorie der rationalen gebrochenen Zahlen ihr Analogon.

Zwischen zwei ganzen Functionen von dem $n^{\text{ten}}$ und $m^{\text{ten}}$ Grade $f_n$ und $g_m$ $(n \geq m)$ bestand eine Beziehung:

$$f_n = g_m p_{n-m} + q_{m-1},$$

aus der wir ablesen, dafs der Quotient einer Function $n^{\text{ten}}$ und $m^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{f_n}{g_m} = p_{n-m} + \frac{q_{m-1}}{g_m}$$

als Summe einer ganzen Function vom $(n-m)^{\text{ten}}$ Grade und eines Quotienten darstellbar ist, in welchem der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners.

Angenommen, dafs in einem solchen Quotienten $\frac{q_{m-1}}{g_m}$ der Nenner $g_m$ als Product zweier ganzer Functionen $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ ohne gemeinsamen Theiler darzustellen sei, so kann man die Function $\frac{q_{m-1}}{g_m}$ als Summe zweier Quotienten ganzer Functionen ausdrücken, deren Nenner beziehungsweise die Factoren $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ sind.

Die Gradzahlen von $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ seien $\mu$ und $\nu$ $(\mu + \nu = m)$, dann kann man diesen Functionen $g_\mu^{(1)}$ und $g_\nu^{(2)}$ zwei und nur zwei Functionen $\varphi_{\nu-1}$ und $\psi_{\mu-1}$ so zuordnen, dafs die Gleichung

$$\varphi_{\nu-1}\, g_\mu^{(1)} + \psi_{\mu-1}\, g_\nu^{(2)} = 1$$

besteht. Es existirt deshalb eine Relation der Form:

$$\frac{1}{g_m} = \frac{\varphi_{\nu-1}}{g_\nu^{(2)}} + \frac{\psi_{\mu-1}}{g_\mu^{(1)}}$$

und dann wird

$$\frac{q_{m-1}}{g_m} = \frac{q_{m-1}\,\varphi_{\nu-1}}{g_\nu^{(2)}} + \frac{q_{m-1}\,\psi_{\mu-1}}{g_\mu^{(1)}}.$$

Setzt man

$$q_{m-1}\,\varphi_{\nu-1} = \quad P_{m-2}\, g_\nu^{(2)} + Q_{\nu-1},$$

$$q_{m-1}\,\psi_{\mu-1} = -P'_{m-2}\, g_\mu^{(2)} + Q_{\mu-1},$$

so entsteht die Gleichung

$$\frac{q_{m-1}}{g_m} = (P_{m-2} - P'_{m-2}) + \frac{Q_{\nu-1}}{g_\nu^{(2)}} + \frac{Q_{\mu-1}}{g_\mu^{(1)}}$$

oder

$$q_{m-1} = (P_{m-2} - P'_{m-2})\, g_m + Q_{\nu-1}\, g_\mu^{(1)} + Q_{\mu-1}\, g_\nu^{(2)}.$$

Da aber die ganze Function $q_{m-1}$ nicht die Summe einer Function $2\,(m-1)^{\text{ten}}$ und zweier Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades sein kann, mufs hierin

$$P_{m-2} - P'_{m-2}$$

identisch verschwinden, und es folgt, dafs eine *echt gebrochene* rationale Function, (in welcher der Zähler von niedrigerem Grade ist als der Nenner, und) in welcher der Nenner das Product zweier ganzer Functionen ohne gemeinsamen Theiler ist, als Summe zweier echt gebrochener rationaler Functionen dargestellt werden kann, deren Nenner die genannten Factoren sind.

In der Gleichung

$$\frac{q_{m-1}}{g_m} = \frac{Q_{\nu-1}}{g_\nu^{(2)}} + \frac{Q_{\mu-1}}{g_\mu^{(1)}}$$

sind die Functionen $Q_{\nu-1}$, $Q_{\mu-1}$ höchstens von den bezeichneten Graden. —

Die hier durchgeführte Zerlegung eines Quotienten $\frac{q_{m-1}}{g_m}$ in ein Aggregat zweier echt gebrochener rationaler Functionen läſst sich fortsetzen, indem wir dieselben Erwägungen auf die gewonnenen *Partialbrüche* $\frac{Q_{\nu-1}}{g_\nu^{(2)}}$, $\frac{Q_{\mu-1}}{g_\mu^{(1)}}$ anwenden.

Ist etwa

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_k$$

und besitzt keiner der Factoren $g_\varkappa$, deren Grad uns jetzt nicht interessirt, mit einem zweiten $g_{\varkappa'}$ einen gemeinsamen Theiler, so existirt eine ganz bestimmte Zerlegung

$$\frac{q_{m-1}}{g_m} = \frac{Q_1}{g_1} + \frac{Q_2}{g_2} + \cdots + \frac{Q_k}{g_k},$$

denn gäbe es eine zweite

$$\frac{q_{m-1}}{g_m} = \frac{P_1}{g_1} + \frac{P_2}{g_2} + \cdots + \frac{P_k}{g_k},$$

so kommen wir in Widerspruch mit der Voraussetzung über das gegenseitige Verhalten der Factoren $g_k$. In der That: weil in der nun hervorgehenden Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} (Q_\varkappa - P_\varkappa) \frac{g}{g_\varkappa} = 0$$

jeder Summand bis auf den $\varkappa^{\text{ten}}$ den Factor $g_\varkappa$ besitzt und dieser Summand darnach durch $g_\varkappa$ theilbar sein soll, so müſste einer der Factoren $g_{\varkappa'}$ den Theiler $g_\varkappa$ haben, indem die ganze Function $Q_\varkappa - P_\varkappa$ diesen Theiler gewiſs nicht besitzt, weil ihr Grad niedriger ist als der von $g_\varkappa$.

Wir specialisiren diese Sätze und nehmen an, daſs der Nenner $g(x)$ in der Form

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} (x - \xi_\varkappa)^{m_\varkappa}$$

gegeben sei, wo die Summe der Exponenten $m_\varkappa$ gleich $m$ ist. Dann ist der Theiler

$$g_\varkappa = (x - \xi_\varkappa)^{m_\varkappa},$$

und ein Quotient $\frac{q_{m-1}}{g_m}$ zerfällt in die Summe:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{q_\varkappa(x)}{(x - \xi_\varkappa)^{m_\varkappa}},$$

wo der Grad des Zählers $q_\varkappa(x)$ den Werth $m_\varkappa - 1$ nicht überschreiten kann, so daſs der Zähler die Gestalt erhält:

$$q_\varkappa(x) = c_{\varkappa,0}\, x^{m_\varkappa - 1} + c_{\varkappa,1}\, x^{m_\varkappa - 2} + \cdots + c_{\varkappa, m_\varkappa - 1}.$$

Will man die Coefficienten $c_\varkappa$ berechnen, so setze man in der Gleichung

$$q_{m-1}(x) = \prod_{\varkappa=1}^{k}(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa} \cdot \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{q_\varkappa(x)}{(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa}}$$

die angegebenen Ausdrücke für $q_\varkappa(x)$ mit den unbestimmten Coefficienten ein, setze nach Ausführung der Multiplicationen die Coefficienten gleich hoher Potenzen in $q_{m-1}$ und in der ganzen Function rechts einander gleich, so erhält man zur Bestimmung der $m$ Gröfsen $c_\varkappa$ $m$ lineare Gleichungen, deren Determinante nicht verschwinden wird, weil es eine bestimmte Zerlegung für den Quotienten $\frac{q_{m-1}}{g_m}$ gibt.

Die rationalen Functionen

$$\frac{q_\varkappa(x)}{(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa}},$$

in welchen $m_\varkappa > 1$ ist, kann man noch weiter zerlegen, was am einfachsten dadurch geschieht, dafs man

$$q_\varkappa(x) = q_\varkappa(\xi_\varkappa) + q'_\varkappa(\xi_\varkappa)\frac{x-\xi_\varkappa}{1} + \cdots + q^{(m_\varkappa-1)}(\xi_\varkappa) \cdot \frac{(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa-1}}{(m_\varkappa-1)!}$$

setzt. Es wird dann

$$\frac{q_\varkappa(x)}{(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa}} = \sum_{m_\varkappa=0}^{m_\varkappa-1} \frac{q_\varkappa^{(\mu_\varkappa)}(\xi_\varkappa)}{\mu_\varkappa!} \cdot \frac{1}{(x-\xi_\varkappa)^{m_\varkappa-\mu_\varkappa}}.$$

Jetzt erscheint nachgewiesen, dafs der Quotient zweier rationaler Functionen $f_n$ und $g_m$, deren Nenner die

Nullstellen $\begin{matrix} m_1, m_2, \ldots m_k\text{fachen} \\ x = a_1, a_2, \ldots a_k \end{matrix}$

besitzt, auf die Form

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)}{g_m(x)} &= a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m+1} + \cdots + a_{n-m} \\ &+ \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{m_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ \frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha^k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{m_k}}\end{aligned}$$

gebracht werden kann, wo neben den Coefficienten $A_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$ auch die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n-m}$ eindeutig bestimmt sind.

Im Falle einfacher Nullstellen erhält man die Formel:

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)} = p_{n-m}(x) + \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{A^{(\varkappa)}}{x-\alpha_\varkappa},$$

deren Coefficienten $A^{(\varkappa)}$ noch in anderer Weise als früher bestimmt werden sollen.

Bildet man die Gleichung

$$f_n(x) = p_{n-m}(x)\, g_m(x) + \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{A^{(\varkappa)}\, g_m}{x-\alpha_\varkappa}$$

und ersetzt hierin $g(x)$ durch

$$g'(\alpha_\varkappa)\frac{x-\alpha_\varkappa}{1} + g''(\alpha_\varkappa)\frac{(x-\alpha_\varkappa)^2}{2!} + \cdots + g^{(m)}(\alpha_\varkappa)\frac{(x-\alpha_\varkappa)^m}{m!},$$

so geht die Gleichung für $x = \alpha_\varkappa$ in

$$f_n(\alpha_\varkappa) = A^{(\varkappa)}\, g_m'(\alpha_\varkappa)$$

über und deshalb wird

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)} = p(x) + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{f(\alpha_\varkappa)}{g'(\alpha_\varkappa)}\,\frac{1}{x-\alpha_\varkappa}.$$

Ist der Grad von $f$ kleiner als der von $g$, so fällt die ganze Function $p(x)$ aus dieser Gleichung heraus; ist $f(x)$ vom Grade $m-1$, so gibt der Vergleich gleichnamiger Potenzen in der Relation

$$f(x) = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{f(\alpha_\varkappa)}{g'(\alpha_\varkappa)}\,\frac{g(x)}{x\quad\alpha_\varkappa},$$

daſs

$$a_0 = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{f(\alpha_\varkappa)}{g'(\alpha_\varkappa)}$$

ist.

Wenn endlich die ganze Function $f_n$ von niedrigerem als dem $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, so wird die Summe der Coefficienten der Partialbrüche, in welche der Quotient $\dfrac{f}{g_m}$ zerlegt ist,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{f(\alpha_\varkappa)}{g'(\alpha_\varkappa)} = 0.$$

Will man die Coefficienten $A_{\mu_\varkappa}^{(\varkappa)}$ in dem Falle einer vielfachen Nullstelle $\alpha_1$ des Nenners

$$g_m = (x-\alpha_1)^{m_1}\, g_{m-m_1}$$

in analoger Weise bestimmen, so gehe man von der Zerlegung

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{q_{m_1-1}(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{Q_1(x)}{g_{m-m_1}(x)}$$

oder

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{(x-\alpha_1)^{m_1} P_1(x)}{g(x)}$$

aus, multiplicire diese Gleichung mit $g(x)$, setze dann:

$$g(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\frac{g^{(m_1)}(\alpha_1)}{m_1!} + (x-\alpha_1)^{m_1+1}\frac{g^{(m_1+1)}(\alpha_1)}{(m_1+1)!} + \cdots + (x-\alpha_1)^m\frac{g^{(m)}(\alpha_1)}{m!}$$

$$f(x) = f(\alpha_1) + f'(\alpha_1)\frac{x-\alpha_1}{1} + \cdots + f^{(n)}(\alpha_1)\frac{(x-\alpha_1)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = P(\alpha_1) + P^{(1)}(\alpha_1)\frac{x-\alpha_1}{1} + \cdots + P^{(n)}(\alpha_1)\frac{(x-\alpha_1)^n}{n!},$$

wobei angenommen ist, daſs $f(x)$ nicht die Nullstelle $\alpha_1$ besitzt, und vergleiche dann die beiden Seiten der nach Potenzen von $(x-\alpha_1) = h_1$ zu ordnenden Gleichung. Es folgt die Reihe von Beziehungen:

$$A_{m_1}^{(1)}\frac{g^{(m_1)}(\alpha_1)}{m_1!} = f(\alpha_1)$$

$$A_{m_1-1}^{(1)}\frac{g^{(m_1)}(\alpha_1)}{m_1!} + A_{m_1}^{(1)}\frac{g^{(m_1+1)}(\alpha_1)}{(m_1+1)!} = \frac{f'(\alpha_1)}{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1^{(1)}\frac{g^{(m_1)}(\alpha_1)}{m_1!} + A_2^{(1)}\frac{g^{(m_1+1)}(\alpha_1)}{(m_1+1)!} + \cdots + A_{m_1}^{(1)}\frac{g^{(2m_1-1)}(\alpha_1)}{(2m_1-1)!} = \frac{f^{(m_1-1)}(\alpha_1)}{(m_1-1)!},$$

aus denen die Werthe von $A_{\mu_1}^{(1)}$ successive zu entnehmen sind. Man sieht unmittelbar, daſs alle Coefficienten $A_{\mu_1}^{(1)}$ verschwinden, wenn $f(x)$ die $m_1$fache Nullstelle $\alpha_1$ besitzt, und das sollte natürlich eintreffen.

Da die $m_1$ Coefficienten $A_{\mu_1}^{(1)}$ hier durch die $2m_1$ Gröſsen $g^{(\mu_1)}(\alpha_1)$ und $f^{(\mu_1)}(\alpha_1)$ und somit alle Coefficienten $A_{\mu_\varkappa}^{(\varkappa)}$ durch $2m$ Gröſsen bestimmt sind, endlich die ganze rationale Function $p_{n-m}$ $n-m+1$ Coefficienten enthält, muſs die rationale Function $\frac{f_n}{g_m}$ $n+m+1$ constante Gröſsen besitzen, und man wird dieselbe angeben können, wenn ihre Werthe an $n+m+1$ Stellen

$$x = \xi_0, \xi_1, \ldots \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots \xi_{m+n}$$

vorgegeben sind. Die zugehörigen Werthe heiſsen

$$\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots \eta_{m+n}.$$

Gäbe es zwei Functionen $\frac{f_n}{g_m}, \frac{F_n}{G_m}$ der verlangten Art, so müſste die Gleichung

$$f_n G_m - F_n g_m = 0$$

$(n+m)^{\text{ten}}$ Grades $(n+m+1)$ Wurzeln $\xi$ haben; das geht nicht an, folglich ist die Forderung eine bestimmte und es fragt sich nur, wie die arithmetische Abhängigkeit der rationalen Function von dem Werthe der Variabeln ausfallen muſs, damit die Function den Anforderungen genügt.

Setzt man zunächst voraus, daſs $n$ der Werthe $\eta$ etwa $\eta_{m+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ Null sind, dann besitzt der Zähler $f_n$ die Gestalt:

$$a \prod_{\nu=1}^{n} (x - \xi_{m+\nu}),$$

wo $a$ vorderhand willkürlich ist. — Die Function $g_m$ mufs für $x = \xi_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \dots m)$ den Werth

$$\frac{a}{\eta_\mu} \prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\mu - \xi_{m+\nu}) = \xi_\mu$$

annehmen, sonst könnte $\frac{f_n(\xi_\mu)}{g_m(\xi_\mu)}$ nicht gleich $\eta_\mu$ werden.

Bezeichnet man

$$\prod_{\mu=0}^{m} (x - \xi_\mu) = \varphi(x),$$

so wird der Nenner nach der Lagrange'schen Formel gleich

$$\sum_{\mu=1}^{m} \xi_\mu \frac{\varphi(x)}{\varphi'(\xi_\mu)\,(x - \xi_\mu)}$$

zu setzen sein.

Die Function $\frac{f_n}{g_m}$, welche an den Stellen

$\xi_\mu \quad (\mu = 0, 1, \dots m)$ die Werthe $\eta_\mu$,

an den Stellen $\xi_{m+\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$ den Werth Null

annimmt, erhält dann die Gestalt:

$$\frac{a \prod_{\nu=1}^{n} (x - \xi_{m+\nu})}{a \sum_{\mu=0}^{m} \left( \frac{\varphi(x)}{x - \xi_\mu} \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\mu - \xi_{m-\nu})}{\eta_\mu \, \varphi'(\xi_\mu)} \right)}.$$

Gibt man der willkürlichen Constanten $a$ den Werth

$$\frac{\eta_0 \, \eta_1 \cdots \eta_m}{\prod_\nu (\xi_0 - \xi_{m+\nu}) \cdot \prod_\nu (\xi_1 - \xi_{m+\nu}) \cdots \prod_\nu (\xi_m - \xi_{m+\nu})} = \frac{\eta_0 \, \eta_1 \cdots \eta_m}{\prod_{\mu,\nu} (\xi_\mu - \xi_{m+\nu})}$$

und bildet darauf die Summe aller aus dem Zähler $a \prod_\nu (x - \xi_{m+\nu})$ und ebenso die Summe aller aus dem obigen Nenner durch Permutation der Indices

$$0, 1, 2, \dots m, m+1, \dots m+n$$

entstehenden Ausdrücke, so ist der Quotient derselben die ursprünglich verlangte Function $\frac{f_n}{g_m}$. *)

*) Die Lösung der letzten Aufgabe stammt von Cauchy her.

# Drittes Capitel.

## I. Abschnitt.

## Potenzreihen einer und mehrerer Variabeln.

### § 26. Gleichmäfsige Convergenz.

Wie wir das System rationaler Zahlengröfsen verwandten, um die allgemeineren irrationalen Gröfsen zu definiren, wollen wir die rationalen (ganzen und gebrochenen) Functionen zur Bildung neuer mit den Variabeln veränderlicher Gröfsen benützen.

Verknüpft man rationale Functionen eine endliche Anzahl Male durch die elementaren Rechnungsoperationen, so entstehen immer wieder rationale Functionen. Um etwas Neues zu Tage zu fördern, müssen wir eine unendliche Anzahl rationaler Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_\nu(x),\ \ldots$$

vorlegen und diese verknüpfen, etwa durch Summation. Wir stellen uns also genauer die Aufgabe, die Summe unendlich vieler rationaler Functionen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = F(x)$$

zu untersuchen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Summe an einer Stelle $x = x_0$ eine bestimmte (von der Anordnung der Summanden unabhängige) Bedeutung habe, besteht in der Convergenz der Reihe der absoluten Beträge

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| f_\nu(x_0) \right|,$$

denn dann kann man nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ stets ein solches $\nu = n$ ausfindig machen, dass der absolute Betrag jeder Differenz

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x_0) - \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(x_0) \right| < \delta,$$

sobald nur $m > n$ ist.

Damit die durch die Summe definirte Gröfse $F(x)$ die rationale Function umfasse oder nur irgend etwas mit der rationalen Function gemein habe, müssen wir voraussetzen, dafs die Summe nicht blos für einzelne Werthe der Variabeln, sondern für alle Stellen eines wenn auch noch so kleinen Bereiches in der Umgebung einer ersten Stelle $x_0$ absolut und somit auch unbedingt convergirt.

Soll die unendliche Reihe in einem Bereiche unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder $f_\nu$ d. h. unbedingt convergiren, so mufs man nach Annahme einer Gröfse $\delta$ eine unendliche Anzahl von Gliedern derart abtrennen können, dafs der absolute Betrag der Summe von beliebig vielen der übrig bleibenden Glieder für jeden Werth von $x$ aus dem Bereiche um $x_0$ kleiner ist als $\delta$. Diese Bedingung wird offenbar erfüllt sein, sobald man eine Reihe solcher positiver Gröfsen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots.$$

von endlicher Summe angeben kann, dafs für jeden der in Rede stehenden Variabelnwerthe

$$|f_\nu| \leqq \alpha_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots).$$

Die Gesammtheit der Stellen $x_0$, für welche die Convergenzbedingung erfüllt ist, constituirt den *Convergenzbereich der Summe.* Dieser Bereich besteht nothwendig aus einem oder mehreren von einander getrennten zweifach ausgedehnten Bereichen und jeder bildet ein zusammenhängendes Continuum.

Ob der Convergenzbereich einer Summe rationaler Functionen stets begrenzt sein mufs, ob er sich *in das Unendliche erstrecken* d. h. die Umgebung der *unendlich fernen* Stelle $x = \infty$ enthalten kann, werden wir zu untersuchen haben; hier mag nur hervorgehoben werden, dafs der Convergenzbereich der Summe einer endlichen Anzahl ganzer rationaler Functionen durch die Stelle $\infty$, der der Summe einer endlichen Anzahl echt gebrochener rationaler Functionen durch die Nullstellen der Nenner begrenzt ist, indem die einzelne dieser Functionen an den Stellen, wo der Nenner verschwindet, unendlich wird, und an der unendlich fernen Stelle das einzelne Glied der Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{(x-\alpha)^m}$$

Null ist, weil der absolute Betrag dort verschwindet. —

Man sieht leicht, dafs die Summe $\sum\limits_\nu f_\nu(x)$, welche einen Convergenzbereich besitzt, keineswegs eine stetig veränderliche Gröfse $y = F(x)$ definiren mufs; denn wenn $F(x)$ an einer Stelle $x_0$ des Convergenzbereiches stetig sein soll, so mufs man nach Annahme einer willkürlich kleinen Gröfse $\delta$ eine Umgebung $\varrho$ von $x_0$ angeben können, dafs für alle der Bedingung

$$|x - x_0| < \varrho$$

genügenden Stellen $x$ der absolute Betrag

$$|F(x) - F(x_0)|$$

oder

$$\left|\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) + \left(f_2(x) - f_2(x_0)\right) + \cdots\right|$$

kleiner wird als $\delta$ und diese Bedingung braucht nicht erfüllt zu sein. Wenngleich der absolute Betrag jeder einzelnen Differenz $\left(f_\nu(x) - f_\nu(x_0)\right)$ beliebig klein gemacht werden kann, ist durchaus noch nicht nothwendig, dafs der absolute Betrag der Summe unendlich vieler beliebig kleiner Gröfsen $\delta_\nu$ endlich oder gar kleiner wird als $\delta$.

Denkt man nach Fixirung eines endlichen Convergenzbereiches unserer Summe in jedem Punkte des Inneren und der Begrenzung ein Loth auf die Ebene der Variabeln $x$ errichtet und darauf eine Strecke abgetragen, die als Maafs des absoluten Betrages $\left|\sum\limits_\nu f_\nu(x_0)\right|$ anzusehen ist, so kann es möglich sein, dafs um den Endpunkt jedes Lothes eine Kugel zu legen ist, welche keinen anderen Endpunkt enthält. Dieses Bild veranschaulicht, welch grofse Regellosigkeit in den Werthen $\sum f_\nu(x)\Big|$ selbst dann zurückbleibt, wenn wir annehmen, dafs ein Convergenzbereich existirt.

Wir wollen die Convergenz der Summe $\sum\limits_\nu f_\nu(x)$ so beschränken, dafs die durch dieselbe definirte Gröfse $F(x)$ ebenso wie die rationale Function stetig wird. Wir setzen fest:

Die unendliche Reihe $\sum\limits_\nu f_\nu(x)$ convergire in einem Bereiche ($A$) derart, dafs sich nach Annahme einer willkürlich kleinen positiven Gröfse $\delta$ eine ganze Zahl $m$ so bestimmen läfst, dafs der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x)$$

für jeden Werth von $n \geq m$ und jede Stelle $x$ des Bereiches kleiner wird als $\delta$. Dann heifse die Reihe in dem Bereiche ($A$) *gleichmäfsig convergent.* *)

So ist z. B. die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$$

in dem durch die Bedingungen

$$|x| = \xi < 1$$

*) Weierstrafs, Abhandlungen aus der Functionenlehre. S. 70.

definirten Bereiche gleichmäſsig convergent, denn man kann eine ganze Zahl $m$ so bestimmen, daſs

$$|x^n + x^{n+1} + \cdots| \leqq \xi^n + \xi^{n+1} + \cdots = \xi^n \frac{1}{1-\xi}$$

für jedes $n \geqq m$ und jede der genannten Stellen kleiner wird als eine beliebig kleine Gröſse $\delta$.

Offenbar liegt in dieser Definition der gleichmäſsig convergenten Reihe nichts, woraus man schlieſsen könnte, die Reihe sei auch unbedingt convergent. Nehmen wir daher nur an, daſs die bestimmte Reihe

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\nu(x) + \cdots$$

bei der angegebenen Gliederfolge für $x = a$ convergirt, so kann man möglicherweise der Stelle $x = a$ eine solche Umgebung $r$ zuordnen, daſs die Reihe für alle der Bedingung $|x - a| \leqq r$ genügenden Werthe gleichmäſsig convergirt und man sagt dann, *die Reihe convergirt in der Nähe von a gleichmäſsig.*

Die für die Art der gleichmäſsigen Convergenz charakteristische ganze Zahl $m$ ist auch als obere Grenze derjenigen Werthe zu deuten, welche sich ergeben, indem man für die in Rede stehenden Stellen $x'$ Zahlen $m'$ sucht, bei denen

$$\left|\sum_1^\infty f_\nu(x') - \sum_1^{n'} f_\nu(x')\right| < \delta$$

wird, sobald $n' \geqq m'$ ist. — Ist die obere Grenze nicht endlich, so kann zwar die Reihe an jeder einzelnen Stelle convergiren, sie convergirt aber nicht gleichmäſsig in dem durch die Gesammtheit der Stellen constituirten Bereiche.

Die Umgebungen jeder einzelnen Stelle $a$, in deren Nähe die Reihe gleichmäſsig convergirt, haben eine obere Grenze $R$. Die Gesammtheit der durch die Bedingung

$$|x - a| < R$$

gekennzeichneten Stellen nennt man kurzweg die *Umgebung* von $(a)$. Geht man von dieser aus, so gelangt man — den Begriff der Umgebung in diesem Sinne nehmend — auf bekannte Weise zu einem Continuum von Stellen, in deren Nähe die Reihe gleichmäſsig convergirt, dem *Bereiche gleichmäſsiger Convergenz.*

Weiſs man, daſs eine Reihe in der Nähe jeder Stelle gleichmäſsig convergirt, die im Innern oder auf der Begrenzung eines Continuums liegt, so convergirt sie auch in dem ganzen Bereiche gleichmäſsig.

Dieser Satz ist gerade so zu beweisen, wie der bereits erledigte Satz: *eine an jeder Stelle eines Continuums stetig veränderliche Gröſse ist in dem ganzen Continuum stetig*, und darum unterdrücken wir hier den Beweis. Es soll nur bemerkt werden, daſs der Radius der Um-

gebung einer der Umgebung $R$ von $a$ angehörigen Stelle $b$ innerhalb der Grenzen liegt

$$R - d \quad \text{und} \quad R + d,$$

wo $d = |b - a|$ ist.

Jetzt behaupten wir, dafs *die Summe einer Reihe innerhalb ihres Bereiches gleichmäfsiger Convergenz eine stetig veränderliche Gröfse ist.*

In der That: ist $a$ eine Stelle, in deren Nähe die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ gleichmäfsig convergirt, und ist $\delta$ eine beliebig kleine positive Gröfse, die wir in die Summe von $\delta_1$ und $\delta_2$ zerlegt denken, so kann man eine ganze Zahl $m$ derart angeben, dafs in gewisser Nähe von $a$ der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x)$$

kleiner wird als eine Gröfse $\varepsilon$, sobald $n \geqq m$ ist, und

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} \big(f_\nu(x) - f_\nu(a)\big)\right| \leqq \left|\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x)\right| + \left|\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(a)\right| < \delta_2$$

wird. Wählt man dann noch eine Umgebung von $a$ so klein, dafs auch

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \big(f_\nu(x) - f_\nu(a)\big)\right| < \delta$$

wird, so ist die für die Stetigkeit von $F(x)$ an der Stelle $a$ nothwendige Bedingung

$$|F(x) - F(a)| < \delta$$

erfüllt und die Behauptung erwiesen.

Von einer unendlichen Reihe rationaler Functionen mehrerer Variabeln

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

sagt man ebenfalls, sie convergirt in einem $2n$-fach ausgedehnten zusammenhängenden Bereiche gleichmäfsig, wenn man nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ eine ganze Zahl $m$ so angeben kann, dafs der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

für jede dem Bereiche angehörige Stelle $(x)$ kleiner ist als $\delta$, sobald $n \geqq m$ ist.

Convergirt die Reihe in der Nähe einer Stelle $(x)$ gleichmäfsig, so kann man, von diesem Bereiche ausgehend, ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum von Stellen finden, in deren Nähe die Reihe gleiehmäfsig

convergirt. In diesem Bereiche gleichmäfsiger Convergenz ist die durch die unendliche Reihe definirte Gröfse wieder stetig, denn man kann einer Stelle $(a)$ dieses Bereiches eine solche Umgebung $(\delta)$ zuordnen, dafs für jede Stelle $(a+h)$, wo

$$|h_\nu| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

der absolute Betrag der Differenz

$$F(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots a_n + h_n) - F(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

kleiner wird als eine beliebig kleine vorgegebene Gröfse.

## § 27. Potenzreihen.

Wir beschäftigen uns nunmehr mit den aus unendlich vielen ganzen rationalen Functionen einer oder mehrerer Variabeln:

$$f_\nu(x) = a_\nu x^\nu, \quad f_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n}(x_1, x_2 \ldots x_n) = a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

gebildeten Reihen:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}, \text{ *)}$$

die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende *Potenzreihen* heifsen, und mit

$$\mathfrak{P}(x), \quad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

bezeichnet werden sollen.

Soll die unendliche Potenzreihe an einer Stelle $a$ oder $(a)$ einen von der Summationsfolge unabhängigen endlichen Werth besitzen, so mufs die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder an der genannten Stelle convergiren. Wenn diese Summe für das Werthesystem $x = a$ respective $x_\nu = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ nicht endlich ist, kann die Summe umsoweniger an einer Stelle convergiren, für die

$$|x| > |a| \quad \text{oder} \quad |x_\nu| > |a_\nu| \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

ist. *Wenn aber in der Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x)$ *der absolute Betrag jedes Gliedes* $|a_\nu x^\nu|$ *für einen Werth von* $x$ *mit dem Betrage* $\xi_0$ *endlich und deshalb kleiner bleibt als eine positive angebbare Gröfse* $g$, *so ist die Reihe für alle der Bedingung*

$$|x| = \xi < \xi_0$$

*genügenden Werthe absolut und gleichmäfsig convergent.*

Der Voraussetzung zufolge ist

$$|a_\nu x^\nu| = |a_\nu| \, \xi_0^\nu < g,$$

und daher

$$|a_\nu x^\nu| = |a_\nu| \, \xi^\nu < g \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\nu.$$

---

*) Wo $(\mu_\nu) = 0$ anstatt $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n = 0$ geschrieben ist.

Weil dann

$$|\mathfrak{P}(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \, \xi^\nu < g \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\nu = g \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}},$$

und hierin $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$ ist, bleibt der absolute Betrag der Potenzreihe und die Reihe der absoluten Beträge der Glieder $a_\nu x^\nu$ endlich, welches auch der Werth von $|x| = \xi < \xi_0$ sei.

Die Potenzreihe ist in dem durch die Bedingung $|x| < \xi_0$ definirten Bereiche auch gleichmäfsig convergent. Denn wenn eine beliebig kleine Gröfse $\delta$ vorgegeben wird, so kann man immer eine ganze Zahl $m$ so bestimmen, dafs

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu\right| < \delta \quad (n \geqq m),$$

indem in der Ungleichung:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu x^\nu| < g \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}}$$

die rechte Seite durch passende Wahl von $n$ der Forderung gemäfs beliebig klein zu machen ist.

Die *Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x)$ ist als gleichmäfsig convergente Reihe *in dem Convergenzbereiche stetig.*

Ertheilt man $x$ einen besonderen Werth $x_0$, so sind durch die absoluten Beträge

$$|a_\nu x_0^\nu| \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

unendlich viele positive Gröfsen definirt, welche eine obere Grenze besitzen. Ist diese Grenze endlich, so convergirt die Reihe für jedes $x$, welches der Bedingung $|x| < |x_0| = \xi_0$ genügt. Nun sind auch unendlich viele Gröfsen $\xi_0$ definirt, die selbst eine obere Grenze $R$ haben, und solange $|x| < R$, convergirt die Reihe. Ist aber $|x| > R$, so divergirt die Potenzreihe, denn dann werden einzelne Glieder unendlich grofs. Für die durch die Bedingung $|x| = R$ charakterisirten Stellen kann die Reihe durchweg convergiren, oder divergiren, oder an einzelnen Stellen divergiren und an anderen convergiren, darüber kann man hier nicht entscheiden.

Der Convergenzbereich der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ ist darnach in der Ebene der Variabeln durch eine *Kreisfläche* mit dem Radius $R$ um die Stelle $x = 0$ repräsentirt, und $R$ heifst der *Convergenzradius.*

Für die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bestehen analoge Sätze.

Kann man solche Werthe $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$ mit den absoluten Beträgen $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \ldots \xi_n^{(0)}$ angeben, dafs der absolute Betrag jedes Gliedes der Reihe für dieses Werthesystem kleiner bleibt als eine

angebbare Gröfse $g$, so convergirt die Reihe für alle durch die Bedingungen

$$\xi_\nu = |x_\nu| < \xi_n^{(0)} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

bestimmten Werthesysteme $(x)$ absolut und gleichmäfsig.

Für solche Werthesysteme ist wieder:

$$|a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}| < g \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^{(0)}}\right)^{\mu_1} \cdot \left(\frac{\xi_2}{\xi_2^{(0)}}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{\xi_n}{\xi_n^{(0)}}\right)^{\mu_n},$$

und deshalb

$$|\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} |a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}| < g \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^{(0)}}\right)^{\mu_1} \left(\frac{\xi_2}{\xi_2^{(0)}}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{\xi_n}{\xi_n^{(0)}}\right)^{\mu_n}$$

$$= g \frac{1}{\left(1 - \frac{\xi_1}{\xi_1^{(0)}}\right)\left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_2^{(0)}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_n^{(0)}}\right)} .^{*)}$$

Die Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ convergirt in der Umgebung $(\xi^{(0)})$ der Stelle $(0)$ unbedingt, denn die rechte Seite unserer Ungleichung bleibt daselbst endlich, sie convergirt aber auch gleichmäfsig, da man stets solche ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ finden kann, dafs der absolute Betrag der Reihe

$$\sum_{(\mu_\nu)=(n_\nu)}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n},$$

der ja kleiner ist als

$$g \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^{(0)}}\right)^{n_1} \left(\frac{\xi_2}{\xi_2^{(0)}}\right)^{n_2} \cdots \left(\frac{\xi_n}{\xi_n^{(0)}}\right)^{n_n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\xi_1}{\xi_1^{(0)}}\right)\left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_2^{(0)}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_n^{(0)}}\right)},$$

an jeder Stelle der genannten Umgebung von $(0)$ kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine vorgegebene Gröfse $\delta$, sobald nur $n_1 \geqq m_1, n_2 \geqq m_2, \ldots n_n \geqq m_n$. Dann ist es aber ein Leichtes, gerade die Bedingung erfüllt zu sehen, welche die Definition der gleichmäfsigen Convergenz vorschreibt, wenn man nur $m$ die gröfste der Zahlen $m_\nu$ nennt.

Um eine Zahl $m$ der verlangten Art ausfindig zu machen, denke man die kleinste der positiven Gröfsen $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \ldots \xi_m^{(0)}$ ausgewählt, — sie heifse $\xi^{(0)}$ — dann wird die gegebene Reihe an allen Stellen $(x)$, für welche

---

*) Die hier angeschriebene Gleichheit können wir leicht bestätigen, da wir wissen, wie man die für $\frac{1}{1 - \frac{\xi_\nu}{\xi_\nu^{(0)}}}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ zu setzenden unendlichen Reihen mit einander multiplicirt.

$$|x_\nu| < \xi^{(0)}, \quad (\nu = 1, 2 \,.\,. n)$$

absolut convergiren und man darf die Reihe nach den Gliedern gleicher Dimension $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \mu$ ordnen. Ersetzt man hierauf

$$x_\nu \quad \text{durch} \quad c_\nu\, x, \quad (\nu = 1, 2 \,.\,. n),$$

wo die von Null verschiedenen Gröſsen $c_\nu$ nur die Bedingung zu erfüllen haben, daſs nach der Substitution die Coefficienten der Potenzen von $x$ nicht alle verschwinden, so erhält man eine Reihe:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu x^\mu$$

und für diese suche man ein $m$ so, daſs für alle Stellen der kleinsten der Umgebungen $\frac{\xi^{(0)}}{|c_\nu|}$ der absolute Betrag jeder Summe

$$\sum_{\mu=m}^{\infty} A_\mu x^\mu \quad (m' \geqq m)$$

kleiner wird als $\delta$. — Dann ist die Zahl $m$ eine der verlangten Art.

Ist $\xi^{(0)}$ die kleinste der Gröſsen $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \ldots \xi_n^{(0)}$ und $R$ ihre obere Grenze, so convergirt die Potenzreihe für alle Stellen des Bereiches

$$|x_\nu| < R \quad (\nu = 1, 2, \,.\,. n).$$

Die Reihe convergirt möglicherweise auch für Werthesysteme

$$(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

für die

$$|x_1| > R, \ |x_2| > R, \ \ldots \ |x_{n-1}| > R, \quad \text{aber } |x_n| < R.$$

Wir schenken aber der eben definirten Gröſse $R$ unsere Aufmerksamkeit, weil wir gerade diese den Convergenzradius nennen können und damit eine Bestimmtheit der Ausdrucksweise erzielen, wie bei der Potenzreihe einer Variabeln.

## § 28. Der wahre Convergenzradius einer Potenzreihe einer Variabeln.

Wir kehren zu den Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ zurück und bemerken, *wenn der absolute Betrag des Quotienten der Coefficienten aufeinanderfolgender Glieder* $\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|$ *stets gröſser ist als eine noch so kleine aber endliche Gröſse* $r$, *so ist die Potenzreihe mindestens solange convergent als* $|x| < r$ *ist.*

Es folgt aus den Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| < \frac{1}{r}, \quad \left|\frac{a_2}{a_1}\right| < \frac{1}{r}, \quad \ldots \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}\right| < \frac{1}{r}, \quad \ldots$$

durch Multiplication

$$\left|\frac{a_\nu}{a_0}\right| < \frac{1}{r^\nu} \quad \text{oder} \quad |a_\nu| r^\nu < |a_0|$$

für jedes $\nu$, d. h. der absolute Betrag jedes Gliedes $a_\nu x^\nu$ bleibt kleiner als die endliche Gröfse $|a_0|$, wenn nur $|x| \leq r$ ist, aber dann convergirt die Reihe für alle Werthe des durch die Bedingung $|x| < r$ bestimmten Bereiches.

Der so gefundene Convergenzbereich braucht nicht der *„wahre"* zu sein, d. h. derjenige, welcher das Gebiet der Stellen, wo $\mathfrak{P}(x)$ endlich ist, von dem Gebiete trennt, wo die Potenzreihe divergirt.

Die Existenz dieses wahren Convergenzkreises ist uns zwar schon klar, doch wollen wir einen Beweis für dieselben erbringen. Wir behaupten also:

Wenn eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ für gewisse Stellen endlich und für andere in gröfserer Entfernung von der Stelle $x = 0$ nicht endlich ist, dann gibt es einen wahren Convergenzkreis.

Der Voraussetzung nach findet sich in der Reihe von Werthen:

$$\mathfrak{P}(0),\ \mathfrak{P}(1),\ \mathfrak{P}(2) \ldots \mathfrak{P}(n) \ldots$$

ein erster nicht endlicher z. B. $\mathfrak{P}(n+1)$, dann gibt es in der neuen Werthereihe

$$\mathfrak{P}(n),\ \mathfrak{P}\left(n+\frac{1}{m}\right),\ \mathfrak{P}\left(n+\frac{2}{m}\right),\ \ldots \mathfrak{P}\left(n+\frac{m-1}{m}\right),\ \mathfrak{P}(n+1)$$

wieder einen letzten endlichen Werth, er heifse $\mathfrak{P}\left(n+\frac{m_1}{m}\right)$. Bestimmen wir ferner einen letzten Werth:

$$n + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m^2},$$

für welchen $\mathfrak{P}(x)$ endlich ist, fahren so fort und nehmen gleich an, dafs wir durch eine endliche Anzahl von Successionen nicht zu dem wahren Convergenzradius gelangen, so haben wir eine Gröfse

$$R = n + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m^2} + \frac{m_3}{m^3} + \cdots$$

definirt, die wegen der Beziehungen

$$\frac{m_1}{m} < 1,\ \frac{m_2}{m^2} < \frac{1}{m},\ \frac{m_3}{m^3} < \frac{1}{m^2},\ + \cdots$$

und der Ungleichung

$$R < n + 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \cdots = n + \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}$$

mit $n$ endlich ist. Diese Gröfse ist der wahre Convergenzradius, denn nach Annahme einer willkürlich kleinen Gröfse $\delta$ kann man stets eine ganze Zahl $\nu$ so bestimmen, dafs

$$R - \left(n + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m^2} + \cdots + \frac{m_\nu}{m^\nu}\right) < \frac{1}{m^{\nu+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} < \delta$$

wird, und

$$\mathfrak{P}\left(n + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m^2} + \cdots + \frac{m_\nu}{m^\nu}\right)$$

ist noch endlich, aber für eine positive Gröſse $x = R' > R$ kann die Potenzreihe nicht mehr convergiren. Man kann zwar die ganze Zahl $\nu$ noch so wählen, daſs

$$R + \frac{1}{m^\nu} < R'$$

bleibt, aber der Definition von $R$ zufolge kann $\mathfrak{P}\left(R + \frac{1}{m^\nu}\right)$ nicht endlich sein.

Der Kreis mit dem Radius $R$ um die Stelle $x = 0$ hat demnach die Eigenschaft des wahren Convergenzkreises.

Eine Potenzreihe kann entweder für jeden endlichen Werth der Variabeln oder *beständig* convergiren, dann ist der wahre Convergenzradius unendlich, oder sie hat nur einen unendlichen Convergenzbereich um die Stelle Null (der wahre Convergenzradius ist endlich), und schlieſslich kann sie den Convergenzradius Null haben, wie z. B. die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots.$$

Wie klein man hier auch $|x|$ annehmen mag, die Werthe $|n!\, x^n|$ wachsen mit $n$ ins Unendliche und der Quotient $\frac{n!}{(n-1)!}$ ebenso, daher ist $R$ und natürlich auch $r$ Null.

Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

convergirt jedenfalls für die Werthe $x$, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, denn der Quotient

$$\left(\frac{1}{n!}\right) : \left(\frac{1}{(n+1)!}\right) = n + 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$$

hat den kleinsten Werth 1. Der wahre Convergenzradius $R$ ist aber gröſser als $r = 1$, und zwar unendlich, denn wie groſs man auch $|x| = \xi$ wählen mag, der absolute Betrag der einzelnen Glieder bleibt unter einer angebbaren Gröſse $g$. Man kann ja zu jedem endlichen Werthe $\xi$ ein $n$ so bestimmen, daſs

$$n \geqq \xi > n - 1,$$

und dann bleibt der absolute Betrag jedes auf das $n^{\text{te}}$ folgenden Gliedes

$$\leqq \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu + \cdots$$

besitzt den endlichen Convergenzradius $R = r = 1$.

## § 29. Ein Satz über die Coefficienten der Potenzreihen.

Wir haben jetzt einen Satz zu beweisen, der uns einen richtigen Aufschlufs über die Coefficienten convergenter Potenzreihen geben wird.*)

Sind in der rationalen Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots + a_r x^{m_r},$$

die Exponenten $m_1, m_2 \ldots m_r$ positive und negative ganze Zahlen, und bezeichnet $g$ die obere Grenze der Werthe von $|f(x)|$ für alle Werthe $x$ mit dem absoluten Betrage $\xi$, so hat $g$ den Werth $|a|$ zur unteren Grenze.

Versteht man unter $\Theta$ eine Gröfse von dem absoluten Betrage 1, die aber keiner der Gleichungen

$$y^{m_\varrho} = 1 \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

genügt — und solcher Gröfsen gibt es unendlich viele, da wir nur eine endliche Anzahl von Werthen ausgeschlossen haben — und bildet man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= a_0 + a_1 \xi^{m_1} + a_2 \xi^{m_2} + \cdots + a_r \xi^{m_r}\\
f(\xi\Theta) &= a_0 + a_1 \xi^{m_1}\Theta^{m_1} + a_2 \xi^{m_2}\Theta^{m_2} + \cdots + a_r \xi^{m_r}\Theta^{m_r}\\
f(\xi\Theta^2) &= a_0 + a_1 \xi^{m_1}\Theta^{2m_1} + a_2 \xi^{m_2}\Theta^{2m_2} + \cdots + a_r \xi^{m_r}\Theta^{2m_r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(\xi\Theta^{n-1}) &= a_0 + a_1 \xi^{m_1}\Theta^{(n-1)m_1} + a_2 \xi^{m_2}\Theta^{(n-1)m_2} + \cdots + a_r \xi^{m_r}\Theta^{(n-1)m_r},
\end{aligned}$$

so wird die Summe dieser nach Division durch $n$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\Theta^\nu \xi) = a_0 + \frac{1}{n}\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \xi^{m_\varrho}\,\frac{1 - \Theta^{m_\varrho n}}{1 - \Theta^{m_\varrho}}.$$

Der absolute Betrag der linken und deshalb auch der absolute Betrag der rechten Seite ist nicht gröfser als die obere Grenze $g$. Rechts kann aber zufolge der Voraussetzung über die Gröfse $\Theta$ kein Summand über jede Grenze wachsen, und bei hinlänglich grofsem $n$ wird der rechtsstehende Ausdruck von $a_0$ um eine beliebig kleine Gröfse $\delta_n$ abweichen; sein absoluter Betrag

$$|a_0 + \delta_n|$$

wird kleiner als $g$, oder höchstens gleich $g$.

Wäre nun $|a_0| > g$, so könnte man ein $n$ so bestimmen, dafs auch

$$|a_0| - |\delta_n| > g$$

*) Siehe Pincherle S. 334 und Weierstrafs S. 93.

würde, aber dann müfste wegen der Ungleichung:

$$|a_0 + \delta_n| \geqq |a_0| - |\delta_n|$$

auch

$$|a_0 + \delta_n| > g$$

sein. Das ist nicht der Fall, folglich wird in der That

$$|a_0| \leqq g.$$

Ist hierauf die obere Grenze der Werthe einer convergenten Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

mit dem Convergenzradius $R$ für diejenigen Werthe $x$, deren absoluter Betrag $|x| = \xi < R$ ist, gleich $g$, *so genügt der absolute Betrag des Coefficienten $a_\nu$ der Ungleichung oder Gleichung:*

$$|a_\nu| \leqq g \cdot \xi^{-\nu}.$$

Bildet man nämlich das Product:

$$x^{-\nu}\mathfrak{P}(x) = a_0 x^{-\nu} + a_1 x^{-\nu+1} + \cdots + a_{\nu-1}x^{-1} + a_\nu + a_{\nu+1}x + a_{\nu+2}x^2 + \cdots,$$

so kann man in der Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu+\mu} x^\mu$$

ein $\mu = m$ so angeben, dafs der absolute Betrag

$$\left|\sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\nu+\mu} x^\mu\right|$$

für die der Bedingung $|x| \leqq \xi$ genügenden $x$ Werthe kleiner wird als die beliebig kleine positive Gröfse $\varepsilon$. Ist dann $\delta$ eine Gröfse, deren absoluter Betrag $|\delta| < \varepsilon$ ist, so wird

$$g\xi^{-\nu} > |a_0 x^{-\nu} + a_1 x^{-\nu+1} + \cdots + a_\nu + a_{\nu+1}x + \cdots + a_{\nu+m}x^m + \delta|$$

und umsomehr

$$g\xi^{-\nu} + \varepsilon > \left|\sum_{\mu=-\nu}^{m} a_{\nu+\mu} x^\mu\right|.$$

Die obere Grenze der rechten Seite, wo $|x| = \xi$ zu setzen ist, wird nach dem früheren Satze niemals kleiner als $|a_\nu|$, daher ist

$$g\xi^{-\nu} + \varepsilon > |a_\nu|,$$

und weil $\varepsilon$ willkürlich klein ist, gilt

$$|a_\nu| \leqq g\xi^{-\nu} \quad \text{oder} \quad g \geqq |a_\nu|\xi^\nu. \text{*)}$$

Ist eine Potenzreihe mit negativen Potenzen

*) Man beachte, dafs dieser Satz und der voranstehende Hilfssatz nur bewiesen werden kann, wenn wir complexe Variabeln in Rechnung ziehen.

$$a_0 + a_{-1}x^{-1} + a_{-2}x^{-2} + \cdots + a_{-\nu}x^{-\nu} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{-\nu}x^{-\nu},$$

die wir am besten mit

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

bezeichnen, vorgelegt, so lassen sich für diese die früheren Betrachtungen wiederholen, wenn man nur bemerkt, dafs sie durch die Substitution

$$x = \frac{1}{y}$$

in eine Reihe $\mathfrak{P}(y)$ übergeht.

Wenn $\mathfrak{P}(y)$ in dem Bereiche $|y| < R$ um die Stelle $y = 0$ convergirt, so convergirt $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ aufserhalb der um die Stelle $x = 0$ liegenden Kreisfläche mit dem Radius $\frac{1}{R} = R_1$, denn zu einer Stelle in dem ersten Bereiche gehört eine und nur eine Stelle des zweiten Bereiches und umgekehrt und die Grenzstellen $|y| = R$ haben ihre entsprechenden auf dem Kreise $|x| = \frac{1}{R}\cdot$

Ist die obere Grenze der Werthe $|\mathfrak{P}(y)|$ für die der Bedingung $|y| = \eta < R$ genügenden $y$ Werthe $g$, so gilt

$$|a_{-\mu}| < g\eta^{-\mu},$$

und wenn $|x| = \xi = \frac{1}{\eta}$ ist,

$$|a_{-\mu}| \leqq g\xi^{\mu}.$$

Der Convergenzbereich einer aus unendlich vielen Gliedern mit positiven und negativen Potenzen gebildeten Reihe

$$P(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu = \frac{1}{x}\mathfrak{P}_1(x) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

kann nur ein *Kreisring*, d. h. ein durch die Bedingungen

$$R_2 < |x| < R_1$$

definirter Bereich sein, denn wenn die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,\ \ \frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}x^{-\nu}$$

für solche $x$ Werthe convergiren, deren absoluter Betrag

$$|x| < R_1 \quad \text{respective} \quad |x| > R_2$$

ist, kann die Summe nur in dem genannten Bereiche endlich sein.

Ist $R_2 > R_1$, d. h. enthält der Bereich, wo $|x| < R_1$ ist, keine Stelle, welche aufserhalb der Umgebung $R_2$ der Stelle Null liegt, so convergirt die Reihe $P(x)$ nirgends und ist $R_1 = R_2$, so kann $P(x)$ höchstens an Stellen des Kreises $|x| = R_1$ convergiren.

Zur Ableitung des dem früheren analogen Satzes für die Coefficienten einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\nu} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

benöthigen wir den Hilfssatz über die rationale Function:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$= a_0 + a_1 x_1^{m_1^{(1)}} x_2^{m_2^{(1)}} \ldots x_n^{m_n^{(1)}} + \cdots + a_\nu x_1^{m_1^{(r)}} x_2^{m_2^{(r)}} \ldots x_n^{m_n^{(r)}},$$

in der $m_1^{(\varrho)}, m_2^{(\varrho)} \ldots m_n^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, 2 \ldots r)$ positive oder negative Zahlen bezeichnen, welchem Satze gemäfs die obere Grenze $g$ der Werthe von

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n)|$$

für alle Werthesysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, bei denen

$$|x_1| = \xi_1, \quad |x_2| = \xi_2, \quad \ldots |x_n| = \xi_n$$

ist, die untere Grenze $|a_0|$ besitzt.

Wählt man $n$ Gröfsen $\Theta_1, \Theta_2 \ldots \Theta_n$ derart, dafs

$$|\Theta_1| = 1, \quad |\Theta_2| = 1, \quad \ldots |\Theta_n| = 1,$$

aber $\Theta_\nu$ keiner der Gleichungen

$$y^{m_\nu^{(1)}} = 1, \; y^{m_\nu^{(2)}} = 1, \ldots y^{m_\nu^{(r)}} = 1$$

genügt und bildet man die Summe:

$$\frac{1}{m^n} \sum_{(\mu_\nu)=1}^{m} f(\xi_1 \Theta_1^{\mu_1 - 1}, \xi_2 \Theta_2^{\mu_2 - 1}, \ldots \xi_n \Theta_n^{\mu_n - 1}) =$$

$$= a_0 + \frac{1}{m^n} \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \xi_1^{m_1^{(\varrho)}} \xi_2^{m_2^{(\varrho)}} \ldots \xi_n^{m_n^{(\varrho)}} \frac{1 - \Theta_1^{m m_1^{(\varrho)}}}{1 - \Theta_1^{m_1^{(\varrho)}}} \frac{1 - \Theta_2^{m m_2^{(\varrho)}}}{1 - \Theta_2^{m_2^{(\varrho)}}} \ldots$$

$$\ldots \frac{1 - \Theta_n^{m m_n^{(\varrho)}}}{1 - \Theta_n^{m_n^{(\varrho)}}},$$

so ist der absolute Betrag dieser Ausdrücke nicht gröfser als $g$. Da die rechte Seite nach passender Wahl von $m$ beliebig wenig von $a_0$ verschieden sein wird, etwa um $\delta_m$, so ist

$$|a_0 + \delta_m| \leqq g.$$

Wäre nun $|a_0| > g$, so müfste auch ein solches $\delta_m$ existiren, dafs noch

$$|a_0| - |\delta_m| > g$$

und umsomehr

$$|a_0 + d_m| > g$$

ausfällt. Der so hervorgebrachte Widerspruch verlangt, dafs man

$$|a_0| \leqq g$$

setzt.

Ist dann die obere Grenze der Werthe von $|\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)|$

für alle Werthesysteme $(x)$, für welche $|x_\nu| = \xi_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ ist, gleich $g$, so wird

$$|a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n}| \leqq g \xi_1^{-\mu_1} \xi_2^{-\mu_2} \ldots \xi_n^{-\mu_n},$$

und für solche Stellen $(x)$, die innerhalb der durch die Gröſsen $\xi_\nu$ fixirten Umgebung der Stelle $(0)$ liegen, ist

$$|a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}| \leqq g \left(\frac{|x_1|}{\xi_1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{|x_2|}{\xi_2}\right)^{\mu_2} \ldots \left(\frac{|x_n|}{\xi_n}\right)^{\mu_n}.$$

Dann wird also der absolute Betrag des einzelnen Gliedes unserer Potenzreihe nicht gröſser als der des gleichnamigen Gliedes der Reihe für

$$\frac{g}{\left(1 - \frac{x_1}{\xi_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{\xi_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{\xi_n}\right)}.$$

Die Erweiterung dieses Theorems auf den Fall einer Potenzreihe

$$P(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu) = -\infty}^{+\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} =$$

$$= \mathfrak{P}(x_1, x_2 \ldots x_n) + \sum_{(\mu_\nu)=0}^{-\infty}{}' a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n},$$

wo der Strich bei der Summe anzeigt, daſs man die Combination $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ auszuschlieſsen habe, bildet keine Schwierigkeit. Es mag nur hervorgehoben werden, daſs der durch die Bedingungen

$$R_2^{(\nu)} < |x_\nu| < R_1^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

definirte $2n$-fach ausgedehnte zusammenhängende Convergenzbereich auch dadurch ausgezeichnet sein kann, daſs einige der Gröſsen $R_2^{(\nu)}$ verschwinden.

## § 30. Summen unendlich vieler Potenzreihen.

Die Addition einer endlichen Anzahl von Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ oder $P_\nu(x)$, die einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen, bedarf keiner weiteren Erwägungen, denn es ist klar, daſs die Summe der Reihen

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu \quad \text{oder} \quad P_\nu(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

selbst wieder Potenzreihen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \cdots + a_\mu^{(n)}) x^\nu$$

oder
$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} P_\nu(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \cdots + a_\mu^{(n)}) x^\mu$$

sind, die in dem den gegebenen Reihen gemeinsamen Convergenzkreise oder Ringe convergiren werden.

Sind unendlich viele Potenzreihen gegeben, so können wir die Summe nicht ohne Weiteres durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder in eine Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu x^\mu \quad \text{oder} \quad \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu x^\mu$$

transformiren, wo

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

ist. Setzen wir aber fest, dafs man einen Kreis mit dem Radius $R$ oder einen Kreisring mit den Radien $R_1$ und $R_2$ $(0 < R_1 < R_2)$ angeben kann, in welchem nicht allein jede einzelne Reihe $\mathfrak{P}_\nu(x)$ bezw. $P_\nu(x)$, sondern auch die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) \quad \text{resp.} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$$

der in bestimmter Aufeinanderfolge gegebenen Reihen

$$\mathfrak{P}_\nu(x), \quad P_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

endlich sind und für alle $x$ Werthe von gleichem absoluten Betrage gleichmäfsig convergiren, so kann man zeigen, dafs die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} = A_\mu$$

für jeden bestimmten Werth von $\mu$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt und in den genannten Bereichen die Reihen

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu x^\mu \quad \text{resp.} \quad P(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu x^\mu$$

unbedingt und gleichmäfsig convergiren und

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x), \quad P(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$$

wird.

Wir beschäftigen uns mit dem Falle, wo die unendlich vielen Reihen

$$P_1(x), \; P_2(x), \ldots P_\nu(x) \ldots$$

gegeben sind.*)

Ist $r$ eine in dem Intervalle von $R_1$ bis $R_2$ gelegene positive und $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Gröfse, so kann man zufolge der Festsetzungen eine ganze Zahl $m$ derart bestimmen, dafs der absolute Betrag der Summe

---

*) S. Weierstrafs, Zur Functionenlehre, Monatsber. der Berl. Akad. 1880.

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x)$$

für jeden Werth von $x$, dessen absoluter Betrag gleich $r$ ist und für jede ganze Zahl $n \geqq m$ kleiner wird als $\varepsilon$. Ist $n' \geqq n$, so mufs deshalb auch

$$\left|\sum_{\nu=n'}^{\infty} P_\nu(x)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x)\right| < 2\,\varepsilon$$

werden.

Ziehen wir die hier genannten $(n'-n)$ Potenzreihen zusammen, indem wir die Glieder gleicher Potenzen vereinigen, so wird der Coefficient von $x^\mu$, nämlich $\sum_{\nu=n}^{n'} a_\mu^{(\nu)}$, der Bedingung genügen:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq 2\,\varepsilon\, r^{-\mu}$$

und diese Ungleichung reicht zu dem Schlusse hin, dafs $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} = A_\mu$ einen endlichen bestimmten Werth besitzt.

Die nun formal zu bildende Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu\, x^\mu$$

convergirt in dem Bereiche, wo $R_1 < |x| < R_2$ ist, unbedingt. Zum Beweise nehme man zwei positive Gröfsen $r_1$ und $r_2$, so dafs

$$R_1 < r_1 \leqq r < r_2 < R_2$$

wird und wähle die ganze Zahl $n$ derart, dafs

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} a_\mu^{(\nu)}\right|$$

kleiner als $2\,\varepsilon\, r_2{}^{-\mu}$ und somit auch kleiner als $2\,\varepsilon\, r_1{}^{-\mu}$ ist, dann wird

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq 2\,\varepsilon\, r_1{}^{-\mu} \quad \text{und} \quad \left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq 2\,\varepsilon\, r_2{}^{-\mu}.$$

Bezeichnet man hierauf

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\mu^{(\nu)} = A_\mu^{(1)} \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} = A_\mu^{(2)},$$

wonach

$$A_\mu = A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)}$$

zu setzen ist, so wird für die $x$ Werthe von dem absoluten Betrage $r$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |A_\mu^{(2)}\, x^\mu| \leqq 2\,\varepsilon \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_2}\right)^\mu, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} |A_\mu^{(2)}\, x^{-\mu}| \leqq 2\,\varepsilon \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\mu}$$

und

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |A_\mu^{(2)} x^\mu| \leqq 2\varepsilon\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right)$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu^{(2)} x^\mu$$

convergirt unbedingt und gleichmäſsig.

Die Summe der endlichen Anzahl von Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} P_\nu(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu^{(1)} x^\mu$$

besitzt selbstverständlich dieselben Eigenschaften und daher ist auch

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu x^\mu = P(x)$$

eine für jeden $x$-Werth, dessen absoluter Betrag in dem Intervall von $R_1$ bis $R_2$ liegt, *absolut, unbedingt und gleichmäſsig convergente Reihe.*

Schlieſslich ist die gewonnene Reihe $P(x)$ daselbst gleich $\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$, denn man kann in der Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu x^\mu\right| = \left|\sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu^{(2)} x^\mu\right|$$

$$\leqq 2\varepsilon + 2\varepsilon\left(\frac{r_1}{r}\,\frac{1}{1-\frac{r_1}{r}} + \frac{1}{1-\frac{r}{r_2}}\right)$$

$\varepsilon$ stets so klein wählen, daſs die von $n$ unabhängige rechte Seite für jeden Werth $r = |x|$ unseres Intervalles kleiner wird als eine noch so kleine Gröſse $\delta$, was für unsere Behauptung genügt. —

Es sei andrerseits eine unendliche Anzahl von Potenzreihen mehrerer Variabeln in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und es gebe eine Umgebung $(R)$ der Stelle $(0)$, für deren Punkte $(x)$ jede einzelne Reihe $\mathfrak{P}_\nu$ und auch die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

convergirt und zwar gleichmäſsig convergirt für alle Stellen $(x)$, bei denen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

der Reihe nach denselben absoluten Betrag $r_1 < R_1$, $r_2 < R_2, \ldots r_n < R_n$ besitzen.

Jetzt kann man nach Angabe von $n$ Gröfsen $r_1, r_2, \ldots r_n$ und einer beliebig kleinen Gröfse $\varepsilon$ eine ganze Zahl $m$ so bestimmen, dafs für jedes Werthesystem $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Beschaffenheit:

$$|x_1| = r_1, \quad |x_2| = r_2, \ldots |x_n| = r_n$$

und jede ganze Zahl $n \geqq m$

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) \right| < \varepsilon,$$

und für jede ganze Zahl $n' \geqq n$

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n'} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) \right| < 2\,\varepsilon.$$

Dann aber mufs

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n'} a^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} \right| \leqq 2\,\varepsilon\, r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_n^{-\mu_n}$$

sein und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} = A_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}$$

wird endlich.

Die Potenzreihe

$$\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} A_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} = \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ist in der Umgebung $(R)$ von $(0)$ auch unbedingt convergent, denn nach der Zerlegung

$$\begin{aligned} A_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} &= \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} + \sum_{\nu=n}^{\infty} a^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} \\ &= A^{(1)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} + A^{(2)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} \end{aligned}$$

ist

$$\left| A^{(2)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} \right| \leqq 2\,\varepsilon\, r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_n^{-\mu_n}$$

und für alle Stellen $(x)$, für welche

$$|x_1| = \varrho_1 < r_1, \quad |x_2| = \varrho_2 < r_2, \ldots |x_n| = \varrho_n < r_n$$

ist, gilt die Beziehung:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left| A^{(2)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \right| &\leqq 2\,\varepsilon \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{\varrho_n}{r_n}\right)^{\mu_n} \\ &= 2\,\varepsilon \left[\left(1 - \frac{\varrho_1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{\varrho_2}{r_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varrho_n}{r_n}\right)\right]^{-1}, \end{aligned}$$

also die Summe links ist endlich. Dasselbe gilt für die Summe

$$\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left| A^{(1)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} \right|$$

und deshalb ist auch $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für die genannten Stellen und in der ganzen Umgebung $(R)$ von $(0)$ endlich.

Schliefslich gibt die durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder unserer Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ gewonnenen Reihe $\mathfrak{P}$ in der Umgebung $(R)$ der Stelle $(0)$ dieselben Werthe wie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu$, denn es ist der absolute Betrag

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu - \mathfrak{P} \right| \leqq 2\varepsilon + 2\varepsilon \left[ \left(1 - \frac{\varrho_1}{r_1}\right) \left(1 - \frac{\varrho_2}{r_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varrho_n}{r_n}\right) \right]^{-1}$$

und kleiner als jede noch so kleine Gröfse $\delta$.

Die Tragweite der vorstehenden Theoreme geht aus den folgenden Sätzen hervor:

1) Das Product zweier in der Umgebung $R$ der Stellen $x = 0$ convergenten Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu$$

läfst sich in eine Potenzreihe entwickeln, die in demselben Bereiche convergirt.

In der That ist die Summe der unendlich vielen Potenzreihen

$$b_\mu x^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_\nu \quad (\mu = 0, 1, 2 \ldots)$$

in der Umgebung $R$ der Stelle $0$ gleichmäfsig convergent, denn es gibt eine solche ganze Zahl $m$, dafs für jedes $x$ mit einem absoluten Betrage $r < R$

$$\left| \sum_{\mu=m'}^{\infty} b_\mu x^\mu \right| < \varepsilon \quad (m' \geqq m) \quad \text{und} \quad \left| \mathfrak{P}_1(x) \sum_{\mu=m'}^{\infty} b_\mu x^\mu \right| < \varepsilon |\mathfrak{P}_1(x)$$

wird, und weil die Reihe $\mathfrak{P}_1(x)$ daselbst convergirt, kann man $m$ auch so wählen, dafs $\varepsilon|\mathfrak{P}_1(x)|$ kleiner wird als eine beliebig kleine positive Gröfse $\delta$.

Jetzt darf man die unendlich vielen Potenzreihen in der früheren Weise vereinigen und es wird:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} (b_\mu x^\mu \mathfrak{P}_1(x)) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (a_0 b_\lambda + a_1 b_{\lambda-1} + \cdots + a_{\lambda-1} b_1 + a_\lambda b_0) x^\lambda$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda x^\lambda = \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) . \mathfrak{P}_2(x).$$

2) Eine ganze rationale Function

$$f(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

der $n$ Potenzeihen

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

mit einem gemeinsamen Convergenzbereiche $|x| < R$ läſst sich in eine ebendaselbst convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ transformiren.

3) Setzt man für $y_\nu$ Potenzeihen mehrerer Variabeln

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

so geht $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ in eine in dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ convergente Potenzreihe über.

4) Tritt an Stelle der ganzen rationalen Function $f$ eine convergente Potenzreihe

$$f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu$$

und setzt man hierin für $y$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius $R$

$$y = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu = \mathfrak{P}(x),$$

so wird $f(y)$ in eine nach Potenzen von $x$ fortschreitende convergente Potenzreihe zu entwickeln sein, wenn die Summe der unendlich vielen Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \mathfrak{P}^\nu(x)$$

in einer Umgebung der Stelle $x = 0$ gleichmäſsig convergirt. Bezeichnet $x'$ eine Stelle in dem Convergenzbereiche der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, an welcher nicht allein $|\mathfrak{P}(x)|$, sondern auch $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} |b_\mu x^\mu|$ einen in dem Convergenzkreise der Reihe $f(y)$ liegenden Werth erhält, so wird die angegebene Summe gewiſs gleichmäſsig convergiren, so lange

$$|x| < |x'|,$$

und in diesem Bereiche ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda.$$

Falls die Potenzreihe $f(y)$ beständig convergirt, wird die neue Reihe so lange convergiren, als $x$ in dem Convergenzkreise der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ bleibt. Wenn $\mathfrak{P}(x)$ eine beständig convergente Reihe ist, muſs der Convergenzkreis der neuen Reihe so groſs sein als der der Reihe $f(y)$, und wenn endlich $\mathfrak{P}(x)$ und $f(y)$ beständig convergiren, wird auch die Reihe $\sum\limits_{\lambda} c_\lambda x^\lambda$ einen unendlich groſsen Convergenzradius besitzen.

5) Ist $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ eine Potenzreihe

$$\sum_{(\varkappa_\nu)=0}^{\infty} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n} y_1^{\varkappa_1} y_2^{\varkappa_2} \ldots y_n^{\varkappa_n}$$

und sind $y_\nu$ Potenzreihen mit einem gemeinsamen Convergenzbereich:

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} b^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

und gibt es ein Werthesystem

$$|x_1| = \xi_1, \quad |x_2| = \xi_2 \ldots |x_n| = \xi_n,$$

für welches die $n$ Summen

$$\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} |b^{(\nu)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}| \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \ldots \xi_n^{\mu_n}$$

die Werthe $\eta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ erhalten, die eine Stelle in dem Convergenzbereiche der Reihe $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ constituiren, so kann man offenbar $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ in eine Potenzreihe

$$\sum_{(\lambda_\nu)=0}^{\infty} c_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} = \mathfrak{P}'(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

entwickeln, die für alle Stellen der Umgebung $(\xi)$ von $(0)$ convergirt, und dort gibt sie dieselben Werthe, die $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$ in der Umgebung $(\eta)$ annimmt.

Ist wiederum $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ beständig oder für jede endliche Stelle $(y)$ convergent, so ist $\mathfrak{P}'(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an allen Stellen des gemeinsamen Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ convergent, und $\mathfrak{P}'(x_1, x_2, \ldots x_n)$ convergirt beständig, wenn der gemeinsame Convergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ alle endlichen Stellen $(x)$ enthält.

6) Die Sätze unter Nummer 4) und 5) lassen sich insofern erweitern, als man in die gegebene Reihe $f$ Potenzreihen einsetzen darf, die mehr Variable enthalten als $f$.

Substituirt man z. B. an Stelle von $y_\nu$ eine Summe $u_\nu + v_\nu$, und sind $u_\nu^{(1)}$, $v_\nu^{(1)}$ Werthe, für welche

$$f(u_1^{(1)} + v_1^{(1)}, u_2^{(1)} + v_2^{(1)}, \ldots u_n^{(1)} + v_n^{(1)})$$

endlich ist, so kann man die Reihe $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ in eine Reihe nach Potenzen der neuen Variabeln transformiren, die gewiſs so lange convergirt, als

$$|u_\nu| < |u_\nu^{(1)}|, \quad |v_\nu| < |v_\nu^{(1)}| \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Dabei ist es aber erlaubt, die Reihe nach Potenzen der Gröſsen $u$ oder der Gröſsen $v$ zu ordnen und als Coefficienten Potenzreihen nach $v$ oder $u$ anzuschreiben. Jede der Reihen convergirt in dem durch die Bedingungen

$$|u_\nu| + |v_\nu| < R_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

definirten Bereiche, wenn $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ in der Umgebung $(R)$ von $(0)$ convergirt.

Bevor wir noch den Quotienten zweier in einer Umgebung der Stelle Null convergenten Potenzreihen in eine neue Potenzreihe entwickeln, schicken wir den Hilfssatz voraus:

Ist der Convergenzradius $R$ einer an der Stelle Null nicht verschwindenden Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu$$

von Null verschieden, so gibt es auch eine Umgebung $R_1 \leqq R$ der Stelle Null, wo die Potenzreihe nicht verschwindet.

Ist $r$ eine positive Gröfse kleiner als $R$ und $g$ die obere Grenze der Werthe $|\mathfrak{P}(x)|$ für alle Stellen $x$ in der Entfernung $r$ von Null, so gilt die Beziehung

$$|b_\mu| \leqq g r^{-\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2 \ldots)$$

und für ein $|x| = \varrho < r$ ist

$$|b_\mu| \varrho^\mu \leqq g \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\mu$$

und

$$|b_1 x + b_2 x^2 + \cdots| \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} |b_\mu| \varrho^\mu \leqq g \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\mu = g\,\frac{\varrho}{r}\,\frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r}}.$$

Der Voraussetzung zufolge ist $|b_0|$ nicht Null, und darum kann man die Gröfse $\varrho$ so bestimmen, dafs

$$g\,\frac{\varrho}{r - \varrho} < |b_0|.$$

Bezeichnet $R_1$ einen dieser Bedingung genügenden Werth, so wird für alle Stellen der Umgebung $R_1$ von $x = 0$ umsomehr

$$|b_1 x + b_2 x^2 + \cdots| < |b_0|$$

und darum kann

$$|\mathfrak{P}(x)|$$

daselbst nicht verschwinden. Es ist also ein Bereich der verlangten Art gefunden. —

Ist die vorgegebene Potenzreihe eine mit mehreren Variabeln:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_n)=0}^{\infty} b_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n},$$

und hierin $b_{0,0\ldots0}$ von Null verschieden, ist ferner $R$ eine positive Gröfse, die kleiner ist als jede der den Convergenzbereich der Reihe fixirenden Gröfsen $(R_1, R_2, \ldots R_n)$ und $g$ die obere Grenze der Werthe $|\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)|$ für alle durch die Bedingungen

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = r < R$$

charakterisirten Stellen $(x)$, so wird

$$|b_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n}| \leq g r^{-(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n)}$$

und an den Stellen $(x)$, für welche $|x_\nu| = \varrho_\nu < r \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$ ist, mufs

$$\left|\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty}{}' b_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}\right| \leq g \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty}{}' \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^{\mu_1} \left(\frac{\varrho_2}{r}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{\varrho_n}{r}\right)^{\mu_n}$$

$$= g\left\{\left[\left(1-\frac{\varrho_1}{r}\right)\left(1-\frac{\varrho_2}{r_2}\right) \cdots \left(1-\frac{\varrho_n}{r_n}\right)\right]^{-1} - 1\right\}$$

sein. Doch weil man die Gröfsen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ so wählen kann, dafs die rechte Seite kleiner wird als die endliche von Null verschiedene Gröfse $|b_{0,0 \dots 0}|$, so kann man auch für die Potenzreihe mehrerer Variabeln eine Umgebung der Stelle (0) angeben, wo sie den Werth Null nicht annimmt.

In einem solchen Bereiche läfst sich

$$\frac{1}{\mathfrak{P}} = \frac{1}{b_{0,0\dots 0} + \sum\limits_{(\mu_\nu)=0}^{\infty}{}' b_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}} = \frac{1}{b_{0,0\dots 0} + y}$$

in eine Potenzreihe

$$\overline{\mathfrak{P}}(x_1, x_2, \dots x_n)$$

entwickeln, denn solange $|q| < |p|$ gilt die Formel

$$\frac{1}{p+q} = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu-1}$$

und die mit $y$ bezeichnete Potenzreihe hat gerade die Beschaffenheit, welche nach einem der früheren Sätze nothwendig ist, damit die Substitution dieser Reihe in

$$\frac{1}{b_{0,0\dots 0} + y} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{b_{0,0\dots 0}} \left(\frac{y}{b_{0,0\dots 0}}\right)^\nu$$

eine in dem besagten Bereiche convergente Potenzreihe gibt.

7) Jetzt ist aber auch der Quotient zweier convergenter Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n)$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_3(x_1, x_2, \dots x_n)$ zu entwickeln, wenn nur $\mathfrak{P}_2(0, 0, \dots 0)$ von Null verschieden ist.

In dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}_3$, der jedenfalls in dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Umgebung der Stelle (0) bildet, wo der Nenner nicht verschwindet, ist

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = \mathfrak{P}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{P}_2.$$

Ist $\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ und $\mathfrak{P}_2(x) = \sum_{\mu=m}^{\infty} b_\mu x^\mu$, so kann man immer noch einen Bereich angeben, wo

$$|b_{m+1} x + b_{m+2} x^2 + \cdots| < |b_m|;$$

und man darf

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = \frac{1}{x^m} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu}{\sum_{\mu=0}^{\infty} b_{m+\mu} x^\mu} = \frac{1}{x^m} \mathfrak{P}_3(x) = \sum_{\lambda=-m}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$$

setzen.

Den entsprechenden Fall für den Quotienten von Potenzreihen mehrerer Variabeln wollen wir bei späterer Gelegenheit untersuchen, da die unendlich vielen hier auftretenden Nullstellen des Nenners in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle (0) Schwierigkeiten machen. Sehr wohl kann aber der Satz bewiesen werden:

8) Der Quotient ganzer Functionen ohne gemeinsamen Theiler:

$$\frac{f(y_1, y_2, \ldots y_n)}{g(y_1, y_2, \ldots y_n)}$$

geht durch die Substitutionen

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ über, die in dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ so lange convergirt, als $x$ nicht einen Werth annimmt, dem eine Nullstelle $(y)$ von $g$ entspricht.

9) Der Quotient zweier Potenzreihen

$$\frac{\mathfrak{P}_1(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\mathfrak{P}_2(y_1, y_2, \ldots y_n)},$$

dessen Nenner an der Stelle (0) nicht verschwindet, kann auch wieder durch die obigen Substitutionen in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandelt werden, nur mufs die Stelle

$$y_\nu^{(0)} = \mathfrak{P}_\nu(0) \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

in dem Convergenzbereich der gegebenen Reihen liegen; dann gibt es einen Bereich $|x| < r$, dem nur Stellen $(y')$ des Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ angehören, und die Transformation in $\mathfrak{P}(x)$ ist möglich.

Wir unterbrechen diese Erwägungen, die die Bildung einer unübersehbaren Menge convergenter Potenzreihen gestatten, und ziehen aus den Sätzen über die an der Stelle Null nicht verschwindenden Potenzreihen einen Schlufs, der die formale Bildung neuer Potenzreihen wesentlich erleichtert.

Da eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die für $x=0$ nicht verschwindet, in einem endlichen Bereiche um die Stelle Null keine Nullstelle besitzt, *so folgt, dafs eine Potenzreihe, die für unendlich viele unendlich kleine Werthe von $x$ oder an unendlich vielen Stellen jeder beliebig kleinen Umgebung von $x=0$ verschwindet, identisch Null sein mufs.*

Wenn daher zwei Potenzreihen an unendlich vielen Stellen einer Punktmenge, deren abgeleitete Punktmenge die Stelle Null enthält, dieselben Werthe annehmen, so ist die Differenz eine identisch verschwindende Potenzreihe, d. h. die Coefficienten derselben sind alle Null, und die Coefficienten gleichnamiger Glieder der gegebenen Reihen sind einander gleich.

Aus diesem Satze geht hervor, dafs man zur Berechnung der Potenzreihe $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$, in welche sich der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{b_0 + \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} b_\mu x^\mu}$$

entwickeln läfst, nicht erst die Entwicklung von $\mathfrak{P}_2^{-1}(x)$ und dann die Multiplication mit $\mathfrak{P}_1(x)$ nothwendig hat, sondern man setze

$$\mathfrak{P}_1(x) = \mathfrak{P}_2(x) \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$$

und bestimme die unbestimmt gelassenen Coefficienten $c_\lambda$ so, dafs in dem Producte der Coefficient von $x^\nu$ gleich $a_\nu$ ist. Man erhält die Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0 \\
a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_\nu &= b_0 c_\nu + b_1 c_{\nu-1} + b_2 c_{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} c_1 + b_\nu c_0 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

aus denen sich die Gröfsen $c_\lambda$ successive berechnen lassen. Das Gesetz der Composition aus den Gröfsen $a_\nu$ und $b_\mu$ ist ein ziemlich complicirtes.

Bei dieser *„Methode der unbestimmten Coefficienten“* darf man nicht am Ende folgendermafsen verfahren:

Die Gleichung

$$\sum_\nu a_\nu x^\nu - \sum_\mu b_\mu x^\mu \sum_\lambda c_\lambda x^\lambda = 0$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu - \sum_{\mu=0}^{\infty} (b_0 c_\mu + b_1 c_{\mu-1} + \cdots + b_\mu c_0)\, x^\mu = 0$$

besteht für $x = 0$ und darum ist $a_0 = b_0 c_0$. Weil dann

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu - \sum_{\mu=1}^{\infty} (b_0 c_\mu + b_1 c_{\mu-1} + \cdots + b_\mu c_0) x^\mu = 0 \qquad (\alpha)$$

wird, kann man durch $x$ dividiren und die nach der Division zu vollziehende Substitution des Werthes Null für $x$ gibt $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$ usw.

Diese Schlufsfolge ist unrichtig, denn man darf durch $x$ nicht dividiren, wenn man gefunden hat, dafs die Gleichung ($\alpha$) gerade für $x = 0$ besteht, und man kann von vornherein nicht wissen, dafs die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1} x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} (b_0 c_{\mu+1} + b_1 c_\mu + \cdots + b_{\mu+1} c_0) x^\mu$$

auch für den Werth $x = 0$ übereinstimmen. Mit anderen Worten, man darf auf die Identität zweier Reihen erst dann schliefsen, wenn sie für unendlich viele unendlich kleine Werthe der Variabeln gleiche Werthe besitzen.

Zwei Potenzreihen mehrerer Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, die für alle Combinationen $(x)$ von $n$ nach Null convergirenden Werthereihen für $x_\nu$:

$$x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots x_\nu^{(\mu)} \ldots \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

übereinstimmen, sind identisch gleich, denn die Differenz ist eine Potenzreihe, die für unendlich viele Stellen $(x)$ jeder (noch so kleinen) Umgebung der Stelle $(0)$ verschwindet.

Wir können wieder sagen, eine Potenzreihe ist identisch Null, wenn sie für eine Punktmenge, die die Stelle $(0)$ zur Häufungs- oder Grenzstelle hat, verschwindet.

## § 31. **Die abgeleitete Potenzreihe.**

Aus jeder einzelnen convergenten Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

kann man unendlich viele andere ableiten. Bezeichnet $x_0$ einen bestimmten Werth, dessen absoluter Betrag kleiner ist als der wahre Convergenzradius $R$ und setzen wir

$$x = x_0 + h,$$

wo

$$|x| = |x_0 + h| \leq |x_0| + |h| < R$$

sein soll, so kann man die Summe der unendlich vielen ganzen Functionen von $h$

$$f_\nu(h) = a_\nu (x_0 + h)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder in $h$ bilden, denn die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(h)$$

ist so lange gleichmäſsig convergent, als $|h| < R - |x_0|$ ist. Es entsteht die Reihe

$$\mathfrak{P}(x_0+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x_0+h)^\nu = \mathfrak{P}_0(x_0) + \mathfrak{P}_1(x_0)h + \mathfrak{P}_2(x_0)h^2 + \cdots,$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{P}_\nu(x_0)$ Potenzreihen in $x_0$ sind, die endlich bleiben, wenn $x_0$ in dem Convergenzbereiche der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ liegt.

Für den Werth $h = 0$ wird

$$\mathfrak{P}(x_0) = \mathfrak{P}_0(x_0),$$

was $x_0$ auch für einen Werth in dem Convergenzkreise von $\mathfrak{P}(x)$ haben mag, daher ist

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_0(x)$$

und

$$\mathfrak{P}(x_0+h) - \mathfrak{P}(x_0) = \mathfrak{P}_1(x_0)h + h[\mathfrak{P}_2(x_0)h + \mathfrak{P}_3(x_0)h^2 + \cdots].$$

Der Klammerausdruck wird für unendlich kleine Gröſsen $h$ selbst unendlich klein, und man schlieſst neuerdings, daſs die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ an jeder Stelle ihres Convergenzbereiches stetig veränderlich ist.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x)$ heiſst die *Derivirte* oder *Ableitung* von $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{P}_1(x_0)$ ist die Derivirte von $\mathfrak{P}(x)$ an der Stelle $x_0$; sie ist unabhängig von dem Werthe des Incrementes $h$, welches wir mit $dx_0$ bezeichnen und das *Differential* von $x$ an der Stelle $x_0$ nennen. Das Product

$$\mathfrak{P}_1(x_0)\,dx_0$$

wird als *Differentialänderung* von $\mathfrak{P}(x)$ an der Stelle $x_0$ bezeichnet und indem man

$$\mathfrak{P}_1(x_0)\,dx_0 = d\,\mathfrak{P}(x_0)$$

schreibt, heiſst

$$\mathfrak{P}_1(x_0) = \frac{d\,\mathfrak{P}(x_0)}{d\,x_0}$$

auch der *Differentialquotient* an der Stelle $x_0$.

Die Ableitung $\mathfrak{P}_1(x)$ ist, wie wir aus der nach $h$-Potenzen geordneten Reihe $\sum_\nu a_\nu (x+h)^\nu$ ersehen, durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu x^{\nu-1}$$

definirt. Bildet man aus derselben

$$\mathfrak{P}_1(x_0+h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu (x_0+h)^{\nu-1} = \mathfrak{P}_{1,0}(x_0) + \mathfrak{P}_{1,1}(x_0)h + \mathfrak{P}_{1,2}(x_0)h^2 + \cdots,$$

so ergibt sich leicht, daſs

$$\mathfrak{P}_1(x_0) = \mathfrak{P}_{1,0}(x_0) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_1(x) = \mathfrak{P}_{1,0}(x),$$

$$\mathfrak{P}_{1,1}(x_0) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, a_\nu x_0^{\nu-2} = \frac{1}{1.2}\,\mathfrak{P}_2(x_0) = \mathfrak{P}^{(2)}(x_0)$$

ist und dafs allgemein die Derivirte von $\mathfrak{P}_1(x)$ oder $\frac{d\mathfrak{P}_1(x)}{dx} = \mathfrak{P}^{(2)}(x)$ zu setzen ist. Man nennt die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, a_\nu x^{\nu-2},$$

welche durch denselben Procefs aus $\mathfrak{P}_1(x)$ zu bilden ist, wie $\mathfrak{P}_1(x)$ aus $\mathfrak{P}(x)$, d. h. dadurch dafs man an Stelle von $x^\mu$ $\mu x^{\mu-1}$ setzt, die zweite Derivirte von $\mathfrak{P}(x)$ und bezeichnet dieselbe anstatt durch

$$\frac{d\left(\frac{d\,\mathfrak{P}(x)}{dx}\right)}{dx} \quad \text{mit} \quad \frac{d^2\mathfrak{P}(x)}{dx^2}$$

und die zweite Differentialänderung mit

$$\mathfrak{P}^{(2)}(x)\,dx = d\mathfrak{P}_1(x) = d^2\mathfrak{P}(x).$$

So fortschreitend gelangt man zu der $n^{\text{ten}}$ Derivirten von $\mathfrak{P}(x)$ oder dem $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}_n(x) = \frac{d^n\,\mathfrak{P}(x)}{dx^n} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)a_\nu x^{\nu-n}.$$

Diese Potenzreihe ist von der Gestalt

$$n!\,a_\nu + x\,\overline{\mathfrak{P}}(x),$$

und man sieht, dafs der Coefficient von $x^\nu$ in der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ gleich

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\,\mathfrak{P}(x)}{dx^n}\right)_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}^{(n)}(0),$$

und der Coefficient $\mathfrak{P}_n(x_0)$ gleich

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\,\mathfrak{P}(x)}{dx^n}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}^{(n)}(x_0)$$

ist. Schreibt man noch für $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}^{(1)}$ oder $\mathfrak{P}'$, so wird

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(0) + \mathfrak{P}^{(1)}(0)\,\frac{x}{1} + \mathfrak{P}^{(2)}(0)\,\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\mathfrak{P}(x_0+h) = \mathfrak{P}(x_0) + \mathfrak{P}^{(1)}(x_0)\frac{h}{1} + \mathfrak{P}^{(2)}(x_0)\,\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

und wenn man hier an Stelle von $x_0+h$ $x$ setzt, entsteht die Reihe:

$$\mathfrak{P}[x_0+(x-x_0)] = \mathfrak{P}(x_0) + \mathfrak{P}^{(1)}(x_0)\frac{x-x_0}{1} + \mathfrak{P}^{(2)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Diese auch direct durch die Substitution

$$x_0 + (x-x_0) \quad \text{für} \quad x_0$$

aus $\mathfrak{P}(x)$ ableitbare Potenzreihe, die wir mit

$$\mathfrak{P}(x\,|\,x_0) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}(x-x_0)$$

bezeichnen, convergirt zum mindesten so lange als

$$|x - x_0| < R - |x_0|,$$

d. h. für alle Stellen in dem um $x_0$ mit dem Radius $R - |x_0|$ beschriebenen Kreise. Dieser Convergenzbereich braucht nicht der wahre zu sein, aber an den ihm angehörigen Stellen $x$ hat $\mathfrak{P}(x-x_0)$ denselben Werth wie $\mathfrak{P}(x)$, dort ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [x_0 + (x - x_0)]^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}. \quad -$$

Ist nun auch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

vorgelegt und sind

$$(x^{(0)}) \quad \text{und} \quad (x^{(0)} + h)$$

Stellen in dem Convergenzbereiche, so kann man

$$\mathfrak{P}(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2, \ldots x_n^{(0)} + h_n)$$

in eine nach Potenzen von $h_1, h_2, \ldots h_n$ fortschreitende Reihe

$$\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \mathfrak{P}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}) h_1^{\mu_1} h_2^{\mu_2} \ldots h_n^{\mu_n}$$

entwickeln. Die Coefficienten sind wieder Potenzreihen in den Gröfsen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$, und wieder gilt

$$\mathfrak{P}_{0,0\ldots 0}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Die Coefficienten von $h_1, h_2, \ldots h_n$, nämlich

$$\mathfrak{P}_{1,0,\ldots 0}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}), \mathfrak{P}_{0,1,0,\ldots 0}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}), \ldots \mathfrak{P}_{0,0,\ldots 1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$$

heifsen die *partiellen Ableitungen* der Reihe $\mathfrak{P}$ nach den Variabeln $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ an der Stelle $(x^{(0)})$. Man bezeichnet sie mit

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1}\right)_{(x^{(0)})}, \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_2}\right)_{(x^{(0)})} \cdots \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_n}\right)_{(x^{(0)})}$$

und zeigt leicht, dafs die partielle Derivirte nach $x_\nu$ $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\nu}$ aus $\mathfrak{P}$ hervorgeht, indem man an Stelle $x_\nu^{\mu_\nu}$ $\mu_\nu x^{\mu_\nu - 1}$ setzt.

Durch denselben Ableitungsprocefs kann man die Ableitungen aller Ordnungen

$$\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}$$

gewinnen, die von der Anordnung der Processe unabhängig sind. Der Werth dieser Ableitung $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle (0) ist bis auf den Factor

$$\mu_1! \; \mu_2! \ldots \mu_n!$$

gleich $a_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}$ und darum kann man die gegebene Reihe auf die Form bringen:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \mathfrak{P}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial_n^{\mu_n}} \right)_{(0)} \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{x_2^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdots \frac{x_n^{\mu_n}}{\mu_n!},$$

und die Reihe für $\mathfrak{P}(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2, \cdots x_n^{(0)} + h_n)$ erhält die Gestalt

$$\sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \mathfrak{P}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \right)_{(x^{(0)})} \frac{h_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{h_2^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdots \frac{h_n^{\mu_n}}{\mu_n!}.$$

Setzt man an Stelle von $h_\nu$ $x_\nu - x_\nu^{(0)}$, so wird

$$\mathfrak{P}\left(x_1^{(0)} + (x_1 - x_1^{(0)}),\ x_2^{(0)} + (x_2 - x_2^{(0)}), \ldots x_n^{(0)} + (x_n - x_n^{(0)})\right)$$

oder bei der der früheren analogen Bezeichungsweise

$$\mathfrak{P}\left(x_1, x_2, \ldots x_n \,|\, (x^{(0)})\right)$$

$$= \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \mathfrak{P}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \right)_{(x^{(0)})} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{(x_2 - x_2^{(0)})^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdots \frac{(x - x_n^{(0)})^{\mu_n}}{\mu_n}.$$

An allen Stellen des Convergenzbereiches dieser abgeleiteten Reihe, soweit er mit dem der gegebenen Reihe übereinkommt, geben beide Reihen dieselben Werthe, denn daselbst ist die durch die Substitutionen

$$x_\nu^{(0)} + (x_\nu - x_\nu^{(0)}) \quad \text{für} \quad x_\nu$$

hervorgehende neue Reihe nur eine identische Umformung von

$$\sum_{(\mu_n)=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} (x_1^{(0)} + (x_1 - x_0^{(0)}))^{\mu_1} (x_2^{(0)} + (x_2 - x_2^{(0)}))^{\mu_2} \ldots (x_n^{(0)} + (x_n - x_n^{(0)}))^{\mu_n}.$$

## § 32. Beziehung zwischen den aus einer ersten Reihe abgeleiteten Reihen. Obere und untere Grenze der Convergenzradien der abgeleiteten Reihen.

Räumen wir der Reihe

$$\mathfrak{P}(x \,|\, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a)^\nu$$

die Rolle einer primitiven ein, so gelten für diese zunächst folgende Sätze: Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$, die für unendlich viele Stellen einer Punktmenge mit der Häufungsstelle $a$ verschwindet, ist identisch Null. Zwei nach Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihen sind identisch, wenn sie an unendlich vielen Stellen $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ mit der Häufungsstelle $a$ dieselben Werthe annehmen. Ferner besitzt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ in ihrem ganzen Convergenzbereiche den Werth $A$, wenn sie an unendlich vielen Stellen jeder (noch so kleinen) Umgebung von $a$ den Werth $A$ annimmt.

Ist $a_1$ eine Stelle in dem Convergenzkreise $R$ unserer Reihe und ersetzen wir

$$x - a \quad \text{durch} \quad a_1 - a + (x - a_1),$$

ordnen die entstehende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \big(a_1 - a + (x - a_1)\big)^\nu$$

nach Potenzen von $x - a_1$, so geht eine Reihe

$$\mathfrak{P}_1(x|a_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(1)} (x - a_1)^\nu$$

hervor, in welcher die Coefficienten $c_n^{(1)}$ in folgender Weise zu definiren sind:

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{n!}\big(\mathfrak{P}^{(n)}(x - a)\big)_{x=a_1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \mathfrak{P}(x-a)}{dx^n}\right)_{x=a_1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1)\, c_\nu (a_1 - a)^{\nu-n}.$$

Die neue aus $\mathfrak{P}(x|a)$ *abgeleitete Reihe* $\mathfrak{P}_1(x|a_1)$ bezeichnen wir, um ihre Entstehung anzudeuten, mit

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1).$$

Sie convergirt mindestens so lange als

$$|x - a_1| < R - |a_1 - a| = R - d_1$$

und gibt in der Umgebung $R - d_1$ von $a_1$ dieselben Werthe wie $\mathfrak{P}(x|a)$.

Bezeichnet $a_2$ eine Stelle in dem Convergenzbereiche von

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1)$$

und setzt man von Neuem anstatt

$$x - a_1 \quad a_2 - a_1 + (x - a),$$

so entsteht abermals eine neue Reihe:

$$\mathfrak{P}_2(x|a_2) = \mathfrak{P}_1(x|a_1, a_2) = \mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(2)} (x - a_2)^\nu,$$

deren Coefficienten

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \mathfrak{P}(x|a, a_1)}{dx^n}\right)_{x=a_2} \quad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

sind. Ist der Convergenzradius von $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ $R_1$, so convergirt $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ gewifs für die durch die Bedingung

$$|x - a_2| < R_1 - |a_2 - a_1|$$

definirten Stellen.

Setzt man dieses Verfahren fort, wählt eine Stelle $a_3$ in dem Convergenzkreise von $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ und bildet $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, a_3)$

usw., wählt $a_\nu$ in dem Convergenzkreise von $\mathfrak{P}_{\nu-1}(x - a_{\nu-1})$, so folgt endlich eine Reihe:

$$\mathfrak{P}_n(x - a_n) = \mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

die man *eine durch Vermittlung der Stellen* $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus $\mathfrak{P}(x|a)$ *abgeleitete Reihe* nennt.

Liegt die Stelle $a_1$ in dem Kreise $R$ um $a$, $a_2$ in dem Kreise $R - |a_1 - a| = R_1$ um $a_1$, $a_3$ in der Umgebung $R_1 - |a_2 - a_1| = R_2$ von $a_2$ usw., endlich $a_n$ in dem Kreise $R_{n-1} - |a_{n-1} - a_{n-2}| = R_n$ von $a_{n-1}$, so wird

$$|a_\nu - a| < R \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

und *daher gibt es auch eine direct ableitbare Reihe nach Potenzen von* $(x - a_n)$ $\mathfrak{P}(x|a_n)$, die mit $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *identisch ist.*

Wir beweisen diese Behauptung für den Fall $n = 2$.

Die Reihen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ stimmen an allen Stellen der Umgebung $R_2$ von $a_2$ überein, d. h. sie nehmen dort dieselben Werthe an, ebenso $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ und folglich auch $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$. Die Reihen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_2)$ besitzen aber an allen Stellen des Kreises $R - |a_2 - a|$ um $a_2$ ebenfalls dieselben Werthe und nun ist klar, daſs die beiden Reihen $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_2)$ an unendlich vielen Stellen jeder Umgebung von $a_2$ übereinstimmen, und es wird in der That

$$\mathfrak{P}(x|a, a_2) \equiv \mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2),$$

und allgemein

$$\mathfrak{P}(x|a, a_n) \equiv \mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Aus diesem Satze geht gleichzeitig hervor, daſs der wahre Convergenzkreis einer aus $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ den Convergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ keineswegs von innen berühren muſs, denn der Convergenzradius von $\mathfrak{P}(x|a, a_2)$ ist zum mindesten

$$R - |a_2 - a|,$$

und er wird gröſser sein als

$$R_2 = R_1 - |a_2 - a_1| = R - |a_1 - a| - |a_2 - a_1|,$$

wenn

$$|a_2 - a_1| > \big||a_2 - a| - |a_1 - a|\big|,$$

und ebenso wird der Convergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ nicht in dem Kreise $R$ um $a$ liegen müssen. Wir konnten eben nur beweisen, daſs er mindestens bis an den Kreis $R$ hinanreicht. Es wird uns alsbald gelingen, ein Kriterium für die wahre Convergenzgrenze zu erkennen.

Zunächst zeigen wir: *Wenn man aus* $\mathfrak{P}(x|a)$ *eine Reihe* $\mathfrak{P}(x|a, b)$ *direct abzuleiten vermag, so kann man umgekehrt auch* $\mathfrak{P}(x|a)$ *aus* $\mathfrak{P}(x|a, b)$ *ableiten.*

Falls die Stelle $a$ dem Convergenzbereiche der Reihe $\mathfrak{P}(x|a, b)$ an-

gehört, so ist $\mathfrak{P}(x|a, b, a)$ eine direct ableitbare Reihe, die für jeden Werth $x$ einer hinlänglich kleinen Umgebung von $a$ mit $\mathfrak{P}(x|a, b)$ und mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmt, folglich ist

$$\mathfrak{P}(x|a, b, a) \equiv \mathfrak{P}(x|a)$$

und $\mathfrak{P}(x|a)$ ist wirklich aus $\mathfrak{P}(x|a, b)$ abgeleitet.

Gehört aber die Stelle $a$ dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x|a, b)$ nicht an, so kann man eine Reihe vermittelnder Stellen

$$b_1, b_2, \ldots b_n$$

angeben, von denen $b_1$ in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x|a, b)$ und $a$ näher liegt als die Stelle $b$, $b_2$ dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x|a, b, b_1)$ angehört und $a$ näher liegt als die Stelle $b_1$ usw., dann wird schliefslich die Reihe $\mathfrak{P}(x|a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ an der Stelle $a$ convergiren. Die Convergenzbereiche der hier successive abgeleiteten Reihen enthalten stets Stellen, die in dem Convergenzbereiche der vorangehenden Reihe nicht vorkommen und darum kann man auch schliefslich eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x|a, b_1, b_2, \ldots b_n, a)$$

ableiten, die mit $\mathfrak{P}(x|a)$ identisch sein wird, weil $\mathfrak{P}(x|a, b_1, \ldots b_n)$ in einer gewissen Umgebung von $a$ mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmt. —

*Sind zwei Potenzreihen*

$$\mathfrak{P}(x|a), \ \mathfrak{P}_1(x|b)$$

*gegeben, deren Convergenzbereiche theilweise zusammenfallen, und besitzen sie an unendlich vielen Stellen jeder Umgebung des dem gemeinsamen Bereiche angehörigen Punktes c dieselben Werthe, so lassen sich die Reihen aus einander ableiten und haben an allen Stellen des gemeinsamen Bereiches dieselben Werthe.*

Der Voraussetzung zufolge ist

$$\mathfrak{P}(x|a, c) \equiv \mathfrak{P}_1(x|b, c)$$

und weil $\mathfrak{P}(x|a)$ aus $\mathfrak{P}(x|a, c)$, $\mathfrak{P}_1(x, b)$ aus $\mathfrak{P}_1(x|b, c)$ abzuleiten ist, geht auch $\mathfrak{P}_1(x|b)$ durch Vermittlung von $a$ und einer Reihe von Stellen $b_1, b_2, \ldots b_n$ aus $\mathfrak{P}(x|a)$ und umgekehrt $\mathfrak{P}(x|a)$ durch Vermittlung von $c$ und einer Reihe von Stellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus $\mathfrak{P}_1(x|b)$ hervor.

Ist $c'$ eine Stelle in dem gemeinsamen Convergenzbereiche $(A)$ der gegebenen Reihen, an welcher die Übereinstimmung von $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}_1(x|b)$ noch nicht bekannt ist, so wähle man innerhalb $(A)$ eine Reihe vermittelnder Stellen $c_1, c_2, \ldots c_m$ derart, dafs $c_\mu$ dem um $c_{\mu-1}$ zu verzeichnenden Kreise angehört, der innerhalb $(A)$ Platz findet, so wird

$$\mathfrak{P}(x|a, c, c_1, \ldots c_m, c') \equiv \mathfrak{P}_1(x|b, c, c_1, \ldots c_m, c')$$

und

$$\mathfrak{P}(x|a, c') \equiv \mathfrak{P}_1(x|b, c'),$$

denn es gilt zunächst

$$\mathfrak{P}(x|a, c, c_1) \equiv \mathfrak{P}(x|a, c_1), \quad \mathfrak{P}(x|b, c, c_1) \equiv \mathfrak{P}_1(x|b, c_1)$$

und wegen der Identität

$$\mathfrak{P}(x|a, c, c_1) \equiv \mathfrak{P}(x|b, c, c_1)$$

mufs

$$\mathfrak{P}(x|a, c_1) \equiv \mathfrak{P}(x|b, c_1)$$

sein usw. —

Heifst der wahre Convergenzradius einer Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ $R$ und ist $a_1$ eine dem Convergenzbereiche angehörige Stelle in der Entfernung $d = |a_1 - a|$ von $a$, wobei $d < \frac{R}{2}$ sein mag, so ist der Convergenzradius $R_1$ von $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ gewifs nicht kleiner als $R - d$, d. h. gröfser als $\frac{R}{2}$, und dann liegt $a$ in dem Convergenzkreise der abgeleiteten Reihe. Weil man hierauf $\mathfrak{P}(x|a)$ wieder aus $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ ableiten kann, ist $R$ nicht kleiner als $R_1 - d$, und *somit besitzt der Radius der abgeleiteten Reihe die Grenzen*

$$R - d \quad \text{und} \quad R + d.$$

Wählt man die Stelle $a_1$ in einer Entfernung $d$ von $a$, die gröfser ist als $\frac{R}{2}$, so bleiben diese Grenzen für $R_1$ erhalten; die untere Grenze ganz offenbar und die obere Grenze darum, weil man andernfalls aus $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1, b_1, b_2, \ldots b_n, a)$$

ableiten könnte, die mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmt, aber nicht den angenommenen Convergenzradius $R$ hat.

Weil $d$ die obere Grenze $R$ besitzt, sind die Grenzen der Convergenzradien aller abgeleiteten Potenzreihen

$$0 \quad \text{und} \quad 2R.$$

*Der wahre Convergenzradius $R$ einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ ist* geradezu *dadurch charakterisirt, dafs die untere Grenze der Convergenzradien der abgeleiteten Reihen Null ist,* das will sagen: wenn die untere Grenze nicht Null ist, so ist der Convergenzradius nicht $R$, sondern gröfser als $R$.

Um das zu beweisen, setzen wir als bekannt voraus, dafs eine gegebene Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

für alle Stellen $a$ der Umgebung $R$ von $x = 0$ convergire, dann ist für alle der Bedingung

$$|a| + |x| < R$$

genügenden Werthe von $x$ und $a$ die Reihe

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}(a) + \mathfrak{P}'(a)\frac{x-a}{1} + \mathfrak{P}^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots$$

convergent. Ferner sei die untere Grenze der Convergenzradien dieser für alle Stellen der Umgebung $R$ von $x=0$ abgeleiteten Reihen nicht Null, sondern $r$. Wir wollen zeigen, dafs in diesem Falle die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ den wahren Convergenzradius $R+r$ besitzt.

Es sei $\varrho < r$ und $x'$ eine Stelle in dem durch die Radien $R$ und $R+\varrho$ definirten Kreisringe um die Stelle $x=0$, also:

$$R < |x'| < R + \varrho,$$

dann hat der durch die Bedingung

$$|x - x'| < r$$

definirte Bereich um die Stelle $x'$ mit der Umgebung $R$ von $x=0$ einen Bereich $(A)$ gemein und zu einer Stelle $a$ in diesem letzteren gehört eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$, deren Convergenzradius nicht kleiner ist als $a$. Der Kreis $r$ um $a$ enthält die Stelle $x'$ und $\mathfrak{P}(x'|a)$ hat einen bestimmten Werth.

Ist $b$ eine zweite Stelle innerhalb $(A)$, so hat auch $\mathfrak{P}(x'|b)$ einen bestimmten Werth. Weil aber die um die Stelle

$$c = \frac{1}{2}(a+b)$$

giltigen Reihen $\mathfrak{P}(x|a,c)$ und $\mathfrak{P}(x|b,c)$ mit $\mathfrak{P}(x|c)$ und somit untereinander übereinstimmen, so nehmen die Reihen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|b)$ an allen Stellen ihres gemeinsamen Convergenzbereiches und auch an der Stelle $x=x'$ dieselben Werthe an, es ist also

$$\mathfrak{P}(x'|a) = \mathfrak{P}(x'|b).$$

Jetzt ergibt sich leicht, dafs die gegebene Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auch noch für $x=x'$ convergirt.

Die Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ ist der Voraussetzung nach convergent, wenn

$$|a| < R \quad \text{und} \quad |x-a| < r.$$

Bezeichnet dann $g$ die obere Grenze der Werthe $|\mathfrak{P}(x|a)|$ für alle Stellen der Kreislinie $|x-a| = \varrho$, so ist

$$\frac{1}{\nu!}\,|\mathfrak{P}^{(\nu)}(a)| = \frac{1}{\nu!}\left|\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\nu+1)\,c_\mu a^{\mu-\nu}\right| \leqq g\varrho^{-\nu},$$

und hierauf

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}\,|c_\mu| < g\varrho^{-\nu}\,|a^{-(\mu-\nu)}|$$

oder

$$\binom{\mu}{\nu}|c_\mu|\,|a^\mu|\left(\frac{\varrho}{R}\right)^\nu \leqq g\,\frac{|a^\nu|}{R^\nu}.$$

Bezeichnet man $|a|$ mit $\alpha$ und bildet die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}|c_\mu|\,\alpha^\mu\left(\frac{\varrho}{R}\right)^\nu = \alpha^\mu\,|c_\mu|\left(1+\frac{\varrho}{R}\right)^\mu,$$

so ist diese wegen der letzten Ungleichung

$$\leqq g \frac{1-\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{\mu}}{1-\left(\frac{\alpha}{R}\right)} < \frac{gR}{R-\alpha},$$

und wenn somit die Gröfsen

$$|c_\mu| \left(\alpha + \frac{\alpha\varrho}{R}\right)^{\mu}$$

für jedes $\mu$ kleiner bleiben als eine angebbare Gröfse, mufs die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu x^\mu$$

für alle Werthe von $x$, deren absoluter Betrag

$$|x| < \alpha + \frac{\alpha\varrho}{R}$$

convergiren. Da $\alpha$ dem Werthe $R$ beliebig nahe kommen kann, wird der Convergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$ wirklich gröfser als $R$ und wird von $R+\varrho$ und $R+r$ beliebig wenig abweichen. Dann mufs er aber gleich $R+r$ sein, denn der Convergenzradius kann seiner Natur zufolge einer oberen Grenze nicht blos beliebig nahe kommen, sondern er hat ein Maximum.

Es sei nunmehr $R$ der wahre Convergenzradius einer Potenzreihe um die Stelle 0 oder $a$ oder $\infty$ — sie heifse

$$\mathfrak{P}(x), \quad \mathfrak{P}(x-a), \quad \mathfrak{P}(x-\infty) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

— dann haben die Convergenzradien der abgeleiteten Reihen nothwendig die Null zur unteren Grenze. Es existirt deshalb eine Stelle, in deren noch so kleinen Umgebungen Stellen der Beschaffenheit liegen, dafs die ihnen zugehörigen abgeleiteten Reihen einen Convergenzradius besitzen, welcher kleiner ist als eine beliebig kleine Gröfse. Diese Stelle kann nicht im Innern des Convergenzkreises der vorgegebenen Reihe und mufs daher auf der Begrenzung liegen.

Wir können noch sagen, dafs es auf der wahren Grenze eines Convergenzbereiches mindestens eine Stelle $c$ geben mufs, in deren Umgebung keine Potenzreihe $\mathfrak{P}'(x|c)$ existirt, die an den Stellen des dieser und der gegebenen Reihe gemeinsamen Convergenzbereiches mit der letzteren übereinstimmt, denn gäbe es für jeden Punkt der Begrenzung eine solche Reihe, so könnten die Convergenzradien der aus der ursprünglichen abgeleiteten Reihen nicht die untere Grenze Null haben. Die Anzahl solch ausgezeichneter Punkte $c$ kann endlich oder unendlich sein, ja es ist denkbar, dafs alle Stellen der Begrenzung eines Convergenzbereiches von der genannten Art sind. Wenn eine unendliche Menge von Punkten $c$ auf dem Convergenzkreise liegt, sind die Stellen der abgeleiteten Punktmenge Stellen gleicher Art, denn diese sind dadurch definirt, dafs in jeder Umgebung derselben unend-

lich viele der gegebenen Stellen liegen. Die Stellen, in deren Umgebung keine Potenzreihen existiren, welche mit der gegebenen Reihe an den Stellen des gemeinsamen Convergenzbereiches übereinstimmen, constituiren somit eine abgeschlossene Punktmenge.

Die den letzten entsprechenden Betrachtungen über die Potenzreihe mehrerer Variabeln

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a))$$

fassen wir kurz zusammen.

Man kann durch die Substitutionen

$$a'_\nu - a_\nu + (x_\nu - a'_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo $(a')$ eine Stelle in dem durch die Ungleichungen

$$|x_\nu - a_\nu| < R \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

charakterisirten Convergenzbereiche der gegebenen Reihe ist, vor Allem neue Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \ldots x_n|(a')) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a); (a'))$$

ableiten. Der Coefficient $a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}$ der Reihe

$$\mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \ldots x_n|(a'))$$

$$= \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} (x_1 - a_1')^{\mu_1} (x_2 - a_2')^{\mu_2} \ldots (x_n - a'_n)^{\mu_n}$$

ist der Werth der Ableitung

$$\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a))}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}$$

an der Stelle $(a')$.

Wählt man in dem Convergenzbereiche der abgeleiteten Reihe mit dem Radius $R_1$ eine Stelle $(a'')$ und liegt diese in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}$, so gibt es eine indirect und eine direct abgeleitete Reihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (a), (a'), (a'')) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (a), (a'')),$$

die wieder identisch sind.

Fallen die Convergenzbereiche zweier Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (a)), \quad \mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (b))$$

theilweise zusammen und stimmen sie an unendlich vielen Stellen, welche eine Häufungsstelle $(c)$ haben, überein, so werden die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (a), (c)), \quad \mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (b), (c))$$

identisch und die gegebenen Reihen stimmen an allen Stellen des gemeinsamen Convergenzbereiches $(A)$ überein, in deren Umgebungen aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a), (c))$ abgeleitete Reihen existiren.

Bezeichnet man den Convergenzradius von $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a), (c))$ mit $\varrho$ und wählt man eine Stelle $(c')$ so, dafs

$$|c_\nu - c'_\nu| < \varrho \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

so werden die gegebenen Reihen jedenfalls an allen Stellen derjenigen Umgebung von $(c')$ übereinstimmen, welche dem Bereiche $(A)$ und dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a), (c), (c'))$ angehören. So fortfahrend findet man ein $2n$fach ausgedehntes Continuum, wo die Reihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ übereinstimmen.

Ist der wahre Convergenzbereich einer Potenzreihe wieder durch die Gesammtheit der den Bedingungen folgender Art

$$|x_\nu - a_\nu| < R \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

genügenden Werthsysteme $(x)$ definirt, für welche $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n|(a))$ convergirt, indefs die Reihe für jedes Werthesystem:

$$|x_\nu - a_\nu| > R \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

divergirt, so mufs er dadurch charakterisirt sein, dafs unter den Stellen $(x)$, für die

$$|x_\nu - a_\nu| = R \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist, mindestens eine existirt, in deren Umgebung keine Potenzreihe $\mathfrak{P}'(x_1, x_2, \ldots x_n|(c))$ aufzustellen ist, die an den Punkten des dieser und der gegebenen Reihe gemeinsamen Convergenzbereiches mit der letzteren übereinstimmt.

Die untere Grenze der Convergenzradien der abgeleiteten Reihen ist Null.

## II. Abschnitt.

## Begriff der monogenen analytischen Function. Allgemeine Eigenschaften der analytischen Function einer Variabeln.

### § 33. Definition der monogenen analytischen Function.

Überblicken wir die Sätze über die convergenten Potenzreihen einer Variabeln $\mathfrak{P}(x-a)$, so ist vor Allem hervorzuheben, dafs der Convergenzbereich $(A)$ ein Kreis um die Stelle $a$ ist, an dessen Stellen die Reihe einen bestimmten endlichen Werth annimmt, stetig ist und Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Jede Ableitung $\mathfrak{P}^{(n)}(x-a)$ ist innerhalb des Convergenzkreises der gegebenen Reihe convergent.

Darnach verhält sich eine Potenzreihe dort, wo sie eine Bedeutung

hat, wie eine ganze rationale Function in dem endlichen Bereiche der Variabeln.

Greift man in dem Convergenzkreise irgend eine Stelle $b$ heraus, so kann man aus $\mathfrak{P}(x|a)$ eine nach Potenzen von $(x - b)$ fortschreitende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a, b)$ in bestimmter Weise ableiten. Ihr Convergenzkreis um die Stelle $b$ kann entweder ganz dem Convergenzbereiche der Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ angehören und berührt dann die Grenze des letzteren, oder aber er kann Stellen $c$ der Begrenzung von $(A)$ enthalten, und dann enthält er auch Stellen, die aufserhalb $(A)$ liegen. An den Stellen des beiden Reihen gemeinsamen Convergenzbereiches nehmen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, b)$ dieselben Werthe an. Wenn daher der Convergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|a,b)$ nicht über den von $\mathfrak{P}(x|a)$ hinausragt, so nimmt die abgeleitete Reihe keine Werthe an, die nicht auch die primitive gibt. Andernfalls heifst die abgeleitete Reihe eine *Fortsetzung* der ersten. Weil $\mathfrak{P}(x|a)$ auch aus $\mathfrak{P}(x|a, b)$ abzuleiten ist, ist umgekehrt $\mathfrak{P}(x|a)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x|a, b)$.

Bezeichnet $c$ eine Stelle auf der Begrenzung des Bereiches $(A)$ und enthält der Convergenzkreis der Fortsetzung $\mathfrak{P}(x|a, b)$ diese Stelle, so gibt es auch eine nach Potenzen von $(x-c)$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(x|a,b,c)$, die an den Stellen des dieser und der Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ gemeinsamen Convergenzbereiches dieselben Werthe hat wie die primitive Reihe.

Darum kann der Convergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|a, b)$ nicht alle Grenzstellen des Bereiches $(A)$ enthalten, denn sonst gäbe es in der Umgebung jeder solchen Stelle $c$ eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a, b, c)$, die im Innern des dem Bereiche $(A)$ und dem eigenen Convergenzkreise angehörigen Gebietes mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmt, und das ist nicht möglich, wenn $(A)$ der wahre Convergenzbereich der gegebenen Reihe ist.

Man sieht also, dafs die ausgezeichneten Stellen der wahren Convergenzgrenze von $(A)$, in deren Umgebung keine durch Vermittlung einer Stelle $b$ aus $\mathfrak{P}(x|a)$ abgeleitete Reihe existirt, auch solch ausgezeichnete Stellen abgeleiteter Reihen $\mathfrak{P}(x|a, b)$ sein werden und offenbar wird der Convergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|a, b)$ durch die der Stelle $b$ nächstliegende Stelle der genannten Art auf der Begrenzung von $(A)$ gehen müssen. Man nennt diese Stellen *singuläre.*

Aus den Reihen $\mathfrak{P}(x|a,b)$ kann man neue ableiten. Die Gesammtheit der aus der ursprünglichen direct und indirect ableitbaren Reihen stehen in derartigem Zusammenhang, dafs aus jeder Reihe jede andere abzuleiten ist, wornach jede die Rolle der ersten übernehmen kann. Man sagt:

*Die Gesammtheit der aus einer gegebenen Reihe ableitbaren und in einander fortsetzbaren Potenzreihen constituirt eine monogene analytische Function.*

Die einzelne Reihe heifst *ein Element der Function* und durch ein Element ist die Function vollständig definirt, denn man kann alle Fortsetzungen desselben ableiten.

Ist $x_0$ irgend eine Stelle im Bereiche der unbeschränkten Variabeln und kann man aus einem primitiven Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ eine Reihe ableiten, deren Convergenzkreis die Stelle $x_0$ enthält, so nennt man den Werth der neuen Reihe für $x = x_0$ den Werth der durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirten Function an der Stelle $x_0$. Indem es aber dann eine nach Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreitende Reihe gibt, ist der Werth der Function für $x - x_0$ auch als das Anfangsglied dieser Reihe $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ zu definiren.

Wenn der Convergenzbereich jeder aus dem primitiven Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ abgeleiteten Reihe ganz dem Convergenzkreise dieses Elementes angehört, so stellt dasselbe allein eine analytische Function dar, d. h. die arithmetische Abhängigkeit des Werthes der Function von dem der Variabeln ist durch die Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ allein ausgedrückt, denn die abgeleiteten Reihen nehmen keine Werthe an, die nicht auch jene besitzt. Ist $b$ eine Stelle in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x|a)$, so wird

$$[\mathfrak{P}(x|a, b)]_{x=b} = \mathfrak{P}(b|a).$$

Hat hingegen das primitive Element $\mathfrak{P}(x|a)$ Fortsetzungen, so wird die durch dasselbe definirte Function durch die Gesammtheit ihrer Elemente dargestellt.

Den Übergang von dem gegebenen Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ zu einer Reihe $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ kann man auf unendlich verschiedene Weise durch Vermittlung verschiedener Stellen bewerkstelligen. Gelangt man auf den unendlich vielen von $a$ nach $x_0$ führenden continuirlichen Wegen in dem Bereiche der Variabeln $x$ und in dem Convergenzbereiche der Gesammtheit von Elementen stets zu derselben Reihe, so hat die Function an der Stelle $x_0$ einen Werth; besitzt sie an jeder Stelle, in deren Umgebung überhaupt Potenzreihen existiren, welche in $\mathfrak{P}(x|a)$ fortzusetzen sind, nur einen Werth, so heifst sie eine *eindeutige analytische Function*. Die durch ein einziges Element vollständig dargestellte analytische Function ist darnach gewifs eindeutig.

Erhält man bei den verschiedenen Übergängen eine endliche Anzahl oder unendlich viele von einander verschiedene Elemente

$$\mathfrak{P}_\nu(x|x_0) \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

so heifst die durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirte monogene analytische Function viel- oder *mehrdeutig*, und zwar endlich oder unendlich vieldeutig. Die Function hat an der Stelle $x_0$ so viel Werthe, als es Elemente $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ gibt und dabei wird ein Werth mehrfach gezählt, wenn die Anfangsglieder mehrerer Elemente $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ gleich sind. — In dem

gemeinsamen Convergenzbereiche zweier Elemente können aber nicht unendlich viele Stellen mit der Häufungsstelle $x_0$ liegen, für welche die Elemente gleiche Werthe haben, sonst wären sie identisch.

Setzt man, von dem gemeinsamen Convergenzbereiche der $n$ Elemente einer $n$-deutigen Function ausgehend, die gegebenen Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ durch Vermittlung derselben Stellen nach $x_1$ fort, so heifsen die $n$ nothwendig wieder von einander verschiedenen Elemente

$$\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_m, x_1)$$

*simultane Elemente* der $n$-deutigen Function und die Werthe der Anfangsglieder dieser Reihen *simultane Functionswerthe.*

## § 34. Allgemeine Betrachtungen über die eindeutigen analytischen Functionen.

Die Gesammtheit der Stellen $x_0$, in deren Umgebung die durch ein primitives Element definirte eindeutige Function $f(x)$ durch eine Potenzreihe dargestellt ist, heifse der *Stetigkeitsbereich der Function.* Dieser Bereich ist nothwendig begrenzt, d. h. es gibt Stellen, in deren Umgebung keine aus dem primitiven Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ ableitbare Potenzreihe existirt, und zwar darum, weil jedes Element mindestens eine solch singuläre Stelle auf der Grenze seines Convergenzbereiches besitzt und die singuläre Stelle $c$ des einzelnen Elementes singuläre Stelle derjenigen Fortsetzungen bleibt, welche Stellen der kleinsten Umgebung von $c$ in ihrem Convergenzbereiche enthalten. Ob die Reihe $\mathfrak{P}_1(x|x')$ direct oder indirect aus $\mathfrak{P}(x|a)$ abgeleitet ist, die Stelle $c$ kann nicht in ihrem Convergenzkreise liegen, sonst gäbe es auch eine Reihe $\mathfrak{P}_1(x|c)$, die an unendlich vielen Stellen mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmte.

Die Grenzstellen des Stetigkeitsbereiches der eindeutigen Function können eine *isolirte* Punktmenge bilden oder eine Punktmenge der Beschaffenheit, dafs in jeder Umgebung jeder Stelle unendlich viele andere Grenzstellen liegen, oder endlich Punktmengen, die aus Mengen der genannten Arten zusammengesetzt sind, sie können aber niemals ein zweifach ausgedehntes Continuum constituiren, denn sie sind singuläre Stellen ihrer Elemente, und darum gibt es in jeder Umgebung einer Grenzstelle auch Stellen, in deren Umgebung ein Element der Function existirt. Die in Rede stehenden Grenzstellen nennt man *singuläre Stellen der Function.*

Die Gesammtheit $P$ der singulären Stellen $c$ einer eindeutigen analytischen Function bildet auch eine abgeschlossene Menge (die ihre abgeleitete Punktmenge $P'$ enthält), denn eine Stelle $c'$, in deren kleinster Umgebung unendlich viele singuläre Stellen liegen, kann nicht dem Stetigkeitsbereiche der Function angehören, weil man nämlich

keine Potenzreihe $\mathfrak{P}'(x|c')$ angeben kann, die keine singulären Stellen in ihrem Convergenzbereiche enthält. —

Wenn die singulären Stellen aller aus einem ersten hervorgehenden Elemente ein Continuum begrenzen, aufserhalb dessen noch Stellen $x_0$ existiren, so müssen wir sagen, dort ist die Function nicht definirt, denn man kann kein Element nach $x_0$ fortsetzen. Die Grenzstellen des Stetigkeitsbereiches einer Function werden wir aber später zu dem „Bereiche der Function" zählen, wenngleich man auch nach diesen Stellen kein Element fortsetzen kann.

Es sei $f(x)$ eine eindeutige Function. Läfst sich dieselbe in der Umgebung einer Stelle $a$ in Form einer daselbst convergenten Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$ darstellen, gehen somit die Werthe von $f(x)$ in dem genannten Bereiche aus der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-a)^\nu = f(x)$$

hervor, so heifst die Function in der Umgebung der Stelle $a$ *regulär* oder *von regulärem Verhalten.*

Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich eine eindeutige analytische Function regulär verhält, bildet den Stetigkeitsbereich derselben. Innerhalb dieses Bereiches ist $f(x)$ eine endliche, stetig veränderliche Gröfse, die an jeder Stelle $x_0$ einen bestimmten Werth annimmt, der auch offenbar als Grenzwerth derjenigen Werthe anzusehen ist, welche sich ergeben, wenn man für eine nach $x$ convergirende Reihe von Variabelnwerthen die zugehörigen Functionalwerthe sucht. Befindet sich die Stelle $x_0$ auf dem Convergenzkreise eines Elementes $\mathfrak{P}_1(x|b)$ der Function, ohne auf der Begrenzung des Stetigkeitsbereiches derselben zu liegen, und bezeichnet

$$x_0^{(1)},\ x_0^{(2)}, \ldots x_0^{(m)} \ldots$$

eine dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}_1(x|b)$ angehörige Punktmenge mit der Grenzstelle $x_0$, so werden die Werthe

$$\mathfrak{P}_1(x_0^{(1)}|b),\quad \mathfrak{P}_1(x_0^{(2)}|b), \ldots \mathfrak{P}_1(x_0^{(m)}|b) \ldots$$

nach dem bestimmten Functionalwerthe $f(x_0)$ convergiren, denn es gibt eine Reihe $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$, die an denjenigen Stellen ihres Convergenzbereiches, welche auch dem Convergenzbereiche der Reihe $\mathfrak{P}_1(x|b)$ angehören, dieselben Werthe besitzt wie $\mathfrak{P}_1(x|b)$, und der Functionalwerth an der Stelle $x_0$ ist gleich

$$[\mathfrak{P}_2(x|x_0)]_{x=x_0}$$

oder gleich dem Grenzwerthe der Reihe

$$\mathfrak{P}_2(x_0^{(n)}|x_0),\quad \mathfrak{P}_2(x_0^{(n+1)}|x_0) \ldots,$$

wo nun $x_0^{(n+\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ nur mehr Stellen sind, welche auch in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$ liegen.

Der so definirte Werth braucht nicht direct durch die Substitution $x = x_0$ aus der Reihe $\mathfrak{P}_1(x|b)$ hervorzugehen, da eine Potenzreihe nur in ihrem Convergenzbereiche stetig sein mufs.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dafs eine eindeutige analytische Function an einer singulären Stelle $c$, wo eine der in dem Stetigkeitsbereiche bestehenden Eigenschaften der Endlich-, Stetig- und Eindeutigkeit verloren gehen mufs, nicht einen von demjenigen endlichen Grenzwerthe verschiedenen endlichen Werth besitzen kann, nach welchem die aus einem Elemente mit der singulären Stelle $c$ entspringenden Functionalwerthe convergiren, sofern die Variabelnwerthe aus dem Innern des Convergenzbereiches des genannten Elementes nach $c$ convergiren, d. h. *die analytische Function kann keine endlichen Discontinuitäten an ihren singulären Stellen erleiden.*

In der That: sei $f(x)$ eine analytische Function mit solch einer singulären Stelle $c$, so wird $(x-c).f(x)$ in der Umgebung von $c$ regulären Verhaltens sein und die das Product darstellende Potenzreihe hat die Gestalt

$$(x-c)\,\mathfrak{P}(x-c) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x-c)^\nu,$$

weil das Product für $x = c$ verschwindet; dann aber ist $f(x)$ in der Umgebung von $c$ regulär und die Voraussetzung ist nicht zulässig.

Die Function kann an einer singulären Stelle $c$ auch nicht dadurch vieldeutig sein, dafs sie daselbst bei einer endlichen oder unendlichen Anzahl verschiedener Annäherungen mit den Variabelnwerthen verschiedene aber endliche Werthe annimmt, denn es gäbe immer noch Potenzreihen $\mathfrak{P}(x|c)$, die mit gewissen, aus dem primitiven Elemente abgeleiteten Reihen, deren Convergenzkreise die singuläre Stelle $c$ besitzen, an unendlich vielen Stellen mit der Häufungsstelle $c$ übereinstimmten, und übrigens wäre auch $(x-c)\,f(x)$ und dann $f(x)$ regulär. Also auch dieses Verhalten ist zufolge der Definition der singulären Stelle nicht möglich.

Die eindeutige analytische Function wird demnach an den singulären Stellen jedenfalls unendlich und gleichzeitig vielleicht auch vieldeutig. Diese Möglichkeit kann man hier nicht ausschliefsen, denn die letzten Argumentationen verlieren nun ihre Berechtigung. *Eine eindeutige analytische Function, die* aber überhaupt *nicht unendlich wird, gibt es nicht*, oder — was dasselbe sagt — eine solche Function kann nur eine Constante sein.

Um die Art des Unendlichwerdens zu fixiren, suchen wir zunächst die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine eindeutige analytische Function $f(x)$ an einer Stelle $x_0$ endlich und stetig bleibt.

Wenn $x_0$ eine Stelle des Stetigkeitsbereiches der Function $f(x)$ ist, so convergirt das Product $(x-x_0)f(x)$ nach Null, auf welchem Wege immer die Variable nach $x_0$ rückt. Dasselbe gilt von dem Producte der Function $f(x)$ und einer in der Umgebung von $x_0$ regulären und für $x = x_0$ verschwindenden Function. Ist aber umgekehrt

$$[(x - x_0)f(x)]_{x=x_0} = 0,$$

so wird $f(x)$ in der Umgebung von $x_0$ durch eine Potenzreihe dargestellt.

In der That: nehmen wir zuerst an, dafs das Product $(x-x_0)f(x)$ bei irgend einer Annäherung von $x$ an die Stelle $x_0$ nach dem endlichen Werthe $a$ convergirt, so ist die analytische Function $(x-x_0)f(x)$ in der Umgebung von $x_0$ regulären Verhaltens und es existirt eine Darstellung:

$$(x-x_0)f(x) = a_0 + (x-x_0)\mathfrak{P}_1(x|x_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu.$$

Hieraus folgt, dafs

$$f(x) = \frac{a}{x-x_0} + a_1 + a_2(x-x_0) + a_3(x-x_0)^2 + \cdots$$

ist und $f(x)$ wird an der Stelle $x_0$ unendlich grofs, solange $a_0$ von Null verschieden ist. Ist aber

$$[(x - x_0)f(x)]_{x=x_0} = 0,$$

so mufs $a_0$ verschwinden, und $f(x)$ ist in der Umgebung von $x_0$ endlich und stetig. Die verlangte Bedingung ist somit gefunden.

Trifft man nun die Unterscheidung: Entweder gibt es eine ganzzahlige Potenz von $(x - c)$ derart, dafs das Product von $f(x)$ und dieser Potenz eine in der Umgebung der singulären Stelle $c$ reguläre Function ist, oder es gibt keine solche Potenz, und nennt man in dem ersten Falle die singuläre Stelle eine *aufserwesentlich*, in dem zweiten Falle eine *wesentlich singuläre*, so erhellt, dafs die analytische Function in der Umgebung einer aufserwesentlich singulären Stelle in der bestimmten Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-c)^m}[a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots] = \sum_{\mu=-m}^{\infty} a_\mu (x-c)^\mu$$

darstellbar ist, wo $m$ eine positive ganze Zahl gleich oder gröfser als Eins bedeutet und $a_0$ von Null verschieden ist. Ferner wird $f(x)$ für jeden unendlich kleinen Werth von $|x-c|$ unendlich grofs und es gilt $f(x) = \infty$.*)

---

*) S. Weierstrafs: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (in den Abhandl. der Berliner Akad. 1876 oder in den Abhandlungen aus der Functionenlehre S. 2).

Der Functionswerth ist somit auch an der aufserordentlich singulären Stelle als Grenze derjenigen Werthe anzusehen, welche die Function an den in beliebig kleiner aber endlicher Umgebung von $c$ liegenden Stellen ihres Stetigkeitsbereiches annimmt. In diesem Umstande liegt der Grund, warum man auch die singulären oder Grenzstellen des Stetigkeitsbereiches zu dem Bereiche der Function rechnet.

In dem Convergenzbereiche der Reihe $\sum\limits_{\mu=-m}^{\infty} a_\mu (x-c)^\mu$ gibt es nur eine singuläre Stelle der Function $f(x)$, nämlich $c$. Daraus folgt unmittelbar, dafs die Häufungsstelle unendlich vieler aufserwesentlich singulärer Stellen eine wesentlich singuläre Stelle sein mufs, denn für diese gibt es keine Umgebung, die nicht auch singuläre Stellen enthielte. Umgekehrt braucht natürlich die wesentlich singuläre Stelle nicht Häufungsstelle aufserwesentlich singulärer zu sein.

Da wir unter $x = \infty$ stets die Gröfse $\frac{1}{x}$ verstehen und demnach die an der Stelle $\infty$ reguläre Function in der Umgebung der unendlich fernen Stelle die Darstellung hat

$$a_1 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots,$$

so wird die Stelle $\infty$ eine aufserwesentlich singuläre sein, wenn die Function daselbst erst nach Multiplication einer ganzzahligen Potenz von $\frac{1}{x}$ regulären Verhaltens ist. Die Function erhält dann die Darstellung

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^{m-\mu}, \quad (a_0 \gtrless 0).$$

Die aufserwesentlich singulären Stellen $c$ und $\infty$ sind nunmehr durch die Bedingungen gekennzeichnet, dafs die Gröfsen

$$\Big((x-c)^m f(x)\Big)_{x=c}, \quad \left(\frac{1}{x^m} f(x)\right)_{x=\infty}$$

endlich und von Null verschieden sind. Nach dem Exponenten $m$ heifst die aufserwesentlich singuläre Stelle eine von der *$m^{\text{ten}}$ Ordnung* oder eine *mfache*.

Die wesentlich singulären Stellen $(c)$ einer Function $f(x)$ sind für die reciproke Function $\frac{1}{f(x)}$ gewifs Stellen gleicher Art. Denn wäre $\frac{1}{f(x)}$ in der Umgebung von $c$ regulär oder hätte $\frac{1}{f(x)}$ die aufserwesentlich singuläre Stelle $m^{\text{ter}}$ Ordnung, so müfste $f(x)$ ebenfalls regulär sein und zwar besäfse $f(x)$ in dem zweiten Falle die *mfache Nullstelle* $c$, denn das die Function $f(x)$ in der Umgebung von $c$ darstellende Element hätte die Gestalt

$$(x-c)^m\, \mathfrak{P}(x-c).$$

Die Stelle $c$ ist aber auch eine wesentlich singuläre Stelle von $f(x)-A$ und $\frac{1}{f(x)-A}$, wo $A$ irgend eine angebbare Gröfse bezeichnet.

Daraus folgt, dafs die Function $f(x)$ in unendlich kleiner Umgebung einer wesentlich singulären Stelle jedem Werthe beliebig nahe kommen kann. Denn wenn die Functionalwerthe bei einer bestimmten Annäherung von $x$ an die Stelle $c$ der Begrenzung des Stetigkeitsbereiches nach dem Werthe $\infty$ convergiren, und auch die Functionen $\frac{1}{f(x)}$ und $\frac{1}{f(x)-A}$ in beliebiger Nähe von $c$ dem absoluten Betrage nach gröfser werden als jede angebbare Gröfse $G$, so gibt es daselbst auch Stellen, wo $|f(x)|$ gröfser wird als $G$, und Stellen, wo $|f(x)|$ von jeder Gröfse $A$ um die beliebig kleine Gröfse $\frac{1}{G}$ beliebig wenig verschieden ist.

*Die Function ist* demnach *an der wesentlich singulären Stelle völlig unbestimmt.* —

Es sollen die bisher aufgestellten, durch bestimmte arithmetische Gröfsenoperationen definirten Ausdrücke betrachtet werden, auf dafs wir die neuen Resultate gleich verwerthen können.

Die rationale Function einer Veränderlichen konnte stets auf die Form

$$f(x) = g(x) + \sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{A_1^{(\nu)}}{x-c_\nu} + \frac{A_2^{(\nu)}}{(x-c_\nu)^2} + \cdots + \frac{A_{m_\nu}^{(\nu)}}{(x-c_\nu)^{m_\nu}}\right\}$$

gebracht werden, wo $g(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad etwa $m$ sei. Die Function $f(x)$ ist eine eindeutige, stetig veränderliche Gröfse, aber auch eine monogene analytische Function, denn sie läfst sich in der Umgebung jeder von $c_1, c_2, \ldots c_n$ und $\infty$ verschiedenen Stelle $x_0$ durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ darstellen, indem

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\frac{x-x_0}{1!} + \cdots + g^{(m)}(x_0)\frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

ist und der Ausdruck

$$\frac{1}{(x-c_\nu)^{\mu_\nu}} = \frac{1}{(x_0-c_\nu+(x-x_0))^{\mu_\nu}} = \frac{1}{(x_0-c_\nu)^{\mu_\nu}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{x_\nu-x_0}{c_\nu-x_0}\right)^{\mu_\nu}}$$

in eine innerhalb des durch die Ungleichung

$$\left|\frac{x-x_0}{c_\nu-x_0}\right| < 1$$

definirten Bereiches convergente Potenzreihe zu entwickeln und die Summe einer endlichen Anzahl solcher Reihen nach Potenzen von $(x-x_0)$ gewifs endlich ist.

Die Stellen $c_1, c_2, \ldots c_n$ und $\infty$ sind die Grenzstellen des Stetigkeitsbereiches unserer Function $f(x)$, und weil

$$(x - c_\nu)^{m_\nu} f(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^m} f(x)$$

in der Umgebung von $c_\nu$ und $\infty$ regulären Verhaltens und an diesen Stellen von Null verschieden sind, sind die Grenzstellen aufserwesentlich singuläre der $m_\nu^{\text{ten}}$ und $m^{\text{ten}}$ Ordnung.

*Die rationale Function hat somit keine wesentlich singuläre Stellen.* Diese Eigenschaft ist charakteristisch, denn *umgekehrt ist jede eindeutige analytische Function $f(x)$, deren Stetigkeitsbereich nur durch aufserwesentlich singuläre Stellen begrenzt ist, eine rationale Function.**)

Der Voraussetzung zufolge ist die durch die singulären Stellen definirte Punktmenge eine isolirte, welche keine abgeleitete Punktmenge besitzt, denn deren Stellen wären ja wesentlich singuläre Stellen. Daher ist $f(x)$ in der Umgebung jeder Stelle $x_0$ in der Form

$$(x - x_0)^{-m} [c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots]$$

darzustellen, wo $m$ nur für eine endliche Anzahl von Stellen $x_0$ positiv ist.

Gibt es im Endlichen keine Grenzstelle, läfst sich $f(x)$ demnach in der Umgebung jeder endlichen Stelle $x_0$ und auch in der Umgebung von $x = 0$ durch eine für alle endlichen Werthe von $|x - x_0|$ resp. $|x|$ convergente und ausschliefslich nach positiven Potenzen fortschreitende Reihe darstellen, so ist $f(x)$ nothwendig eine ganze rationale Function

$$f(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + \cdots + c_m (x - x_0)^m$$

oder

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

denn die beständig convergenten Reihen

$$c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

oder

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

müssen bei einem endlichen Gliede abbrechen, wenn eine ganze Zahl $m$ existiren soll, so dafs

$$\left(\frac{1}{x}\right)^m f(x)$$

in der Umgebung der unendlich fernen Stelle $\infty$ regulär und für unendlich grofse Werthe von $x$ endlich und von Null verschieden wird.

Existiren hingegen im Endlichen die $n$ singulären Stellen $c_1, c_2, \ldots c_n$ und wird

$$(x - c_\nu)^{m_\nu} f(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

in der Umgebung von $c_\nu$ regulär und an der Stelle $c_\nu$ endlich und von Null verschieden, so ist das Product

*) Weierstrafs, Abhandl. aus der Functionenlehre S. 3.

$$f(x)\prod_{\nu=1}^{n}(x-c_\nu)^{m_\nu}$$

in der Umgebung jeder endlichen Stelle in eine Potenzreihe zu entwickeln und somit eine ganze rationale Function $g(x)$, denn das Product von $f(x)$ und der ganzen rationalen Function $\prod_{\nu=1}^{n}(x-c_\nu)^{m_\nu}$ besitzt ebensowenig wie $f(x)$ die wesentlich singuläre Stelle $\infty$. Auf solche Weise ist die Darstellung von $f(x)$ als Quotient ganzer rationaler Function

$$f(x)=\frac{g(x)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x-c_\nu)^{m_\nu}}$$

wirklich bewerkstelligt und der Satz bewiesen.

Fügt man darnach dem Stetigkeitsbereiche $(A)$ einer Function $f(x)$ die aufserwesentlich singulären Stellen hinzu und stimmt der neue Bereich $(A')$ mit dem unbegrenzten Bereiche der unbeschränkten Variabeln $x$ überein, so ist $f(x)$ eine rationale Function. Ist aber der neue Bereich $(A')$ begrenzt, so hat $f(x)$ nothwendig wesentlich singuläre Stellen. Die Function heifst dann *transcendent* und man sagt von ihr, dafs sie sich in dem Bereiche $(A')$ wie eine rationale Function verhält. —

Entwickelt man den Quotienten gegebener rationaler Functionen

$$g_1(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0$$
$$g_2(x)=\beta_m x^m+\beta^{m-1}x^{m-1}+\cdots+\beta_0$$

in eine Potenzreihe

$$f(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu=\mathfrak{P}(x),$$

so sind die Coefficienten aller auf das $(n+1)^{\text{te}}$ folgenden Glieder durch eine Gleichung der Form

$$\beta_0 a_{n+\nu}+\beta_1 a_{n+\nu-1}+\cdots+\beta_m a_{n+\nu-m}=0$$

definirt, d. h. jeder Coefficient $a_{n+\nu}$ ist als ein und dieselbe ganze Function ersten Grades einer constanten Anzahl $m$ unmittelbar voranstehender Coefficienten darzustellen.

Eine Potenzreihe, deren Coefficienten von einem bestimmten ab diese Eigenschaft haben, heifst *recurrirend.*

Eine recurrirende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu$$

oder $\mathfrak{P}(x|x_0)$ stellt in ihrem Convergenzbereiche eine rationale Function dar.

12*

Setzen wir unter Annahme einer für jedes $\nu$ geltenden Beziehung:

$$\beta_0\, c_{n+\nu} + \beta_1\, c_{n+\nu-1} + \cdots + c_{n+\nu-m}\beta_m = 0$$

$$\beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \beta_0 = g_2(x)$$

und bilden das Product $\mathfrak{P}(x).g_2(x)$, so ist die convergente Summe

$$\sum_{\mu=0}^{m} (\beta_\mu\, x^\mu\, \mathfrak{P}(x))$$

wegen der angesetzten Gleichung nur eine Potenzreihe mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, d. h. eine ganze rationale Function $g_1(x)$ und aus

$$\mathfrak{P}(x).g_2(x) = g_1(x)$$

folgt

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Die Potenzreihe ist also nur das Element der durch sie definirten *rationalen* Function. —

Von der Summe unendlich vieler rationaler Functionen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = F(x)$$

können wir nun auch sagen, sie ist eine eindeutige analytische Function, wenn für dieselbe ein Bereich gleichmäfsiger Convergenz existirt. In der Umgebung einer Stelle $x_0$ dieses Bereiches kann man nämlich jede einzelne der rationalen Functionen $f_\nu(x)$ in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ entwickeln und hierauf die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x - x_0)$$

selbst in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ zusammenziehen. Diese Reihe bildet ein primitives Element der nunmehr schon als analytische Function erkannten Gröfse $F(x)$, aus dem man alle Elemente ableiten kann.

Der Bereich der gleichmäfsigen Convergenz einer Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ kann aus mehreren von einander getrennten einfach zusammenhängenden und zweifach ausgedehnten Continuis bestehen. Da die Stellen auf den Begrenzungen eines Bereiches $(A)$, der die Stellen $x_0$ enthält, nothwendig singuläre Stellen des primitiven Elementes $\mathfrak{P}(x|x_0)$ und seiner Fortsetzungen sein werden, so können die Convergenzbereiche der Elemente oder kann der Stetigkeitsbereich der durch $\mathfrak{P}(x|x_0)$ definirten Function nicht über das Continuum hinausragen.

In einem zweiten Continuum definirt die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ eine zweite Function, die mit der früheren — soweit wir jetzt ersehen —

aufser allem Zusammenhange steht, denn wir sind nicht im Stande, die Elemente der beiden Functionen in einander überzuführen.

Gibt es endlich auch Stellen aufserhalb aller Bereiche gleichmäfsiger Convergenz, so definirt die gegebene Summe dort keine analytische Function. —

Wir begegneten früher auch einer beständig convergenten Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Diese definirt eine eindeutige analytische Function $f(x)$ und stellt sie vollständig dar; die Function $f(x)$ hat die wesentlich singuläre Stelle $\infty$ und ihr Werth an einer endlichen Stelle $x_1$ wird durch $\mathfrak{P}(x_1)$ oder den Werth einer direct abzuleitenden Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ an der Stelle $x_1$ anzugeben sein. Da offenbar jede Ableitung von $\mathfrak{P}(x)$ wieder $\mathfrak{P}(x)$ ist, wird

$$\mathfrak{P}(x - x_0) = \mathfrak{P}(x_0) \cdot \left(1 + \frac{x - x_0}{1} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots\right)$$

und nun

$$\mathfrak{P}(x_1 - x_0) = f(x_0) . f(x_1 - x_0) = f(x_1).$$

Die Function $f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ hat also die in der Gleichung $f(x) = f(x_0) . f(x - x_0)$ ausgesprochene Eigenschaft, die vor Allem besagt, dafs $f(x)$ in seinem Stetigkeitsbereiche nicht verschwinden kann, indem mit einer Nullstelle $x_0$ auch $x$ eine sein müfste und eine Function, die an jeder Stelle $x$ verschwindet, keinen Sinn hat. Wir bezeichnen sie mit $E(x)$ und schreiben ihre Eigenschaft in der Form $E(x_1)\,E(x_2) = E(x_1 + x_2)$, indem wir an Stelle von $x$ und $x_0$ $x_1$ resp. $x_2$ setzen.

Offenbar wird jede beständig convergente Reihe eine eindeutige analytische Function mit der wesentlich singulären Stelle $\infty$ darstellen, und umgekehrt wird eine für jeden endlichen Werth der Variabeln reguläre eindeutige analytische Function durch eine beständig convergente Reihe auszudrücken sein.

Diese eindeutigen Functionen heifsen *ganze Functionen* und zwar *ganze rationale* oder *ganze transcendente*, je nachdem die Stelle $\infty$ eine aufserwesentlich oder wesentlich singuläre Stelle ist. —

Für die ganze rationale Function $g(x)$ bestand der Satz: Es läfst sich stets eine positive Gröfse $r$ der Beschaffenheit angeben, dafs für alle der Bedingung $|x| > r$ genügenden Werthe der Variabeln der absolute Betrag von $g(x)$ gröfser wird als eine beliebig vorgegebene Gröfse $A$. Für die ganze transcendente Function

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

kann der gleiche Satz nicht ausgesprochen werden, denn der Beweis des voranstehenden Satzes beruhte auf der Voraussetzung, dafs die

Potenzexponenten eine angebbare Zahl nicht überschreiten. Doch wir können zeigen, dafs unter den Werthen $x$, deren Betrag gröfser ist als eine positive Gröfse $r$, stets solche existiren, für die der Betrag von $G(x)$ gröfser wird als eine beliebige Gröfse $A$.*)

In der That: bezeichnet $K$ die obere Grenze der Werthe $|G(x)|$ für alle Werthe $x$ mit dem Betrage $\xi$, so ist für jedes $\nu$

$$K \geqq |a_\nu| \xi^\nu$$

und hier kann man $\xi > r$ so wählen, dafs die obere Grenze $K$ auch gröfser wird als $A$; es mufs unter den Gröfsen $|a_\nu|$ nur solche geben, die von Null verschieden sind, und das ist zweifellos der Fall, wenn die ganze Function nicht überall Null oder constant ist.

Dieser Satz schliefst nicht aus, dafs die ganze transcendente Function in dem Bereiche $|x| > r$ Werthe annimmt, die kleiner sind als jede vorgegebene Gröfse, und das ist auch der Fall, denn in beliebig kleiner Umgebung der Stelle $\infty$ existiren Stellen, an denen die ganze Function jedem Werthe beliebig nahe kommt.

Wir betrachten endlich noch die Verallgemeinerung des Quotienten ganzer rationaler Functionen, nämlich den *Quotienten beständig convergenter Potenzreihen*

$$G_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad G_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,$$

der sich gewifs in der Umgebung der Stelle Null in eine Potenzreihe entwickeln läfst, wenn $G_2(0)$ nicht verschwindet. Diese Reihe definirt wieder eine eindeutige analytische Function, und zwar wird die Fortsetzung der Reihe

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x)$$

um eine Stelle $x_0$ mit derjenigen Reihe übereinstimmen, in welche der Quotient der aus $G_1(x)$ und $G_2(x)$ direct abgeleiteten Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu (x - x_0)^\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_\nu (x - x_0)^\nu$$

zu entwickeln ist.

Haben $G_1(x)$ und $G_2(x)$ in der Umgebung einer Stelle $c$ die Gestalt

$$\alpha_m (x - c)^m + \alpha_{m+1} (x - c)^{m+1} + \cdots$$
$$\beta_m (x - c)^n + \beta_{n+1} (x - c)^{n+1} + \cdots$$

---

*) J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen §§ 109, 164, 165.

wo die ganzen Zahlen $m$ und $n$ auch Null sein können, so wird der Quotient

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = (x-c)^{m-n}\,\frac{\alpha_m + \alpha_{m+1}(x-c) + \cdots}{\beta_m + \beta_{n+1}(x-c) + \cdots}$$

in der Umgebung von $c$ nach Null oder $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ oder unendlich convergiren, je nachdem $m-n$ positiv, Null oder negativ ist. Nur in der Umgebung der Unendlichkeitsstellen $c$ des Quotienten kann man keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|c)$ herstellen, welche mit dem Quotienten übereinstimmt, daher reicht der Convergenzbereich des ursprünglichen Elementes $\mathfrak{P}(x)$ bis an die der Stelle Null nächstliegende Unendlichkeitsstelle des Quotienten, d. h. bis an die nächste $n$fache Nullstelle des Nenners $G_2(x)$, welche für den Zähler $G_1(x)$ Nullstelle niedrigerer Ordnung ist.

Hier heifst eine Nullstelle $c$ wieder $n$fach, wenn die Entwicklung der ganzen Function $G(x)$ in der Umgebung von $c$ mit dem Gliede $n^{\text{ter}}$ Potenz beginnt oder wenn die Ableitungen der ersten $n-1$ Ordnungen für $x = c$ verschwinden.

Hat die ganze Function $G_2(x)$ im Endlichen keine Nullstelle, so mufs der Quotient $\frac{G_1}{G_2}$ wieder in eine beständig convergente Reihe zu entwickeln sein oder eine ganze Function definiren.

An diesen Satz schliefst sich unmittelbar das Fundamentaltheorem der ganzen rationalen Function:

*Jede ganze rationale Function $G(x)$ hat Nullstellen*,

denn andernfalls müfste ja $\frac{1}{g(x)}$, wo $g(0)$ natürlich von Null verschieden vorausgesetzt wird, eine ganze Function sein, doch das ist nicht möglich, weil man eine Gröfse $r$ so angeben kann, dafs $|g(x)|$ für alle Werthe von $x$ aufserhalb der Umgebung $r$ von $x = 0$ gröfser wird als eine vorgegebene Gröfse und dann keine Werthe in dem genannten Bereiche existiren, für welche auch $\left|\frac{1}{g(x)}\right|$ gröfser wird als eine angegebene Gröfse.

Dieser Beweis rührt von Weierstrafs her.

## § 35. Endlich vieldeutige analytische Functionen.

Wir wollen auch die aus einer gegebenen Potenzreihe entspringende mehrdeutige analytische Function im Allgemeinen untersuchen.

Es sei also eine convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$ gegeben und es sei bekannt, dafs bei den unendlich vielen Übergängen von $a$ nach einer Stelle $x_0$ eine endliche Anzahl von einander verschiedener Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0), \quad \mathfrak{P}_2(x|x_0), \ \ldots\ \mathfrak{P}_n(x|x_0)$$

hervorgehen. Jedes dieser Elemente $\mathfrak{P}_\nu$ besitzt mindestens eine sin-

guläre Grenzstelle, in deren Umgebung keine aus $\mathfrak{P}_\nu$ abgeleitete Reihe existirt, die mit $\mathfrak{P}_\nu$ an unendlich vielen Stellen übereinstimmt. Verschiedene Elemente können auch dieselbe singuläre Grenzstelle haben; daher ist es möglich, dafs gerade $x_0$ auch singuläre Grenzstelle weiterer aus $\mathfrak{P}(x|a)$ abgeleiteter Potenzreihen ist; setzen wir aber fest, dafs dies nicht der Fall sei, so definirt die ursprüngliche Reihe eine $n$deutige analytische Function.

Die $n$ Elemente $\mathfrak{P}_\nu$ setze man auf gleichem Wege, d. h. durch Vermittlung derselben Stellen fort. Die Werthe simultaner Fortsetzungen an einer Stelle $x_1$ ihres gemeinsamen Convergenzbereiches sind die $n$ Werthe der Function für $x = x_1$. Die Gesammtheit derjenigen Elemente, welche aus einem Elemente $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$, aber bei gleichen vermittelnden Stellen aus keinem der übrigen Anfangselemente $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ hervorgehen, constituirt einen *Zweig* der $m$deutigen Function.

Jeder der $m$ Zweige verhält sich insofern wie eine eindeutige Function, als er an jeder Stelle seines Stetigkeitsbereiches, der durch die Gesammtheit der regulären Stellen des Zweiges zu definiren ist, nur einen Werth besitzt, aber er besteht nicht als ein abgeschlossenes Ganze, sondern nur in Zusammenhang mit den übrigen Zweigen, denn man kann von jedem Elemente eines Zweiges zu jedem Elemente irgend eines anderen gelangen. Es ist darum auch nicht erlaubt, von vornherein zu behaupten, dafs der einzelne Zweig an den Grenzstellen seines Stetigkeitsbereiches wie die eindeutige analytische Function unendlich wird.

Es läfst sich aber beweisen, dafs die endlich mehrdeutige analytische Function unendlich werden mufs, und zwar dadurch, dafs mindestens einer ihrer Zweige unendlich wird.

Bilden wir aus den $n$ zusammengehörigen Functionselementen

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0),\quad \mathfrak{P}_2(x|x_0)\ldots\mathfrak{P}_n(x|x_0)$$

die $n$ elementarsymmetrischen Ausdrücke

$$\begin{gathered}\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2+\cdots+\mathfrak{P}_n\\ \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2+\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3+\cdots+\mathfrak{P}_{n-1}\mathfrak{P}_n\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_n,\end{gathered}$$

die in dem gemeinsamen Convergenzbereiche der $n$ Elemente selbst in Potenzreihen

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(x|x_0),\quad \overline{\mathfrak{P}}_2(x|x_0),\ldots\overline{\mathfrak{P}}_n(x|x_0)$$

zu entwickeln sind, so haben wir $n$ eindeutige analytische Functionen

$$f_1(x),\quad f_2(x),\ldots f_n(x)$$

definirt. — Heifsen nämlich die in der Umgebung einer Stelle $x_1$ existirenden simultanen Elemente

$$\mathfrak{P}_1'(x|x_1), \quad \mathfrak{P}_2'(x|x_1), \dots \mathfrak{P}_n'(x|x_1),$$

und setzt man die obigen Ausdrücke auf irgend einem von $x_0$ nach $x_1$ führenden Wege fort, so erhält man stets dieselben Ausdrücke

$$\begin{gathered}\mathfrak{P}_1' + \mathfrak{P}_2' + \cdots + \mathfrak{P}_n' \\ \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' + \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_3' + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1}' \mathfrak{P}_n' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \dots \mathfrak{P}_n'.\end{gathered}$$

Die $n$ Reihen

$$\overline{\mathfrak{P}}_1'(x|x_1), \quad \overline{\mathfrak{P}}_2'(x|x_1), \dots \mathfrak{P}_n'(x|x_0),$$

in welche sich die transformirten Ausdrücke zusammenziehen lassen, sind keine anderen als die auf irgend einem Wege abgeleiteten Fortsetzungen der $n$ Elemente $\overline{\mathfrak{P}}_\nu(x|x_0)$ $(\nu = 1, 2, \dots n)$.

Der Beweis ist sehr einfach: Nehmen wir zunächst an, daſs die Stelle $x_1$ in dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ liege, und setzen z. B. in

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0) + \mathfrak{P}_2(x|x_0) + \cdots + \mathfrak{P}_n(x|x_0) = \overline{\mathfrak{P}}(x|x_0)$$

jede Reihe nach $x_1$ fort, so entsteht durch Vereinigung der Reihen $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0, x_1)$ eine Reihe

$$\overline{\mathfrak{P}}'(x|x_1) = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{P}_\mu(x|x_0, x_1),$$

die an unendlich vielen Stellen jeder Umgebung von $x_1$ mit der aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ übereinstimmt. Es wird also

$$\overline{\mathfrak{P}}(x|x_0, x_1) \equiv \mathfrak{P}'(x|x_1).$$

So kann man fortfahren, und der Satz ist evident, den man allgemein dahin aussprechen kann: *Eine analytische d. h. durch die elementaren Gröſsenoperationen ausdrückbare Beziehung zwischen Potenzreihen von gemeinsamem Convergenzbereiche bleibt auch für die simultanen Fortsetzungen bestehen.*

Die $n$ elementarsymmetrischen Ausdrücke oder die Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}_\mu(x|x_0)$ definiren somit eindeutige analytische Functionen, welche in dem Bereiche, wo es $m$ aus $\mathfrak{P}(x|a)$ entspringende Elemente gibt, existiren. An den singulären Stellen werden sie aber unendlich, und weil $f_1(x)$ nur dadurch unendlich werden kann, daſs eines der Elemente $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ oder eine der Fortsetzungen dieser Reihen eine singuläre Stelle hat, in deren nächster Nähe der Werth eines Zweiges gröſser wird als jede vorgegebene Gröſse, so ist auch die $m$deutige analytische Function an einer ihrer Grenzstellen unendlich. —

Bezeichnen wir die $m$deutige Function mit $y(x)$ und sind die $n$ Werthe an derselben Stelle $x_0$

$$y_1(x_0), \quad y_2(x_0), \dots y_n(x_0)$$

und somit

$$y_1(x_0) + y_2(x_0) + \cdots + y_n(x_0) = f_1(x_0)$$
$$y_1(x_0)\, y_2(x_2) + y_1(x_0)\, y_3(x_0) + \cdots + y_{n-1}(x_0)\, y_n(x_0) = f_2(x_0)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_1(x_0)\, y_2(x_0) \ldots y_n(x_0) = f_n(x_0),$$

so erhellt, dafs die $n$ besagten Werthe $y_\nu(x_0)$ die $n$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$y^n - f_1(x_0)\, y^{n-1} + \cdots + (-1)^n f_n(x_0) = 0$$

sind.

Dieselbe Gleichung besteht offenbar für alle Systeme von $y$ Werthen, die den Stellen $x_0'$ des gemeinsamen Convergenzbereiches der Reihen $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ angehören, wenn nur das Argument der eindeutigen Functionen $f_\mu(x)$ in $x_0'$ abgeändert wird, dann aber gilt für jedes System simultaner Functionalwerthe die Gleichung

$$y_n - f_1(x)\, y^{n-1} + f_2(x)\, y^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n(x) = 0.$$

Man sagt daher: Die $n$ Elemente $y_\mu = \mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ und deren simultane Fortsetzungen genügen einer algebraischen Gleichung, in welcher die Coefficienten eindeutige Functionen sind und drückt damit aus, dafs die Substitution von

$$y = \mathfrak{P}_\mu(x|x_0) \quad \text{und} \quad f_\mu(x) = \mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$$

eine identisch verschwindende Potenzreihe hervorruft.

Ist nunmehr bewiesen, dafs die $n$deutige analytische Function als Lösung einer algebraischen Gleichung mit eindeutigen Coefficienten zu betrachten ist, so folgt auch, dafs *jedenfalls einer der Coefficienten unendlich werden mufs, wenn ein Zweig der Function $y$ und diese selbst unendlich wird.*

Es sei $y_n = \mathfrak{P}_n(x|x_0)$ ein Element eines Zweiges mit der singulären Stelle $c$, an welcher der Zweig unendlich ist, aber $c$ gehöre noch dem Convergenzbereiche der übrigen $(n-1)$ Elemente $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ an. Bildet man dann die Potenzreihen, in welche sich die $(n-1)$ Ausdrücke

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1}$$
$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3 + \cdots + \mathfrak{P}_{n-2} \mathfrak{P}_{n-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{n-1}$$

entwickeln lassen, sie heifsen

$$\mathfrak{p}_1(x|x_0), \quad \mathfrak{p}_2(x|x_0), \ \ldots\ \mathfrak{p}_{n-1}(x|x_0),$$

so sind die Coefficienten $f_\nu(x)$ in der Umgebung der Stelle $x_0$ der Reihe nach durch

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(x|x_0) = \mathfrak{p}_1(x|x_0) + \mathfrak{P}_n(x|x_0)$$
$$\overline{\mathfrak{P}}_\nu(x|x_0) = \mathfrak{p}_{\nu'}(x|x_0) + \mathfrak{p}_{\nu'-1}(x|x_0) . \mathfrak{P}_n(x|x_0) \quad (\nu' = 2, 3 \ldots n-1)$$
$$\overline{\mathfrak{P}}_n(x|x_0) = \mathfrak{p}_{n-1}(x|x_0) . \mathfrak{P}_n(x|x_0)$$

darzustellen, aber man kann aus diesen Reihen nicht $n$ Potenzreihen nach $(x-c)$ bilden, weil $\mathfrak{P}_n(x|x_0)$ unendlich wird, wenn $x$ nach $c$ convergirt. Dann mufs $\overline{\mathfrak{P}}_n(x|x_0)$ und $f_n(x)$ die singuläre Stelle $c$ besitzen, aufser wenn $\mathfrak{p}_{n-1}(c|x_0)$ verschwindet. In diesem Falle mufs $\overline{\mathfrak{P}}_{n-1}(x|x_0)$ und $f_{n-1}(x)$ die singuläre Stelle $c$ haben, wenn nur $[\mathfrak{p}(x|x_0)]_{x=c}$ von Null verschieden ist. Ist aber $\mathfrak{p}(c|x)$ gleich Null und verschwinden alle Potenzreihen an der Stelle $x = c$, so mufs nothwendig der letzte Coefficient $f_1(x)$ die singuläre Stelle $c$ besitzen. Einer der Coefficienten $f_\mu(x)$ wird also in der That an der Stelle $c$ unendlich.

Denken wir nun eine $n$deutige analytische Function $y$ direct durch eine algebraische Gleichung definirt, deren Coefficienten eindeutige analytische Functionen sind, und will man diejenigen Stellen finden, an denen mindestens ein Zweig der Function unendlich wird, so suche man die Grenzstellen des gemeinsamen Stetigkeitsbereiches dieser eindeutigen Functionen. Sind die Coefficienten ganze Functionen, so wird die Stelle $\infty$ die einzige Unendlichkeitsstelle.

Die vorstehenden Beweise sind nicht mehr anwendbar, wenn es sich um unendlich vieldeutige monogene analytische Functionen handelt, denn die Summe unendlich vieler Elemente $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ oder irgend eine der früher benützten Combinationen, die nun bis auf die letzte immer aus unendlich vielen Summanden bestehen, braucht keinen Bereich gleichmäfsiger Convergenz zu besitzen, und wir können die Reihen $\mathfrak{P}_\mu(x|x_0)$ nicht mehr bilden. Wir dürfen nicht schliefsen, dafs die unendlich vieldeutige analytische Function auch unendlich werden müsse, und es erscheint möglich, dafs unendlich vieldeutige Functionen existiren, die nirgends unendlich werden; doch der Stetigkeitsbereich oder der Bereich regulärer Stellen einer solchen Function mufs auch begrenzt sein. —

Es ist jetzt noch zu erwägen, was man aus dem einzigen Umstande schliefsen kann, dafs einem Elemente $\mathfrak{P}(x|x_0)$ mehrere Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x|x_1)$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ entspringen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs wir es mit einer zweideutigen monogenen analytischen Function zu thun haben.

Ist das Element $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ durch Vermittlung der Stellen $a_1$, $a_2$, $\ldots a_n$ und der Reihen

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1), \quad \mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2), \ldots \mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

aus $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ abgeleitet, so kann man auch noch unendlich viele andere

continuirliche Wege finden, auf denen man wiederum von $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ auf $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ geführt wird.

Heifst der gemeinsame Convergenzbereich der aufeinanderfolgenden Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_{\nu-1}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu)$$

$A_\nu$, und wählt man in demselben ein oder mehrere $a_\nu$ hinlänglich benachbarte Stellen $a'_\nu$, so werden offenbar auch die Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1'), \quad \mathfrak{P}(x|x_0, a_1', a_2') \ldots \mathfrak{P}_{n'}(x|x_0, a_1', a_2', \ldots a_n')$$

den Übergang zu der Reihe $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ vermitteln, denn deren Convergenzbereiche können ganz in denen der früheren Reihen enthalten sein.

Läfst man darauf $x$ eine von $x_0$ über $a_1, a_2, \ldots a_n$ nach $x_1$ und über $a'_{n'}, a'_{n'-1}, \ldots a_1', a_0'$ nach $x_0$ zurückführende Werthemenge $P$ durchlaufen, welche ein zweifach ausgedehntes Continuum vollständig begrenzt, verläfst man aber niemals das aus den Convergenzbereichen aller angeschriebenen Elemente zusammengesetzte Gebiet, so wird der diesen Variabelnwerthen entsprechende Functionalwerth von

$$[\mathfrak{P}_1(x|x_0)]_{x=x_0} \quad \text{ausgehend über} \quad [\mathfrak{P}_1(x|x_1)]_{x=x_1}$$

nach dem Anfangswerthe zurückkehren. Es gibt also *geschlossene Wege*, auf welchen ein Functionalwerth in sich selbst übergeführt wird; dieselben begrenzen ein Continuum, an dessen inneren und Begrenzungsstellen der zu $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ gehörige Zweig regulären Verhaltens ist.

Vermitteln ferner die Stellen $b_1, b_2, \ldots b_m$ einen Übergang von $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ nach einer zweiten Reihe $\mathfrak{P}_2(x|x_1)$, so mufs der Functionalwerth $[\mathfrak{P}_2(x|x_1)]_{x=x_1}$ auf dem Wege von $x_1$ über die $b$ und $x_0$ und die Stellen $a$ bis $x_1$ in $[\mathfrak{P}_1(x|x_1)]_{x=x_1}$ übergehen und die Fortsetzungen

$$\mathfrak{P}_2(x|x_1, a_n), \quad \mathfrak{P}_2(x|x_1, a_n, a_{n-1}) \ldots \mathfrak{P}_2(x|x_1, a_n, a_{n-1}, \ldots a_1)$$

führen nothwendig zu einer von $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ verschiedenen Reihe $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$.

Es gibt also auch geschlossene Wege, auf welchen ein Functionalwerth $[\mathfrak{P}_1(x|x_0)]_{x=x_0}$ in einen andern $[\mathfrak{P}_2(x|x_0)]_{x=0}$ übergeht. Dieselben begrenzen ein Continuum, innerhalb dessen Stellen liegen müssen, in deren Umgebung keine aus $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ oder $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$ ableitbare Potenzreihe existirt.

Andernfalls könnte man ja innerhalb dieses Continuums immer eine Folge von Stellen

$$c_1, c_2, \ldots c_r \quad \text{oder} \quad c_1', c_2', \ldots c_s'$$

so angeben, dafs die Convergenzbereiche der Reihen

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, c_1), \quad \mathfrak{P}_1(x|x_0, c_1, c_2) \ldots \mathfrak{P}_1(x|x_0, c_1, c_2, \ldots c_r)$$

theilweise mit denen der Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, \ldots a_\nu), \quad \mathfrak{P}_1(x|x_0, b_1, \ldots b_\mu)$$

zusammenfallen und daselbst mit ihnen übereinstimmen; und dasselbe Verhältniſs bestünde zwischen den Reihen

$$\mathfrak{P}_2(x|x_0, c_1'), \quad \mathfrak{P}_2(x|x_0, c_1', c_2') \ldots \mathfrak{P}_2(x|x_0, c_1', c_2', \ldots c_s')$$

und den durch Vermittlung der Stellen $a$ respective $b$ aus $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$ abgeleiteten Reihen. Sind aber die Stellen $c_r$ und $c_s'$ so nahe bei $a_n$ und $b_m$ gelegen, daſs der Convergenzbereich der Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, c_1, c_2, \ldots c_\nu) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_2(x|x_0, c_1', c_2', \ldots c_s')$$

die letztgenannten Stellen umfaſst, so kann man aus diesen direct die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_1(x|x_0, b_1, b_2, \ldots b_m)$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{P}_2(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_2(x|x_0, b_1, b_2, \ldots b_m)$$

ableiten, und zwar stimmen dann diese Paare von Elementen in ihrem gemeinsamen Convergenzbereiche überein, soweit er auch dem Bereiche von

$$\mathfrak{P}_1(x|x_0, c_1, c_2, \ldots c_r) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_2(x|x_0, c_1', c_2', \ldots c_s')$$

angehört. Wenn aber die Stellen $a_n$ und $b_m$ genügend nahe bei $x_1$ liegen, so enthält der in Rede stehende Bereich auch die Stelle $x_1$ und es werden die Reihen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_1(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_n, x_1) &\equiv \mathfrak{P}_1(x|x_1)\\
\mathfrak{P}_1(x|x_0, b_1, b_2, \ldots b_m, x_1) &\equiv \mathfrak{P}_2(x|x_1)\\
\mathfrak{P}_2(x|x_0, a_1, a_2, \ldots a_n, x_1) &\equiv \mathfrak{P}_2(x|x_1)\\
\mathfrak{P}_2(x|x_0, b_1, b_2, \ldots b_m, x_1) &\equiv \mathfrak{P}_1(x|x_1)
\end{aligned}$$

untereinander übereinstimmen, was gegen die Voraussetzung verstöſst.

Die ausgezeichnete Stelle $(c)$ innerhalb des durch einen geschlossenen Weg begrenzten Bereiches, bei Durchlaufen dessen ein Element eines Zweiges in ein Element eines andern Zweiges übergeht, heiſst eine *Verzweigungsstelle* der mehrdeutigen Function. Dieser Übergang ist nur dadurch erklärlich, daſs jedes Paar der aus $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ und $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$ oder $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ und $\mathfrak{P}_2(x|x_1)$ abgeleiteten simultanen Elemente

$$\mathfrak{P}_1(x|x'), \quad \mathfrak{P}_2(x|x')$$

mit der singulären Stelle $(c)$ Functionalwerthe gibt, die bei irgend einer innerhalb des Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}_1(x|x')$ und $\mathfrak{P}_2(x|x')$ gelegenen Werthereihe der Variabeln mit der Häufungsstelle $c$ immer nach derselben Grenze convergiren, denn dann kann bei einem durch $c$ gelegten Wege ein Functionalwerth von jener gemeinsamen Grenze ab zwei verschiedene Wege einschlagen. Diese Grenze aber kann endlich oder unendlich sein.

Es ist aber wohl zu beachten, dafs aus der Aussage allein: Eine zweideutige Function hat an der Stelle $c$ einen und nur einen Werth, noch nicht geschlossen werden kann, dafs sie sich dort verzweigt, denn die Function kann in der Umgebung dieser Stelle durch zwei Potenzreihen darstellbar sein, die einfach in den Anfangsgliedern übereinstimmen. Die Verzweigungsstelle mufs zudem eine solche sein, in deren Umgebung kein Zweig regulären Verhaltens ist. Es ist deshalb nicht jeder mehrfache Punkt (an welchem die Functionalwerthe übereinkommen) Verzweigungspunkt, aber jeder Verzweigungspunkt mehrfacher Punkt, und zwar wird die $n$deutige monogene analytische Function Verzweigungsstellen $1, 2, 3 \ldots (n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aufweisen können, an denen 2, 3 usw., endlich alle $n$ Zweige zusammenhängen, jedenfalls aber mufs jeder Zweig mit jedem andern, sei es direct oder sei es indirect, verzweigt sein. —

Es sollte nun unsere Aufgabe sein, die voranstehenden Untersuchungen auf den Fall von Potenzreihen mehrerer Variabeln auszudehnen. Wenn wir wieder von einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n | (a))$$

mit dem Convergenzradius $R$ ausgehen, und durch die Gesammtheit der ineinander fortsetzbaren, dem gegebenen Elemente entspringenden Potenzreihen die monogene analytische ein- oder mehrdeutige Function definiren und den Stetigkeitsbereich der $m$deutigen Function durch die Gesammtheit der Stellen bestimmen, in deren Umgebung $m$ reguläre Elemente existiren, haben wir zunächst das Verhalten der eindeutigen Function an den Grenzstellen zu untersuchen und als erste Aufgabe erscheint die Bestimmung der nothwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dafs die analytische Function an einer Stelle $(x^{(0)})$ endlich und stetig bleibt.

Die nothwendige Bedingung besteht gewifs darin, dafs das Product der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ und einer an der Stelle $(x^{(0)})$ verschwindenden Potenzreihe $\mathfrak{P}_2'(x_1, x_2, \ldots x_n | (x_0^{(0)}))$ in der Umgebung von $(x^{(0)})$ regulär und für $x_\nu = x_\nu^{(0)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ Null wird. Will man aber erfahren, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, so mufs man aus

$$f \cdot \mathfrak{P}_2' = \mathfrak{P}_1'(x_1, x_2, \ldots x_n | (x^{(0)}))$$

den Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1'}{\mathfrak{P}_2'}$$

entnehmen und erst fragen, wie sich dieser verhält. Man gelangt also zu einem Ausdruck, dessen Untersuchung wir schon früher verschoben haben, als es sich darum handelte, aus gegebenen Potenzreihen neue abzuleiten (S. 155). Auch hier genüge uns vorderhand der Begriff der analytischen Function mehrerer Variabeln. —

In diesem Capitel soll nur noch einer Reihe von Functionen gedacht werden, die zugleich mit einer analytischen Function existiren: wir meinen die *Ableitungen*.

Wir wissen, dafs das einzelne Element einer Function:

$$\mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (x-a)^\nu$$

eine bestimmte Ableitung besitzt:

$$\mathfrak{P}'(x|a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,\alpha_\nu (x-a)^{\nu-1},$$

die zum mindesten ebenso lange convergirt als die gegebene Reihe; es mufs aber untersucht werden, ob die Ableitungen der Fortsetzungen von $\mathfrak{P}(x|a)$ auch Fortsetzungen von $\mathfrak{P}'(x|a)$ sind oder ob die Ableitungen aller Elemente einer monogenen analytischen Function selbst eine monogene analytische Function constituiren.*)

Diese Frage beantwortet man damit bejahend, dafs man zeigt, die Ableitung der durch Vermittlung von Stellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gewonnenen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, \ldots a_n, x_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu (x-x_0)^\nu$$

ist identisch mit der auf demselben Wege ermittelten Fortsetzung von $\mathfrak{P}'(x|a)$, nämlich mit

$$\mathfrak{P}'(x|a, a_1, a_2, \ldots a_n, x_0).$$

Man hat den Beweis nur für direct ableitbare Reihen zu erbringen. Wir stellen also die Reihe

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (a_1 - a + (x-a_1))^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu (x-a_1)^\nu$$

auf, bilden die Ableitung und zeigen deren Identität mit

$$\mathfrak{P}'(x|a, a_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu\,\alpha_\nu (a_1 - a + (x-a_1))^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta'_\nu (x-a_1)^\nu.$$

Die Reihen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ besitzen einen gemeinsamen Convergenzbereich. Sind $x$ und $x+h$ zwei Stellen dieses Bereiches, so entsteht beim Ordnen der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (a - a_1 + (x+h-a_1))^\nu$ nach Potenzen von $h$:

$$\mathfrak{P}(x+h|a, a_1) = \mathfrak{P}(x|a) + \mathfrak{P}'(x|a).h + h.\mathfrak{P}(x_1 h),$$

wo auch $\mathfrak{P}_1(x|h)$ mit $h$ unendlich klein wird.

Die genannten Ausdrücke stimmen in einer Umgebung von $x$ überein. Da aber dort $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ dieselben Werthe ergeben und daselbst

*) Siehe Pincherle 2. Theil § 31.

$$\mathfrak{P}_1(x|a,a_1) - \mathfrak{P}'(x|a) = \mathfrak{P}(x,h) - \mathfrak{P}_1(x,h)$$

mit $h$ beliebig klein wird, werden die Reihen $\mathfrak{P}_1(x|a,a_1)$ und $\mathfrak{P}'(x|a_1)$ an allen Stellen einer hinlänglich kleinen Umgebung von $x$ dieselben Werthe annehmen. Indem nun noch $\mathfrak{P}'(x|a)$ und $\mathfrak{P}'(x|a,a_1)$ in dem genannten Bereiche übereinstimmen, werden die nach denselben Potenzen fortschreitenden Reihen $\mathfrak{P}_1(x|a,a_1)$ und $\mathfrak{P}'(x|a,a_1)$ identisch.

Damit ist der Satz begründet, dafs die erste Ableitung und dann auch jede folgende eine monogene analytische Function ist. Ob diese Derivirten ebenso vieldeutig sein werden wie die gegebene Function, ist a priori nicht zu entscheiden, nur die Derivirte einer eindeutigen Function ist gewifs wieder eindeutig.

Derselbe Satz gilt auch für die verschiedenen partiellen Derivirten einer analytischen Function mehrerer Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, deren Differentialänderung $df(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\, dx_\nu$$

definirt ist. Sind die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ selbst analytische Functionen neuer Variabeln

$$x_\nu = \varphi_\nu(y_1, y_2, \ldots y_m),$$

so wird

$$dx_\nu = \sum_\mu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_\mu}\, dy_\mu$$

und

$$df(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\, \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_\mu}\, dy_\mu.$$

# Viertes Capitel.

## Über den Umfang des Begriffes der analytischen Function.

### I. Abschnitt.

### Theorie der algebraischen Gleichungen.

#### § 36. Einleitung.

Mit den bisherigen Definitionen hat die allgemeine Functionentheorie insoweit einen bestimmten Inhalt, als genau formulirt ist, was für veränderliche Gröſsen als Functionen bezeichnet werden; doch der bestimmt gewählte Begriff einer analytischen Function wird erst dadurch von Bedeutung, daſs man die durch irgend einen arithmetischen Zusammenhang definirten Gröſsen als analytische Functionen erkennen lernt. Wenn aber einmal gezeigt ist, daſs der Functionsbegriff die irgendwo in Rechnung tretenden Gröſsen wirklich umfaſst und nicht zu eng gewählt ist, dann kann man andrerseits bei der Frage nach Gröſsen von bestimmt analytisch ausdrückbarer Eigenschaft stets verlangen, daſs die gesuchte Gröſse in einem endlichen, wenn auch noch so kleinem Bereiche der unabhängigen Variabeln eine analytische Function, und dort als solche durch eine convergente Potenzreihe darstellbar sei. Aus der primitiven Reihe, deren unbestimmte Coefficienten mit Hilfe der Voraussetzung bestimmt werden, daſs das Element die Eigenschaft der gesuchten Function besitze, geht durch Fortsetzung eine analytische Function hervor, welche in ihrem ganzen Giltigkeitsbereich die verlangte Beschaffenheit aufweist, wenn die gefundene Potenzreihe wirklich convergent ist. Wir ziehen dabei gewiſs nur Zahlengröſsen in Betracht, welche in der arithmetischen Einleitung als in der Rechnung zulässige bezeichnet waren.

Nach dieser kurzen Andeutung zweier Aufgaben der Functionentheorie, die den Gang für die ferneren Untersuchungen vorzeichnen, wenden wir uns gleich zu der Frage, ob eine von $n$ unabhängig veränderlichen Gröſsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängige Gröſse $y$, welche durch eine Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades in $y$ definirt sei, in welcher die Coefficienten

eindeutige analytische Functionen sein mögen, eine analytische Function ist.

Die Gleichung laute:

$$F(y, x_1, x_2 \ldots x_n) = y^m \psi_0(x_1, x_2, \ldots x_n) + y^{m-1}\psi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + \cdots$$
$$\cdots + \psi_m(x_1 . x_2, \ldots x_n) = 0 .$$

Wir wissen bereits, dafs jedem Werthesysteme der Variabeln $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für welches die Coefficienten $\psi$ endliche Werthe besitzen, im Allgemeinen $m$ von einander verschiedene Werthe $y$ zugehören. Die Gröfse $y$ ist also $m$-deutig, doch weil einer ihrer Werthe an der Stelle $(x^{(0)})$ unendlich wird, wenn diese eine Unendlichkeitsstelle eines der Coefficienten $\frac{\psi_\mu}{\psi_0}$ ist, so müssen die $m$ Functionen

$$\frac{\psi_\mu}{\psi_0} \quad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

einen gemeinsamen Stetigkeitsbereich besitzen. Werden die letzten $(m - n)$ dieser Functionen an einer und derselben Stelle $(x^{(0)})$ ihres Stetigkeitsbereiches unendlich klein, $\frac{\psi_n}{\psi_0}$ aber nicht, so nimmt die aus der Gleichung

$$y^m + \frac{\psi_1}{\psi_0} y^{m-1} + \cdots + \frac{\psi_m}{\psi_0} = 0 \tag{$\alpha$}$$

hervorgehende Gröfse $y$ an der Stelle $(x^{(0)})$ $(m - n)$ unendlich kleine Werthe an. Im Falle $n = m - 1$ haben wir diese Behauptung als richtig erkannt und wenn wir sie als zutreffend ansehen, sofern die letzten $m - n - 1$ Coefficienten $\frac{\psi_\mu}{\psi_0}$ unendlich klein sind, so folgt sie auch in dem genannten Falle.

In der That: bezeichnet $y'$ eine der $(m - n - 1)$ unendlich kleinen Wurzeln, die nun existiren, so genügen alle übrigen Lösungen der neuen Gleichung

$$\left(y^m + \frac{\psi_1}{\psi_0} y^{m-1} + \cdots + \frac{\psi_m}{\psi_0}\right) : (y - y') = 0 .$$

Da aber in dem Resultate der Division:

$$\frac{F(y) - F(y')}{y - y'} = \frac{y^m - y'^m}{y - y'} + \frac{\psi_1}{\psi_0}\,\frac{y^{m-1} - y'^{m-1}}{y - y'} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\psi_{m-2}}{\psi_0}\,\frac{y^2 - y'^2}{y - y'} + \frac{\psi_{m-1}}{\psi_0}\,\frac{y - y'}{y - y'}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m} y^{m-\mu} y'^{\mu-1} + \frac{\psi_1}{\psi_0} \sum_{\mu=2}^{m} y^{m-\mu} y'^{\mu-2} + \cdots + \frac{\psi_{m-1}}{\psi_0} \sum_{\mu=m} y^{m-\mu} y'^{\mu-m} ,$$

wenn dasselbe noch nach abnehmenden $y$-Potenzen geordnet wird, die letzten $(m - n - 1)$ Coefficienten unendlich klein werden, hat die Gleichung $(\alpha)$ wirklich $(m - n)$ unendlich kleine Wurzeln.

Faſst man die ursprüngliche Gleichung ins Auge, so kann man nur sagen, $y$ hat an einer Stelle $(x^{(0)})$ des gemeinsamen Stetigkeitsbereiches der $(m+1)$ Functionen $\psi$ $(m-n)$ unendlich kleine Wurzeln, wenn die letzten $(m-n)$ Coefficienten $\psi$ daselbst unendlich kleine Werthe annehmen und $\psi_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$ nicht unendlich klein ist.

In ähnlicher Weise zeigt man, daſs $n$ Wurzeln $y$ unendlich groſs werden, wenn die ersten $n$ Coefficienten $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}$ unendlich kleine Werthe annehmen und keiner der übrigen Coefficienten unendlich groſs ist.

Damit ist auch leicht bewiesen, daſs die endlichen Wurzeln

$$y_1^{(0)},\ y_2^{(0)} \ldots y_m^{(0)},$$

welche einer Stelle $(x^{(0)})$ des Stetigkeitsbereiches der Coefficienten entsprechen, mit den Coefficienten stetig veränderlich sind. Denn wählen wir in einer Umgebung von $(x^{(0)})$ eine Stelle $(x^{(0)}+\xi)$, an welcher $x_0$ von Null verschieden ist, so werden in den zugehörigen Wurzeln

$$y_\mu^{(0)} + \eta_\mu \quad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

die Incremente $\eta_\mu$ mit den $\xi_\nu$ unendlich klein. Substituirt man zunächst in $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ an Stelle von $x_\nu$, $x_\nu + \xi_\nu$, so entsteht eine Gleichung:

$$y^m(\psi_0)_{x^{(0)}} + y^{m-1}(\psi_1)_{x^{(0)}} + \cdots + (\psi_m)_{x^{(0)}} + y^m\chi_0 + y^{m-1}\chi_1 + \cdots$$
$$\cdots + \chi_m = 0,$$

wo $(\psi_\mu)_{x^{(0)}}$ für $\psi_\mu(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ gesetzt ist und $\chi_\mu$ Functionen von $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ sind, die mit diesen Gröſsen unendlich klein werden. Hier gibt die Substitution von $y_\mu^{(0)} + \eta_\mu$ an Stelle von $y_\mu^{(0)}$ einen Ausdruck der Gestalt:

$$F(\eta\ ,\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}) + \Phi(\eta_\mu, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0,$$

worin $\Phi$ mit den $\xi_\nu$ und $F$ mit $\eta_\mu$ unendlich klein wird, so daſs einer der Werthe von $\eta_\mu$ gewiſs nach Null convergirt. Weil das aber für jedes $\eta_\mu$ zutrifft, so erscheint wirklich die unendlich kleine Werthänderung der Coefficienten, bei welcher $\psi_0$ nicht Null wird, mit einer unendlich kleinen Änderung der Werthe von $y$ verbunden, d. h. die Wurzeln einer Gleichung $F=0$ ändern sich stetig mit den Coefficienten, solange wir uns auf die Umgebung solcher Stellen des gemeinsamen Stetigkeitsbereiches der letzteren beschränken, für die der Coefficient der höchsten $y$-Potenz nicht verschwindet.

Diese Eigenschaft der zu untersuchenden $m$-deutigen Gröſse haben wir hier vorausgeschickt, um uns in dem Falle einer algebraischen Gleichung:

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mu=0}^{m} y^{m-\mu} f_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

wo die Coefficienten ganze rationale Functionen sind, gleich über die Unendlichkeitsstellen der Function $y$ orientiren zu können, in deren Umgebung $y$ gewifs nicht durch Potenzreihen darstellbar ist. Wir denken die rationalen Functionen $f_\mu$ von gemeinsamen Theilern befreit, dann sind die im Endlichen liegenden Nullstellen von $f_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$ Stellen, in deren Umgebung wir die Stetigkeit von $y$ nicht erschliefsen können.

Wir setzen ferner fest, dafs $G(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ nicht in das Product mehrerer Functionen $G_\mu(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$, deren Coefficienten wieder ganze rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind, zerlegbar oder *nicht reductibel* sei, denn andernfalls würden wir die Gleichungen $G_\mu = 0$ untersuchen und die hieraus bestimmten Gröfsen $y$ genügten gewifs der gegebenen Gleichung $G = 0$.

Die wahre Bedeutung der *irreductiblen ganzen rationalen Function* $G(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ erschliefst der folgende Satz:

Sind $G(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ und $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ zwei ganze rationale Functionen der $(n+1)$ Variabeln $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ und ist $G$ irreductibel, haben aber die Gleichungen

$$G = 0, \quad F = 0$$

für jedes Werthesystem $x_\nu = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ in der Umgebung einer Stelle

$$y^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$$

eine gemeinsame Lösung, so ist $F$ durch $G$ theilbar.

Andernfalls gäbe es nämlich zwei ganze rationale Functionen:

$$\Phi(y, x_1, x_2 \ldots x_n), \quad \Psi(y, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

deren Grad in $y$ niedriger ist als der der gegebenen Functionen $F$ und $G$, und für diese wäre

$$F\Psi - G\Phi$$

eine rationale Function der $n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ $R(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die nicht identisch verschwindet. Eine Gleichung

$$F\Psi - G\Phi = R$$

ist aber nicht mit der Annahme verträglich, dafs $F$ und $G$ an jeder Stelle einer Umgebung von $(x^{(0)})$ gleichzeitig verschwinden, es mufs also

$$F\Psi - G\Phi = 0,$$

und $F$ durch $G$ theilbar sein. —

Man kann diesen Satz natürlich dahin abändern, dafs man festsetzt, $F = 0$ und $G = 0$ haben für unendlich viele Stellen $(x)$ mit der Häufungsstelle $(x^{(0)})$ eine Wurzel gemein.

Sind $G$ und $F$ ganze rationale Functionen einer Variabeln allein, so ist nur nöthig, dafs die irreductiblen Gleichungen $G(y) = 0$ und $F(y) = 0$ eine gemeinsame Wurzel $y = y^{(0)}$ besitzen, dann ist schon $F$ durch $G$

theilbar und die Gleichung $F = 0$ hat alle Wurzeln, welche der Gleichung $G = 0$ zukommen. —

Wenn aus der irreductiblen algebraischen Gleichung

$$G(y, x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

für ein bestimmtes Werthesystem der unabhängigen Variabeln

$$x_1 = a_1, \; x_2 = a_2 \dots x_n = a_n$$

eine endliche Wurzel $y = b$ hervorgeht, so ist

$$G(y, a_1, a_2, \dots a_n)$$
$$= \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \frac{(y-b)}{1!} + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) \frac{(y-b)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^m G}{\partial y^m}\right) \frac{(y-b)^m}{m!},$$

wo $\left(\frac{\partial^\mu G}{\partial y^\mu}\right)$ den Werth des $\mu^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $G$ nach $y$ für $x_\nu = a_\nu$ $(\nu = 1, 2 \dots n)$ und $y = b$ bezeichnet. Verschwindet $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$ an dieser Stelle, so ist $y = b$ eine zweifache Wurzel. Wir haben aber schon bemerkt, daſs mehrfache Stellen $(a)$ für eine $m$-deutige analytische Function auch Stellen sein können, wo für dieselbe nicht $m$ Potenzreihen existiren. Wenn wir daher beweisen wollen, daſs die durch eine Gleichung $G = 0$ definirte Gröſse $y$ eine analytische Function ist, so werden wir, solange als es sich um den Nachweis handelt, daſs $y$ in der Umgebung einer Stelle $(x)$ des Stetigkeitsbereiches der Coefficienten $f_\mu(x_1, x_2, \dots x_n)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln sei, nicht allein die Nullstellen von $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$, sondern auch diejenigen Stellen $(x)$ ausschlieſsen, für welche die Gleichungen

$$G = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

gleichzeitig bestehen. Man findet diese Stellen, indem man die Nullstellen der Resultante von $G$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$, oder was gleichbedeutend ist, die Nullstellen der Discriminante von $G$ sucht. Diese Discriminante

$$D(x_1, x_2, \dots x_n)$$

wird keinesfalls identisch verschwinden, weil vorausgesetzt war, daſs $G$ eine irreductible Function ist und $G$ nicht durch $\frac{\partial G}{\partial y}$ theilbar sein kann. Umgekehrt werden aber den Nullstellen von $D$ mehrfache Lösungen von $y$ entsprechen, und gleiche Wurzeln $y$ können nur an solchen Stellen bestehen, wo die Discriminante verschwindet.

Die Gesammtheit der zusammengehörigen Werthesysteme

$$(x_1, x_2, \dots x_n, y),$$

welche die algebraische Gleichung erfüllen, nennt Weierstraſs das durch die Gleichung definirte *algebraische Gebilde* im $(2n+2)$-fach aus-

gedehnten Gebiete der Gröfsen $x_1, x_2 \ldots x_n, y$ und eines der Werthesysteme eine *Stelle des Gebildes.*

Ist $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ x_n = a_n$ ein Werthesystem, dem $m$ von einander verschiedene endliche Stellen

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ b_\mu) \quad \mu = 1,\ 2 \ldots m$$

zugehören, und setzt man darauf

$$x_\nu = a_\nu + \xi_\nu \quad (\nu = 1,\ 2 \ldots n),\quad y = b_\mu + \eta_\mu,$$

so geht die Gleichung $G = 0$ in die folgende über:

$$G(b_\mu + \eta_\mu,\ a_1 + \xi_1,\ a_2 + \xi_2,\ \ldots\ a_n + \xi_n) =$$
$$= \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\eta_\mu + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)\xi_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)\xi_2 + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)\xi_n + \sum_{\nu=2}(\eta_\mu,\ \xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ \xi_n)_\nu,$$

wo $(\eta_\mu,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n)_\nu$ die Summe über alle aus $\eta_\mu,\ \xi_1,\ \ldots\ \xi_n$ gebildeten Glieder $\nu^{\text{ter}}$ Dimension bedeutet. Es entsteht also eine Gleichung der Form

$$\eta_\mu^m\varphi_0(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) + \eta_\mu^{m-1}\varphi_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) + \cdots + \varphi_m(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = 0,$$

deren Coefficienten $\varphi_m$ und $\varphi_{m-1}$ die Eigenschaft haben, für

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$$

die Werthe Null respective $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$ anzunehmen.

Und nun gehen wir an die Aufgabe, $\eta_\mu$ oder $y - b_\mu$ in der Umgebung der Stelle $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \ldots\ \xi_n = 0$ resp.

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots\ x_n = a_n$$

in eine convergente Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_\mu(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n) = \mathfrak{P}_\mu\big(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n|(a)\big)$$

zu entwickeln. Entsprechend den $m$ Wurzeln $b_\mu$ werden wir $m$ simultane Elemente:

$$y = b_\mu + \mathfrak{P}_\mu\big(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n|(a)\big) \quad (\mu = 1,\ 2 \ldots m)$$

erhalten, welche in ihrem gemeinsamen Convergenzbereiche die $m$-deutige durch die Gleichung $G = 0$ definirte Gröfse $y$ vollständig bestimmen.

## § 37. Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Zum Beweise der Existenz einer Potenzreihe für die durch eine algebraische Gleichung $G(y,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) = 0$ definirte Grösse $y$ in der Umgebung einer Stelle $(x)$, die weder Nullstelle der Discriminante, noch Nullstelle der bei der höchsten Potenz von $y$ stehenden

ganzen rationalen Function ist, suche man ein Verfahren, durch welches man die Wurzel einer Gleichung

$$f(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} z + \alpha_m = 0$$

bestimmt, wo $|\alpha_0|$ und $|\alpha_{m-1}|$ nicht unendlich klein sind und die übrigen Coefficienten dem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine angebbare Gröſse.

Heiſsen die $m$ von einander verschiedenen endlichen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$

$$z_1, z_2, \ldots z_m,$$

so wird

$$f(z) = \alpha_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_m}.$$

Bezeichnet ferner $\zeta$ eine von $z_1, z_2, \ldots z_m$ verschiedene endliche Gröſse, und bildet man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(\zeta) + f^2(\zeta)\,\dfrac{z-\zeta}{1} + \cdots + f^{(m-1)}(\zeta) \cdot \dfrac{(z-\zeta)^{m-1}}{(m-1)!}}{f(\zeta) + f'(\zeta)\,\dfrac{z-\zeta}{1} + \cdots + f^{(m)}(\zeta) \cdot \dfrac{(z-\zeta)^m}{m!}}$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{z - z_\mu} = -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{(z_\mu - \zeta)\left(1 - \dfrac{z-\zeta}{z_\mu - \zeta}\right)},$$

vergleicht hierauf die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $(z - \zeta)$ in den für diese Ausdrücke geltenden Potenzreihen, die gewiſs in einer Umgebung von $z = \zeta$ übereinstimmen, so wird der Coefficient der Potenz $(z - \zeta)^\lambda$:

$$\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{(z-\zeta)^\lambda} = -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{(z_\mu - \zeta)^{\lambda+1}}.$$

Da dieser Ausdruck in den Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_m$ symmetrisch ist, wird er als rationale Function von $\zeta$ und den Coefficienten von $f(z)$ darzustellen sein. Dasselbe gilt dann auch für den Quotienten aufeinanderfolgender Entwicklungscoefficienten:

$$\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} (z_\mu - \zeta)^{-\lambda}}{\sum\limits_{\mu=1}^{m} (z_\mu - \zeta)^{-\lambda-1}} = R_\lambda(\zeta),$$

der auf die Form

$$R_\lambda(\zeta) = (z_\nu - \zeta) \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \left(\frac{z_\nu - \zeta}{z_\mu - \zeta}\right)^\lambda}{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \left(\frac{z_\nu - \zeta}{z_\mu - \zeta}\right)^{\lambda+1}}$$

gebracht werden mag.

Der Convergenzkreis der die eindeutige Function $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in der Umgebung der Stelle $z = \zeta$ darstellenden Potenzreihe geht durch die dieser Stelle nächstliegende Nullstelle von $f(x)$, sie heifse $z_\nu$. Dann sind die absoluten Beträge von

$$\frac{z_\nu - \zeta}{z_\mu - \zeta} \quad (\mu = 1, 2, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots m)$$

kleiner als Eins und der gröfste sei $\varepsilon$. Bestimmt man nun eine positive ganze Zahl $\lambda$ derart, dafs

$$(m-1)\,\varepsilon^{\lambda+1} < 1$$

wird, so kann man den absoluten Betrag von $R_\lambda(\zeta) - (z - \zeta)$ kleiner machen als

$$|z_\nu - \zeta| \cdot \left(\frac{1 + (m-1)\,\varepsilon^\lambda}{1 - (m-1)\,\varepsilon^{\lambda+1}} - 1\right) \quad \text{und} \quad |z_\nu - \zeta| \cdot \frac{2(m-1)\,\varepsilon^\lambda}{1 - (m-1)\,\varepsilon^{\lambda+1}}.$$

Fafst man ferner in der durch die Bedingungen

$$\left|\frac{z_\nu - \zeta}{z_\mu - \zeta}\right| < 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots m)$$

definirten Umgebung einer Stelle $(\zeta, z_1, z_2, \ldots z_m)$ denjenigen Bereich auf, wo die obere Grenze $\varepsilon$ der absoluten Beträge der aus den als variabel gedachten Gröfsen $\zeta, z_1, z_2, \ldots z_m$ gebildeten Ausdrücke $\frac{z_\nu - \zeta}{z_\mu - \zeta}$ kleiner ist als Eins, so wird für alle Stellen dieses Bereiches

$$|R_\lambda(\zeta) - (z_\nu - \zeta)| < |z_\nu - \zeta| \frac{2(m-1)\,\varepsilon^\lambda}{1 - (m-1)\,\varepsilon^{\lambda+1}}$$

und jetzt kann man eine ganze Zahl $\lambda$ so finden, dafs

$$R_\lambda(\zeta) + \zeta$$

für alle Stellen des genannten Bereiches die Wurzel $z_\nu$ so genau angibt, als man nur will. Man sieht, dafs in derjenigen Umgebung einer Stelle $(\zeta, z_1, z_2, \ldots z_m)$, wo $|z_\nu - \zeta|$ kleiner ist als jede der übrigen Gröfsen $|z_\mu - \zeta|$, $R_\lambda(\zeta) + \zeta$ für ein $\lambda$, das gröfser ist als jede angebbare Gröfse, gleichmäfsig convergirt und gleich $z_\nu$ ist. Ersetzt man den gefundenen Ausdruck für die Wurzel $z_\nu$ durch

$$\zeta + R_1(\zeta) + (R_2(\zeta) - R_1(\zeta)) + (R_3(\zeta) - R_2(\zeta)) + \cdots$$

und entwickelt die rationalen Functionen $R_\lambda(\zeta)$ von $\zeta$ und den Coefficienten der Function $f(z)$ nach Potenzen von $\zeta$, so wird auch die

Wurzel $z_\nu$ durch eine (nach Potenzen von $\xi$ fortschreitende) convergente Potenzreihe darzustellen sein, denn man kann die gleichmäfsig convergente Summe unendlich vieler rationaler Functionen selbst in eine convergente Potenzreihe umformen.

Diese von H. Runge herrührende *Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen rationaler Functionen der Coefficienten**) ist nicht mehr anwendbar, wenn $f(z)$ keine ganze rationale, sondern eine ganze transcendente Function oder das Element einer analytischen Function ist; und weil wir diese Fälle auch in Betracht ziehen müssen, wollen wir die verlangte Entwicklung einer Wurzel auf dem von H. Weierstrafs in seinen Vorlesungen eingehaltenen Wege direct ableiten, denn auf diesem ist die genannte Verallgemeinerung möglich.

Entnimmt man der Gleichung

$$f(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m = 0$$

die Beziehung:

$$z = -\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} + \frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_{m-1}} z^2 + \cdots + \frac{\alpha_0}{\alpha_{m-1}} z^m\right)$$

oder

$$z = b + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots + b_m z^m = g(z),$$

so handelt es sich um die Ermittelung eines Werthes $z'$, welcher die Gleichung

$$z' = g(z')$$

identisch erfüllt. Um $z'$ zu finden, suche man eine Folge von Zahlengröfsen

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots .\ z_\mu,\ \ldots,$$

die eine Fundamentalreihe constituiren und deren Terme die verlangte Eigenschaft, nämlich der Gleichung $z = g(z)$ zu genügen, immer näher und näher erfüllen. Dann wird

$$z_0 - g(z_0),\ z_1 - g(z_1),\ \ldots z_\mu - g(z_\mu)$$

eine Elementarreihe, und die Grenze der Fundamentalreihe $z'$ ist die verlangte Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$.

Das erste Glied $z_0$ einer Reihe von Gröfsen sei Null, $z_1$ sei $g(z_0)$ oder $b$, $z_2 = g(z_1) = b + b_2 b^2 + \cdots + b_m b^m$ usw., $z_\mu = g(z_{\mu-1})$. Es ist zu zeigen, dafs die so definirte Gröfsenmenge, deren einzelnes Glied eine ganze Function von $b$ und $b_2, b_3, \ldots b_m$ wird und nur positive ganzzahlige Coefficienten enthält, eine Fundamentalreihe ausmacht.

Wenn man

$$z_{\mu+1} - z_\mu = (z_\mu - z_{\mu-1}) f_\mu$$

setzt, wird

*) Siehe Acta mathematica Bd. 6, S. 305.

$$f_\mu = \frac{g(z_\mu) - g(z_{\mu-1})}{z_\mu - z_{\mu-1}} = b_2 \frac{z_\mu^2 - z_{\mu-1}^2}{z_\mu - z_{\mu-1}} + b_3 \frac{z_\mu^3 - z_{\mu-1}^3}{z_\mu - z_{\mu-1}} + \cdots$$
$$\cdots + b_m \frac{z_\mu^m - z_{\mu-1}^{m-1}}{z_\mu - z_{\mu-1}}$$

und

$$z_1 - z_0 = b$$
$$z_2 - z_1 = bf_1$$
$$z_3 - z_2 = bf_1 f_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z_{\mu+1} - z_\mu = bf_1 f_2 \ldots f_\mu$$

und die Addition dieser Gleichungen ergibt:

$$z_{\mu+1} = b(1 + f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_\mu).$$

Hier läſst sich nun beweisen, daſs $z_{\mu+1}$ für ein unendlich wachsendes $\mu$ endlich bleibt und

$$\lim (z_{\mu+1} - z_\mu) = \lim \left(g(z_\mu) - z_\mu\right) = 0$$

ist.

Ersetzt man $b_2, b_3 \ldots b_m$ durch bestimmte positive Gröſsen $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_m$, wo

$$\beta_2 \geqq |b_2|, \quad \beta_3 \geqq |b_3|, \ldots \beta_m \geqq |b_m|$$

ist, und $b$ durch eine noch unbestimmt gelassene positive Gröſse $\beta$, bezeichnet die diesen Gröſsen entsprechenden Functionen $f_\mu$ und Gröſsen $z_\mu$ durch griechische Buchstaben, so wird

$$\zeta_\mu > \zeta_{\mu-1}$$

und deſswegen

$$\varphi_\mu = \sum_{\nu=2}^{m} \beta_\nu \frac{\zeta_\mu^\nu - \zeta_{\mu-1}^\nu}{\zeta_\mu - \zeta_{\mu-1}} = \sum_{\nu=2}^{m} \beta_\nu (\zeta_\mu^{\nu-1} + \zeta_\mu^{\nu-2}\zeta_{\mu-1} + \cdots + \zeta_\mu^{\nu-1}) <$$
$$< 2\beta_2\zeta_\mu + 3\beta_3\zeta_\mu^2 + \cdots + m\beta_m\zeta_\mu^{m-1} = \gamma'(\zeta_\mu).$$

Bezeichnet ferner $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Gröſse und wählt man die positive Gröſse $\beta$ derart, daſs

$$2\beta_2\beta(1+\varepsilon) + 3\beta_3\beta^2(1+\varepsilon)^2 + \cdots + m\beta_m\beta^{m-1}(1+\varepsilon)^{m-1} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

— was gewiſs stets angeht — so ist jede Gröſse $\zeta_\mu$ und das zugehörige $\varphi_\mu$ kleiner als

$$\beta(1+\varepsilon) \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

denn erstens ist

$$\zeta_1 = \beta < \beta(1+\varepsilon), \quad \varphi_1 = \beta_2\beta + \beta_3\beta^2 + \cdots + \beta_m\beta^{m-1} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

und wenn die genannten Ungleichungen für $\zeta_2, \zeta_3 \ldots \zeta_\mu$ und $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_\mu$ erfüllt sind, wird zweitens

$$\zeta_{\mu+1}=\beta(1+\varphi_1+\varphi_1\varphi_2+\cdots+\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_\mu)<\beta\left(1+\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\cdots+\left(\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^\mu\right)$$
$$<\beta\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}=\beta\,(1+\varepsilon),$$

$$\varphi_{\mu+1}<2\beta_2\beta(1+\varepsilon)+3\beta_3\beta^2(1+\varepsilon)^2+\cdots+m\beta_m\beta^{m-1}(1+\varepsilon)^{m-1}<\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

d. h. die Ungleichungen gelten für jedes $\zeta_\mu$ und $\varphi_\mu$ und es ist auch:

$$\zeta'=\lim\zeta_\mu=\beta(1+\varphi_1+\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_2\varphi_3+\cdots)<\beta\,(1+\varepsilon).$$

Dann aber mufs in dem Bereiche, wo

$$|b|\leqq\beta,\quad |b_\nu|\leqq\beta_\nu\quad(\nu=2,3\ldots m)$$

die Reihe

$$z'=\lim z_\mu=b\,(1+f_1+f_1f_2+f_1f_2f_3+\cdots)$$

unbedingt und gleichmäfsig convergiren, denn die Differenz

$$z_{\mu+1}-z_\mu=g(z_\mu)-z_\mu=bf_1f_2\ldots f_\mu$$

kann dem absoluten Betrage nach kleiner gemacht werden als

$$\beta\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^\mu$$

und bei wachsendem $\mu$ kleiner als jede noch so kleine Gröfse $\delta$.

Substituirt man für die Gröfsen $f_\mu$ ihre Ausdrücke:

$$f_1=b_2b+b_3b^2+\cdots+b_mb^{m-1}$$
$$f_2=b_2'b+b_3'b^2+\cdots+b'_{m(m-1)}b^{m(m-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

welche alle ganze Functionen von $b$ sind, so folgt für $z'$ eine nach Potenzen von $b$ fortschreitende convergente Potenzreihe

$$z'=b\,\mathfrak{P}(b),$$

deren Coefficienten ganze Ausdrücke in $b_2, b_3, \ldots b_m$ mit ganzzahligen Coefficienten sind. $\mathfrak{P}(0)$ ist gleich 1, denn die Gleichung

$$z=b+b_2z^2+\cdots+b_mz^m$$

mufs durch $z'$ identisch erfüllt sein.

Jetzt ist nachgewiesen, dafs zum mindesten eine Wurzel einer Gleichung $f(z)=0$ durch Zahlengröfsen der eingeführten Art darstellbar ist und dann ist es auch jede andere. Es ist aber auch klar, dafs man aus der Gleichung

$$f(z)=\alpha_0z^m+\alpha_1z^{m-1}+\cdots+\alpha_{m-1}z+\alpha_m=Z$$

stets eine in gewissem Bereiche um $\alpha_m$ convergente Potenzreihe

$$z=\mathfrak{P}\,(Z-\alpha_m)$$

entwickeln kann, die für jeden innerhalb des Convergenzkreises liegenden

Werth $Z_0$ einen Werth $z_0$ gibt, welcher die Gleichung $f(z) - Z_0 = 0$ erfüllt; es mufs nur $|\alpha_{m-1}| > 0$ sein.

Ersetzt man $f(z)$ durch eine in der Umgebung $R$ der Stelle $z = 0$ convergente Potenzreihe

$$Z = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu z^\mu,$$

wo $\alpha_1$ von Null verschieden ist und bildet man

$$z = \frac{Z - \alpha_0}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} z^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} z^3 + \cdots\right),$$

so ist auch diese Gleichung durch eine für $Z = \alpha_0$ verschwindende convergente Potenzreihe

$$z = \mathfrak{P}(Z - \alpha_0)$$

identisch zu erfüllen, wenn nur die Coefficienten $-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_1} = b_\nu$ kleiner sind als die positiven Coefficienten $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_\nu, \ldots$ einer absolut convergenten Reihe, indem dann gewifs eine Gröfse $\beta$ so bestimmbar ist, dafs

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \beta_\nu \beta^{\nu-1} (1 + \varepsilon)^{\nu-1} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

wird. Die Reihe $\mathfrak{P}(Z - \alpha_0)$ convergirt dann sicher in dem Bereiche, wo

$$\left|\frac{Z - \alpha_0}{\alpha_1}\right| < \beta\,(1 + \varepsilon)$$

ist.

Die Coefficienten $b_2, b_3, \ldots$ werden aber zweifellos die gestellte Bedingung erfüllen, weil $|Z|$ für alle Werthe $|z| = r < R$ ein Maximum $g$ hat und

$$|\alpha_\mu| \leq g r^{-\mu}.$$

Damit, dafs eine Reihe $\mathfrak{P}(Z - \alpha_0)$ existirt, ist noch nicht gesagt, dafs die gegebene Reihe an einer Stelle $z'$ ihres Convergenzbereiches verschwindet, denn die Stelle $Z = 0$ braucht nicht in dem Convergenzkreise der Reihe für $z$ zu liegen. Es kann somit auch ganze transcendente Functionen geben, die für keinen endlichen Werth der Variabeln verschwinden, und in der That haben wir eine solche in der Function $E(x)$ bereits kennen gelernt.

Gehen wir nun wieder auf das durch eine Gleichung

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

definirte algebraische Gebilde mit der Stelle $(b_\mu, a_1, a_2, \ldots a_n)$ zurück und setzen fest, dafs in

$$G(b_\mu + \eta_\mu, a_1 + \xi_1, \ldots a_n + \xi_n) = \sum_{\mu=0}^{m} \varphi_\mu(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)\, \eta_\mu^{m-\mu} = 0$$

$\varphi_{m-1}(0, 0, \ldots 0)$ von Null verschieden sei, so läfst sich in der Umgebung der Stelle $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$ ein Bereich angeben, wo

die Quotienten $-\frac{\varphi_\mu}{\varphi_{\mu-1}}$ durch convergente Potenzreihen

$$\overline{\mathfrak{P}}_{m-\mu}(\xi_1, \xi_2 \,..\, \xi_n)$$

darstellbar sind. Dann werden aber die Coefficienten des Ausdruckes:

$$\eta_\mu = \overline{\mathfrak{P}}_0(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) + \overline{\mathfrak{P}}_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)\eta_\mu^2 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)\eta_\mu^m$$

in einem hinlänglich kleinem Bereiche um die Stelle $(\xi) = 0$ auch die Bedingungen erfüllen, welche für eine convergente Entwicklung

$$\eta_\mu = \mathfrak{P}_\mu(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

nothwendig sind. $\mathfrak{P}_\mu(0, 0, \ldots 0)$ ist wieder gleich $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, 0 \ldots 0)$, d. i. Null.

Ist endlich unter

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

eine in der Umgebung $R$ einer Stelle $(b, a_1, a_2, \ldots a_n)$ convergente Potenzreihe verstanden, die an dieser Stelle verschwindet und hat der Coefficient von $y - b$ nicht die Nullstelle $(a)$, so geht aus der Gleichung $G = 0$ wieder eine zweite der Form

$$\eta - \mathfrak{P}_0(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) - \mathfrak{P}_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\eta^2 - \mathfrak{P}_3(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\eta^3 - \cdots = 0$$

hervor, wo die Potenzreihen $\mathfrak{P}$ einen gemeinsamen Convergenzradius $r$ besitzen und $\eta$ die Werthe annehmen kann, deren Betrag kleiner ist als $R$.

Offenbar gibt es auch hier eine die letzte Gleichung identisch erfüllende Potenzreihe

$$\eta = \mathfrak{P}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n).$$

## § 38. Darstellung des algebraischen Gebildes.

Wissen wir einmal, dafs eine Gleichung

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

in der Umgebung einer regulären d. h. endlichen und einfachen Stelle $(b_\mu, a_1, a_2, \ldots a_n)$ durch eine bestimmte Potenzreihe

$$y - b_\mu = \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \,|\, (a))$$

identisch zu erfüllen ist, so können wir zur Ermittelung derselben die Methode der unbestimmten Coefficienten verwenden, d. h. wir substituiren in der gegebenen Gleichung eine Potenzreihe

$$y = b_\mu + \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(x_1 - a_1)^{\mu_1}(x_2 - a_2)^{\mu_2} \ldots (x_n - a_n)^{\mu_n}$$

und bestimmen die Coefficienten derart, dafs die Gleichung identisch besteht.

Ist z. B. die Gleichung

$$y^2 - (1+x)^n = 0$$

vorgelegt, in welcher $n$ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und beachten wir, daſs $(x=0,\ y=1)$ eine Stelle des algebraischen Gebildes ist, schreiben die Gleichung in der oben gebrauchten Form:

$$\bigl(2(y-1)-nx\bigr)+\Bigl((y-1)^2-\frac{n(n-1)}{2}x^2\Bigr)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3-\cdots$$
$$-x^n=0$$

und setzen

$$y-1=x\mathfrak{P}(x)=x\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu,$$

$$(y-1)^2=x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_0c_\nu+c_1c_{\nu-1}+c_2c_{\nu-2}+\cdots+c_\nu c_0)x^\nu$$

in der letzten Gleichung ein, so gibt eine einfache Rechnung für den Coefficienten $c_\nu$ den Ausdruck:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-\nu\right)}{1\,.\,2\,.\;\ldots\;(\nu+1)}.$$

Dieser Ausdruck ist aus $\frac{n}{2}$ gerade so zusammengesetzt, wie der $(\nu+1)^{\text{te}}$ Binominalcoefficient $\binom{n}{\nu+1}$ oder $(n)_{\nu+1}$ aus $n$, darum führen wir für $c_\nu$ die entsprechende Bezeichnung $\binom{\frac{n}{2}}{\nu+1}$ oder $\left(\frac{n}{2}\right)_{\nu+1}$ ein, und die Entwicklung der Gröſse $y$ in einer Umgebung der Stelle $(x=0,\ y=1)$ lautet:

$$y=1+\left(\frac{n}{2}\right)_1x+\left(\frac{n}{2}\right)_2x^2+\cdots$$

In der Umgebung der Stelle $(x=0,\ y=-1)$ folgt

$$y=-\left(1+\left(\frac{n}{2}\right)_1x+\left(\frac{n}{2}\right)_2x^2+\cdots\right).$$

Die gefundenen Reihen besagen, solange sie eine Giltigkeit haben, was man unter der zweiten Wurzel aus dem Ausdruck $(1+x)^n$ zu verstehen hat, und man schreibt:

$$y=\pm\sqrt{(1+x)^n}=\pm\left(1+\left(\frac{n}{2}\right)_1x+\left(\frac{n}{2}\right)_2x^2+\cdots\right)=\pm(1+x)^{\frac{n}{2}}.$$

Die Potenzreihe $y=b+\mathfrak{P}\bigl(x_1,\,x_2,\,\ldots\,x_n\,|\,(a)\bigr)$ können wir noch auf Grund einer anderen Bemerkung aufstellen. Weil $y$ in der Umgebung einer Stelle $(a)$, die weder Unendlichkeitsstelle eines Coefficienten der Gleichung:

$$y^m + \sum_{\mu=1}^{m} y^{m-\mu} f_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

noch Nullstelle der Discriminante $D(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist, durch eine convergente Potenzreihe dargestellt wird, besitzt $y$ an der Stelle $(a)$ Ableitungen aller Ordnungen nach den Variabeln $x_\nu$. Wenn wir diese Ableitungen aus der Gleichung $G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ selbst ablesen können, dürfen wir dann

$$y - b_\mu = \mathfrak{P}\big(x_1, x_2, \ldots x_n|(a)\big) =$$
$$= \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty}{}' \left(\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_n} y}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}\right) \frac{(x_1 - a_1)^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{(x_2 - a_2)^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdots \frac{x_n - a_n)^{\mu_n}}{\mu_n!}$$

setzen.

Was diese Ableitungen betrifft, so sind diese wirklich leicht zu finden. Ist zunächst $G(y, x) = 0$ die vorgegebene Gleichung, und denken wir hierin $y$ durch die ihr genügende Potenzreihe $b + \mathfrak{P}(x|a)$ ersetzt, so ist die Differentialänderung der convergenten Potenzreihe $G\big(b + \mathfrak{P}(x|a), x\big)$

$$dG(y, x) = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy$$

identisch Null und demnach

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

Aus den Gleichungen

$$d^2G(y, x) =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) dy dy + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) d^2 y = 0,$$

$$d^3G(y, x) =$$
$$= \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} dy^3$$
$$+ 3 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} dx\, d^2 y + 3 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} dy\, d^2 y + \frac{\partial G}{\partial y} d^3 y = 0,$$

usw. folgt dann:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}} \cdot \left\{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{dy}{dx}\right) + 3 \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right.$$
$$\left. + 3 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) \frac{d^2 y}{dx^2}\right\}.$$

Es ist ersichtlich, daſs

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}\right) \text{ und } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \text{ ist usw.}$$

Ist die gegebene Gleichung $G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, so wird

$$dG = \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_\nu}\,dx_\nu = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_\nu} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x_\nu}}{\frac{\partial G}{\partial y}},$$

$$d^2G = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\,dx_\mu dx_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\nu \partial y}\,dx_\nu dy$$
$$+ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy^2 = 0 \quad \text{usw.}$$

Wendet man diese Methode zur Bestimmung der um die Stelle $(x = 0, y = 1)$ des Gebildes

$$y^m - (1 + x)^n = 0$$

giltigen Entwicklung für $y$ an, so geht die Potenzreihe

$$y = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\frac{x^2}{1.2} + \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\left(\frac{n}{m} - 2\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

hervor und weil der Coefficient von $x^\nu$

$$\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\left(\frac{n}{m} - 2\right)\cdots\left(\frac{n}{m} - \nu + 1\right)}{1.2.3\ldots\nu}$$

wieder die Form des $\nu^{\text{ten}}$ Binomialcoefficienten einer ganzen Zahl $\frac{n}{m}$ hat, schreiben wir auch in dem Falle der gebrochenen Zahl $\frac{n}{m}$:

$$y = \sqrt[m]{(1+x)^n} = (1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \left(\frac{n}{m}\right)_1 x + \left(\frac{n}{m}\right)_2 x^2 + \left(\frac{n}{m}\right)_3 x^3 + \cdots.$$

Sind $\varepsilon = 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m$ die $m$ Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^m = 1$, so sind die $x = 0$ zugehörigen $y$-Werthe $\varepsilon_\mu$ $(\mu = 1, 2 \ldots m)$, und die Darstellung der $m$-deutigen Gröſse $y$ in der Umgebung der Stelle $(x = 0, y = \varepsilon_\mu)$ lautet:

$$y = \varepsilon_\mu\left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)_1 x + \left(\frac{n}{m}\right)_2 x^2 + \cdots\right) = \varepsilon_\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)_\nu x^\nu,$$

wo nun auch die Bezeichnung $\left(\frac{n}{m}\right)_0 = 1$ benutzt ist.

Bildet man die $m^{\text{te}}$ Wurzel der $n_1^{\text{ten}}$ und $n_2^{\text{ten}}$ Potenz von $(1 + x)$ in der Umgebung derselben Stelle $(x = 0, y = 1)$, so läſst sich durch Multiplication oder Division der diese Wurzeln darstellenden Potenzreihen leicht der Satz beweisen:

$$(1 + x)^{\frac{n_1}{m}}(1 + x)^{\frac{n_2}{m}} = (1 + x)^{\frac{n_1 + n_2}{m}},$$

respective

$$\frac{(1+x)^{\frac{n_1}{m}}}{(1+x)^{\frac{n_2}{m}}} = (1+x)^{\frac{n_1-n_2}{m}},$$

d. h. für die gebrochenen Potenzen gelten dieselben formalen Rechnungsgesetze wie für die ganzzahligen Potenzen. Wenn diese Beziehungen zunächst in einem Bereiche um die Stelle $x = 0$ (welcher der Werth 1 zugeordnet ist) erkannt sind, gelten sie auch für die aus den primitiven Elementen auf gleichem Wege abgeleiteten Fortsetzungen, die schliefslich den ganzen Stetigkeitsbereich der $m$-deutigen Potenzen umfassen.

Wir werden später die allgemeine Potenz zu untersuchen haben; hier sollte nur darauf aufmerksam gemacht werden, dafs wir die Potenzen mit rationalen Exponenten bereits behandeln können und wir stehen nicht an, ihre Regeln schon hier zu verwenden. Es mag nur noch bemerkt werden, was für eine Eigenthümlichkeit das algebraische Gebilde aufweist, wenn in

$$y^m - (a+x)^n = 0 \quad \text{oder} \quad y^m - a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = 0$$

die ganzen Zahlen $m$ und $n$ einen gemeinsamen Theiler $k$ besitzen.

Es sei $m = m_1 k$ und $n = n_1 k$, dann wird die Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$, $y = \sqrt[m]{a^n} = A = \sqrt[m_1]{a^{n_1}}$:

$$y = A\left(1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)_1\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)_2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right) = A\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{n_1}{m_1}},$$

sie stimmt also dort vollständig mit der aus der Gleichung

$$y^{m_1} - A_1^{m_1}\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{n_1} = 0$$

entspringenden Entwicklung überein, und jede Fortsetzung dieser letzteren genügt auch der ersten Gleichung, die reductibel sein mufs. Wenn man also $y$ als die $\left(\frac{n}{m}\right)^{\text{te}}$ Potenz auffafst, ist $y$ nur $m_1$-deutig. —

Gehören zu einer endlichen Stelle $x = a$ zufolge der algebraischen Gleichung

$$G(y, x) = f_0(x)y^m + f_1(x)y^{m-1} + \cdots + f_m(x) = 0$$

$m$ endliche und von einander verschiedene Werthe $y = b_1, b_2, \ldots b_m$ und sind die Umgebungen der $m$ Stellen $(x = a,\ y = b_\mu)$ durch

$$y = b_\mu + (x-a)\,\mathfrak{P}_\mu(x-a) = \mathfrak{P}^{(\mu)}(x|a)$$

dargestellt, so folgt leicht, dafs der Convergenzradius keines der aufgestellten Elemente $\mathfrak{P}^{(\mu)}(x|a)$ kleiner sein kann als $|c - a|$, wenn $c$ die der Stelle $a$ nächstliegende Nullstelle der Function $f_0(x)$ oder der Discriminante $D(x)$ bedeutet. Denn andernfalls könnte man in der

Umgebung jeder Stelle $x_0$, welche auf der Begrenzung des kleinsten der Convergenzkreise unserer Elemente liegt, $m$ Potenzreihen

$$y = \overline{\mathfrak{P}}^{(\mu)}(x|x_0)$$

aufstellen, weil daselbst die für eine solche Entwicklung nothwendigen Bedingungen erfüllt sind. Allen Stellen $x_1$, welche dem gemeinsamen Convergenzbereiche dieser und der ursprünglichen Elemente angehören, lassen sich dann $2m$ Reihen

$$\mathfrak{P}^{(\mu)} x|a, x_1) \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{P}}^{(\mu)}(x|x_0, x_1)$$

zuordnen, die aber paarweise übereinstimmen müssen, weil es nur $m$ Reihen geben kann, welche einem Werthe $x_1$ $m$ der Gleichung $G(y, x) = 0$ genügende $y$-Werthe zuweisen. Dann aber kann $x_0$ keine singuläre Stelle eines der gegebenen Elemente $\mathfrak{P}^{(\mu)}(x|a)$ sein, und man sieht, dafs in der Umgebung der nächsten Grenzstelle nicht $m$ sondern weniger Potenzreihen existiren können, und dieselbe als Nullstelle von $f_0$ oder $D$ zu definiren ist.

Bei der allgemeinen binomischen Gleichung

$$y^m f_0(x) + f_m(x) = 0$$

sind die Nullstellen der ganzen Functionen $f_0(x)$ und $f_m(x)$ die im Endlichen gelegenen singulären Stellen der allenthalben aufzustellenden Elemente für $y$. Sind die Coefficienten $f_0, f_1, \dots f_m$ ganze transcendente Functionen, so können diese in einem endlichen Bereiche nicht unendlich viele Nullstellen besitzen, sonst müfsten sie ja in der Umgebung einer Häufungsstelle für unendlich viele Werthe Null und dann identisch Null sein. Darum aber läfst sich für Gleichungen $G(x, y) = 0$, deren Coefficienten ganze transcendente Functionen sind, der Satz über den gemeinsamen Convergenzbereich $m$ simultaner Elemente um eine Stelle $a$ ebenso aussprechen wie früher; er enthält alle Stellen, die $a$ näher liegen als die nächste Nullstelle von $f_0(x)$ oder $D(x)$.

Andere Vorkommnisse wird man später leicht beurtheilen, wenn die Darstellung eindeutiger Functionen mit beliebigen singulären Stellen bekannt ist. —

Enthält die gegebene Gleichung mehrere unabhängige Variable $x_1, x_2, \dots x_n$ und ist $(a)$ eine Stelle, in deren Umgebung $m$ Elemente

$$y = \mathfrak{P}^{(\mu)}(x_1, x_2, \dots x_n | (a))$$

existiren, so kann eine Stelle $(x^{(0)})$ nur dann auf dem wahren gemeinsamen Convergenzbereiche dieser Reihen liegen, wenn es unter den den Bedingungen

$$|x_\nu - a_\nu| = |x_\nu^{(0)} - a_\nu|$$

gehorchenden Stellen $(x)$ mindestens eine gibt, die zu jenen singulären gehört, welche bei Entwicklung der Elemente ausgeschlossen werden mufsten.

Die simultanen Fortsetzungen simultaner Elemente werden nach einem früheren Satze dieselbe Gleichung erfüllen wie diese und in ihrem gemeinsamen Convergenzbereiche geben sie alle Werthe $y$, deren diese Gröſse daselbst fähig ist, d. h. es gibt in dem Convergenzbereiche von $m$ Reihen

$$y = \mathfrak{P}^{(\mu)}(x_1, x_2, \dots x_n | (a))$$

keine Stelle $(x')$, der zufolge der Gleichung

$$G(y, x_1, x_2, \dots x_n) = f_n + y f_{n-1} + y^2 f_{n-2} + \cdots + f_0 y^n = 0$$

andere Werthe für $y$ zugehören, als diejenigen, welche eben die Reihen liefern.

Gäbe es neben den aus den Reihen entspringenden Werthen $y_1'$, $y_2', \dots y_m'$ noch einen zu der Stelle $(x')$ gehörigen Werth $y'$, und setzt man

$$x_\nu = x_\nu' + \xi_\nu', \quad y = y_\mu' + \eta_\mu', \quad y = y_\mu' + \eta',$$

so entstehen die $(m+1)$ Gleichungen

$$\varphi_m(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') + \eta_\mu \varphi_{m-1}(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') + \cdots + \eta_\mu^m \varphi_0(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots m),$$

$$\varphi_m(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') + \eta' \varphi_{m-1}(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') + \cdots + \eta'^m \varphi_0(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') = 0.$$

Die Subtraction ergibt:

$$(\eta_\mu - \eta')\varphi_{m-1} + (\eta_\mu^2 - \eta'^2)\varphi_{m-2} + \cdots + (\eta_\mu^m - \eta'^m)\varphi_0 = 0,$$

und weil man bei ungleichem $\eta_\mu$ und $\eta'$ durch $\eta_\mu - \eta'$ dividiren kann, folgt auch

$$\varphi_{m-1} + (\eta_\mu + \eta')\varphi_{m-2} + \cdots + (\eta_\mu^{m-1} + \eta_\mu^{m-2}\eta' + \cdots + \eta'^{m-1})\varphi_0 = 0.$$

Doch diese Gleichung kann nicht bestehen, indem die Coefficienten von $(\eta_\mu + \eta')$, $(\eta_\mu^2 + \eta_\mu\eta' + \eta'^2)$ usw. mit $\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n'$ beliebig klein werden und $\varphi_{m-1}\ (0, 0 \dots 0)$ von Null verschieden ist, weil ja in einer Umgebung von $(x')$ $m$ Reihen aufzustellen sind. Die Annahme war also unrichtig und der Satz erscheint bewiesen. —

Jetzt ist auch die in dem zweiten Capitel angeregte Frage nach der Continuität einer ganzen rationalen Function $f(z)$ dahin zu beantworten: Weil die ganze Function jeden Werth annimmt und die einem ersten für $z = a$ hervorgehenden Werthe $A$ benachbarten Functionswerthe für solche Argumente $z$ entspringen, die nur durch eine Potenzreihe gegeben werden, so ist die ganze rationale Function continuirlich.

## § 39. **Fortsetzung.**

Wir setzen nunmehr voraus, daſs die algebraische Gleichung (mit rationalen Coefficienten) $G(\overset{(m)}{y}, \overset{(n)}{x}) = 0$ in der Umgebung einer Stelle $(b, a)$ nicht die vollständige Form

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\eta + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\xi + (\eta, \xi)_2 + (\eta, \xi)_3 + \cdots = 0$$

besitze, sondern dafs hierin

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \ldots \frac{\partial^{\mu-1} G}{\partial x^{\mu-1}}$$

an der Stelle $(x = a,\ y = b)$ verschwinden. Ist immer noch $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$ von Null verschieden, so werden die oben aufgestellten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}}$$

an der Stelle $(x = a,\ y = b)$ Null sein, und die oben benützte Entwicklungsform

$$y - b = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right) \cdot \frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!}$$

erhält die Gestalt

$$y = b + (x-a)^\mu \mathfrak{P}_1(x|a). \text{ —}$$

Ist $y = \beta$ keine Nullstelle der Discriminante der Gleichung $G(y, x) = 0$ mit der unabhängigen Variabeln $y$ und keine Nullstelle des Coefficienten von $x^n$ in der nach $x$ geordneten Gleichung (mit ganzen Functionen von $y$ als Coefficienten), so können wir in der Umgebung einer Stelle $(y = \beta,\ x = \alpha)$ eine Potenzreihe

$$x = \alpha + (y-\beta)^\lambda \mathfrak{P}_2(y|\beta)$$

ableiten, sofern $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{\alpha,\beta}$ von Null verschieden ist.

Jenachdem wir also $x$ oder $y$ als unabhängige Variable ansehen, folgt in der Umgebung einer nicht singulären Stelle $(a, b)$ resp. $(b, a)$ eine Entwicklung der Gestalt

$$x - a = t, \quad y - b = t^\mu \mathfrak{P}_1(t)$$

oder

$$y - b = t, \quad x - a = t^\lambda \mathfrak{P}_2(t),$$

wo $t$ eine neue Variable bedeutet.

Substituirt man an Stelle der Variabeln $t$ eine in der Umgebung der Stelle $u = 0$ verschwindende convergente Potenzreihe

$$t = \alpha_1 u + \alpha_2 u + \cdots,$$

so besteht in der Umgebung jeder endlichen Stelle $(a, b)$, an welcher $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ nicht gleichzeitig Null sind, eine Darstellung des algebraischen Gebildes in der Form:

$$x = a + u\,\mathfrak{P}_1(u), \quad y = b + u\,\mathfrak{P}_2(u),$$

wo $\mathfrak{P}_1(u)$ und $\mathfrak{P}_2(u)$ gewöhnliche Potenzreihen sind. — Beschränkt man die neue unabhängige Variable $u$ auf den Bereich, wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ convergiren, so gehört zu jeder Stelle $u$ ein Werth $t$ und ein Werthe-

paar $(x, y)$, und verschiedenen Werthen $u_1$, $u_2$ entsprechen verschiedene Werthepaare, wenn nur $|\alpha_1|$ von Null verschieden ist, denn dann werden $u_1$ und $u_2$ verschiedene Werthe $t_1$ und $t_2$ zuzuordnen sein. Wäre nämlich $t_1 = t_2$, so müſste in

$$t_1 - t_2 = (u_1 - u_2)\,\big(\alpha_1 + \alpha_2(u_1 + u_2) + \alpha_3(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) + \cdots\big)$$

der absolute Betrag von

$$\alpha_1 + \alpha_2(u_1 + u_2) + \cdots$$

verschwinden, und das geht bei der über $|\alpha_1|$ gemachten Annahme nicht an.

Setzt man an Stelle von $u$ eine neue Potenzreihe mit der unabhängigen Variabeln $v$: $u = \mathfrak{P}(v)$, nimmt an, daſs $\mathfrak{P}(0)$ verschwindet und der Coefficient von $v$ von Null verschieden ist, auf daſs

$$u = \beta_1 v + \beta_2 v^2 + \cdots$$

gilt, so folgt eine neue Darstellung:

$$x = a + \overline{\mathfrak{P}}_1(v), \quad y = b + \overline{\mathfrak{P}}_2(v).$$

Jedem Werthe $v$ aus dem Convergenzbereiche der Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2$ gehört ein Werthepaar $(x, y)$ und verschiedenen Werthen $v_1$ und $v_2$ gehören verschiedene Werthepaare $(x, y)$ an, denn bei der gemachten Voraussetzung können die entsprechenden $u$-Werthe nicht gleich sein.

Auf die genannte Art läſst sich demnach ein Element des algebraischen Gebildes durch unendlich viele Paare von Potenzreihen darstellen; es ist nur zu zeigen, daſs die einem *Functionenpaare*

$$x = a + u\,\mathfrak{P}_1(u), \quad y = b + u\,\mathfrak{P}_2(u)$$

entspringenden Werthepaare $(x, y)$ einer hinlänglich kleinen Umgebung von $u = 0$ identisch sind mit den aus einem zweiten Functionenpaare

$$x = a + v\,\overline{\mathfrak{P}}_1(v), \quad y = b + v\,\overline{\mathfrak{P}}_2(v)$$

hervorgehenden Werthen für $x$ und $y$, wenn man $v$ wieder in hinlänglich kleinem Bereiche um die Stelle $v = 0$ erhält.

Setzt man

$$x - a = a_0 u^\mu + a_1 u^{\mu+1} + \cdots, \quad y - b = b_0 u^\nu + b_1 u^{\nu+1} + \cdots$$

und leitet einen der $\mu$ Werthe von $\sqrt[\mu]{\frac{x-a}{a_0}}$ — er heiſse $X_\mu$ — durch die Entwicklung von

$$\sqrt[\mu]{u^\mu\left(1 + \frac{a_1}{a_0}u + \frac{a_2}{a_0}u^2 + \cdots\right)}$$

oder

$$u\sqrt[\mu]{1 + \left\{\frac{a_1}{a_0}u + \frac{a_2}{a_0}u^2 + \cdots\right\}}$$

ab, bestimmt hierauf die der Reihe

$$X_\mu = u + a_2' u^2 + a_3' u^3 + \cdots \tag{$\alpha$}$$

identisch genügende Reihe

$$u = \mathfrak{P}_1^{(1)}(X_\mu) = \mathfrak{P}_1^{(1)}\left(\left(\frac{x-a}{a_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right) \tag{$\beta$}$$

oder kehrt — wie man sagt — die Reihe ($\alpha$) um, so wird die Reihe ($\beta$) die Gleichung $x - a = u\mathfrak{P}_1(u)$ identisch erfüllen. Durch Substitution der $\mu$ Reihen ($\beta$) in die Gleichung $y - b = u\mathfrak{P}_2(u)$ ordnet man andrerseits den $\mu$ Werthen von $\sqrt[\mu]{\frac{x-a}{a_0}}$ $\mu$ Werthe $y$ zu, denn in

$$b_0\left(\mathfrak{P}_1^{(1)}\left(\left(\frac{x-a_1}{a_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)\right)^{\nu} + b_1\left(\mathfrak{P}_1^{(1)}\left(\left(\frac{x-x_1}{a_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)\right)^{\nu+1} + \cdots$$

können nicht alle Potenzen von $\left(\frac{x-a_1}{a_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, die mit $\mu$ keinen Theiler gemein haben, verschwinden, denn sonst würden verschiedenen $u$-Werthen gleiche Werthepaare $(x, y)$ entsprechen können. Man sieht also, dafs einem Werthe von $x$ in der Nähe von $a$ $\mu$ der Stelle $b$ benachbarte Werthe $y$ zugehören, und ebenso gehören einem Werthe $y$ $\nu$ der Stelle $a$ benachbarte Werthe $x$ zu.

Ist andrerseits

$$x - a = A_0 v^{\mu'} + A_1 v^{\mu'+1} + \cdots,\quad y - b = B_0 v^{\nu'} + B_1 v^{\nu'+1} + \cdots,$$

so entsprechen einem Werthe $x$ in der Reihe von $a$ $\mu'$ Werthe $y$ und einem Werthe $y$ $\nu'$ Werthe von $x$. Das ist nicht anders möglich als wenn

$$\mu = \mu', \quad \nu = \nu'$$

ist, da einem $x$- oder $y$-Werthe nur eine bestimmte Anzahl von $y$- oder $x$-Werthen zugehören kann. Ferner lehrt ein ähnlicher Schlufs wie früher, dafs die Werthepaare $(x, y)$ aus den beiden Functionenpaaren gleich sein müssen, d. h. solange $u$ und $v$ zufolge der Beziehung

$$u = \beta_1 v + \beta_2 v^2 + \cdots$$

um beliebig wenig von einander abweichen, können die zugehörigen Werthe $x_1$ und $x_2$ nicht verschieden ausfallen.

Umgekehrt sieht man, dafs die zweien Functionenpaaren entsprechenden unendlich kleinen Werthe für $(x - a)$ und $(y - b)$ nur übereinstimmen können, wenn $u$ und $v$ durch eine Gleichung

$$u = \beta_1 v + \beta_2 v^2 + \cdots \quad (|\beta_1| > 0)$$

oder

$$v = \beta_1' u + \beta_2' u^2 + \cdots \quad (|\beta_1'| > 0)$$

verbunden sind. —

Wir haben nun gelernt, wie man das algebraische Gebilde an jenen endlichen Stellen darstellt, wo die Discriminante $D_1(x)$ oder $D_2(y)$ verschwindet, jenachdem man $x$ oder $y$ als die unabhängige Variable betrachtet, doch war vorausgesetzt, dafs an diesen Verzweigungsstellen

von $y(x)$ oder $x(y)$ $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$ respective $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$ nicht verschwindet. Dann konnte $y$ oder $x$ nach gebrochenen Potenzen von $(x-a)$ oder $(y-b)$ entwickelt werden oder es existirte ein Functionenpaar

$$x - a = \mathfrak{P}_1(u), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(u),$$

wo die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ nicht beide mit Gliedern ersten Grades beginnen.

Wir setzen nun auch voraus, dafs die ganze Function $G(x, y)$ in der Umgebung einer im Endlichen gelegenen Nullstelle $(a, b)$ die Form besitze:

$$G(a+\xi, b+\eta) = (\xi, \eta)_\mu + (\xi, \eta)_{\mu+1} + \cdots + (\xi, \eta)_m + \cdots,$$

wo $(\xi, \eta)_\nu$ wieder die Gesammtheit der Glieder $\nu^{\text{ter}}$ Dimension bezeichnet. Es sollen also die beiden Gröfsen

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$$

verschwinden und die Glieder niedrigster Dimension, welche nicht Null sind, seien Glieder $\mu^{\text{ter}}$ Dimension. Wir können voraussetzen, dafs die Coefficienten von $\xi^\mu$ und $\eta^\mu$, d. i.

$$\left(\frac{\partial^\mu G}{\partial x^\mu}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^\mu G}{\partial y^\mu}\right)$$

nicht Null sind, denn andernfalls führt eine homogene lineare Substitution

$$\xi = a_{11}\xi' + a_{12}\eta', \quad \eta = a_{21}\xi' + a_{22}\eta'$$

auf eine Darstellung von $G(a+\xi', b+\eta')$, in welcher die Coefficienten von $\xi'^\mu$ und $\eta'^\mu$ nicht verschwinden. In der That folgt ja aus der Existenz eines Gliedes $\mu^{\text{ter}}$ Dimension

$$\left(\frac{\partial^\mu G}{\partial x^{\mu-\nu}\partial y^\nu}\right)\frac{\xi^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}\,\frac{\eta^\nu}{\nu!} = \left(\frac{\partial^\mu G}{\partial x^{\mu-\nu}\partial y^\nu}\right)\frac{(a_{11}\xi'+a_{12}\eta')^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}\,\frac{(a_{21}\xi'+a_{22}\eta')^\nu}{\nu!}$$

das Vorhandensein nicht verschwindender Coefficienten von $\xi'^\mu$ und $\eta'^\nu$.

Zerlegt man die homogene Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades $(\xi, \eta)_\mu$ in das Product ihrer Primfactoren:

$$(\xi, \eta)_\mu = C(\beta_1\xi - \alpha_1\eta)^{\mu_1}(\beta_2\xi - \alpha_2\eta)^{\mu_2}\ldots(\beta_r\xi - \alpha_r\eta)^{\mu_r},$$

indem man zunächst $\frac{\xi}{\eta} = \zeta$ setzt, dann

$$(\xi, \eta)_\mu = \eta^\mu(\zeta)_\mu = \eta^\mu c \prod_{\varrho=1}^{r}(\zeta - \zeta_\varrho)^{\mu_\varrho}$$

bildet und endlich

$$\zeta_\varrho = \frac{\alpha_\varrho}{\beta_\varrho}, \quad C = c\beta_1^{-\mu_1}\beta_2^{-\mu_2}\ldots\beta_r^{-\mu_r}$$

substituirt, und wählt man nach der Zerlegung entsprechend den $r$ Gröfsenpaaren $\alpha_\varrho, \beta_\varrho$ $r$ Gröfsenpaare $a_\varrho\, b_\varrho$ derart, dafs

$$a_\varrho \beta_\varrho - b_\varrho \alpha_\varrho = 1 \quad \text{und} \quad |a_\varrho \beta_{\varrho'} - b_\varrho \alpha_{\varrho'}| > 0$$

wird, so kann man $r$mal zwei Gröſsen $\bar{\xi}_\varrho$ und $\bar{\eta}_\varrho$ durch die Gleichungen

$$\xi = (-\alpha_\varrho + a_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho, \quad \eta = (-\beta_\varrho + b_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho$$

definiren, aus denen

$$\bar{\xi}_\varrho = b_\varrho \xi - a_\varrho \eta, \quad \bar{\eta}_\varrho = \frac{\beta_\varrho \xi - \alpha_\varrho \eta}{b_\varrho \xi - a_\varrho \eta}$$

resultirt. In den neuen Gröſsen $\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho$ erhält die Function $(\xi, \eta)_\mu$ die Gestalt:

$$(\xi, \eta)_\mu = \bar{\xi}_\varrho^\mu \bar{\eta}_\varrho^{\mu_\varrho} C \prod_{\varrho'=1}^{r}{}' (\beta_\varrho \alpha_{\varrho'} - \alpha_\varrho \beta_{\varrho'} - \bar{\eta}_\varrho (b_\varrho \alpha_{\varrho'} - a_\varrho \beta_{\varrho'}))^{\mu_{\varrho'}}$$

und es wird

$$G(a+\xi, b+\eta) = \bar{\xi}_\varrho^\mu \{ \bar{\eta}_\varrho^{\mu_\varrho} \psi_1(\bar{\eta}_\varrho) + \bar{\xi}_\varrho \psi_2(\bar{\eta}_\varrho) + \cdots \} = \bar{\xi}_\varrho^\mu g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho),$$

wo $g_\varrho$ eine ganze Function von $\bar{\xi}_\varrho$ und $\bar{\eta}_\varrho$ bezeichnet.*)

Wir behaupten nun, daſs die Gesammtheit der aus den $r$ Gleichungen

$$g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

entstandenen unendlich kleinen Werthepaare $(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$ mit Hilfe der diese Gröſsen definirenden Gleichungen gerade in die der ursprünglichen Gleichung $G(a+\xi, b+\eta) = 0$ genügenden unendlich kleinen Werthepaare zu transformiren sind, oder mit anderen Worten: daſs die letzten $r$ Gleichungen in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ der Gleichung $G(a+\xi, b+\eta) = 0$ äquivalent sind.

Da $g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$ keine von $\bar{\xi}_\varrho$ freien Glieder in $\bar{\eta}_\varrho$ enthält, die von niedrigerem als dem $\mu_\varrho^{\text{ten}}$ Grade sind, entsprechen einem unendlich kleinem Werthe von $\xi_\varrho$, $\mu_\varrho$ unendlich kleine Werthe $\eta_\varrho$, die wegen der Irreductibilität von $g_\varrho$ im Allgemeinen von einander verschieden ausfallen. Daher gehören zu unendlich kleinen Werthen $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots \bar{\xi}_r$

*) Man kann andrerseits die Gröſsen $a_\varrho$ und $b_\varrho$ so wählen, daſs $a_\varrho - \zeta_\varrho b_\varrho$ für ein von $\varrho$ verschiedenes $\varrho'$ von Null verschieden und $a_\varrho - \zeta_{\varrho'} b_\varrho = 1$ wird, und dann setze man

$$\xi = (-\zeta_\varrho + a_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho, \quad \eta = (-1 + b_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho$$

oder

$$\bar{\xi}_\varrho = b_\varrho \xi - a_\varrho \eta, \quad \bar{\eta}_\varrho = \frac{\xi - \zeta_\varrho \eta}{b_\varrho \xi - a_\varrho \eta},$$

so folgt

$$(\xi \eta)_\mu = \bar{\xi}_\varrho^\mu \bar{\eta}_\varrho^{\mu_\varrho} c \prod_{\varrho'=1}^{r}{}' (\zeta_{\varrho'} - \zeta_\varrho - \bar{\eta}_\varrho (\zeta_\varrho b_\varrho - a_\varrho))^{\mu_{\varrho'}}$$

und

$$G(a+\xi, b+\eta) = \bar{\xi}_\varrho^\mu g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho),$$

wo $g_\varrho$ ebenso wie $G(x, y)$ irreductibel sein muſs.

$\mu$ unendlich kleine Werthepaare $(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$ und die verschiedenen Gleichungen

$$g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho) = 0 \quad g_{\varrho'}(\bar{\xi}_{\varrho'}, \bar{\eta}_{\varrho'}) = 0$$

entnommenen Werthepaare geben von einander verschiedene Lösungen

$$\xi_1 = (-\alpha_\varrho + a_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho, \quad \eta_1 = (-\beta_\varrho + b_\varrho \bar{\eta}_\varrho)\bar{\xi}_\varrho$$

$$\xi_2 = (-\alpha_{\varrho'} + a_{\varrho'} \bar{\eta}_{\varrho'})\bar{\xi}_{\varrho'}, \quad \eta_2 = (-\beta_{\varrho'} + b_{\varrho'} \bar{\eta}_{\varrho'})\bar{\xi}_{\varrho'}$$

der Gleichung $G(a+\xi, b+\eta) = 0$. Setzt man nämlich voraus, daſs bei gleichen Werthen von $\bar{\xi}_\varrho$ und $\bar{\xi}_{\varrho'}$

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2$$

wird, so müſste bei den hier in Betracht kommenden unendlich kleinen Werthen von $\bar{\eta}_\varrho$ und $\bar{\eta}_{\varrho'}$

$$\alpha_\varrho = \alpha_{\varrho'}, \quad \beta_\varrho = \beta_{\varrho'}$$

sein, was gegen die angenommene Zerlegung von $(\xi, \eta)_\mu$ verstoſsen würde. Es gehen also aus den $r$ Gleichungen $g_\varrho = 0$ und den die Gröſsen $\bar{\xi}_\varrho$, $\bar{\eta}_\varrho$ mit $\xi$ und $\eta$ verbindenden Gleichungen wirklich $\mu$ unendlich kleine Werthepaare $\xi$, $\eta$ hervor, die der Gleichung

$$G(a + \xi, b + \eta) = 0$$

genügen. Weil aber diese Gleichung die Glieder $\xi^\mu$ und $\eta^\mu$ enthält, gehören umgekehrt zu einem Werthe $\xi$ $\mu$ unendlich kleine Werthe $\eta$ und $\mu_\varrho$ Werthepaare $\bar{\xi}_\varrho$, $\bar{\eta}_\varrho$. Jetzt ist die Äquivalenz des Systems von $r$ Gleichungen $g_\varrho = 0$ mit der gegebenen Gleichung für unendlich kleine Werthepaare $(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$ und $(\xi, \eta)$ evident.

Um nun $\eta$ als Function von $\xi$ darzustellen, benütze man — sofern $\left(\frac{\partial g_\varrho}{\partial \bar{\eta}_\varrho}\right)$ an der Stelle $\bar{\eta}_\varrho = 0$, $\bar{\xi}_\varrho = 0$ nicht verschwindet — die aus den Gleichungen $g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho) = 0$ hervorgehenden Potenzreihen:

$$\bar{\eta}_\varrho = \bar{\xi}_\varrho \mathfrak{P}_\varrho(\bar{\xi}_\varrho) \quad \text{oder} \quad \bar{\xi}_\varrho = t, \quad \bar{\eta}_\varrho = t\,\mathfrak{P}_\varrho(t).$$

Wenn demnach in der Zerlegung von $(\xi, \eta)_\mu$ $\mu$ von einander verschiedene Primfactoren $(\beta_\varrho \xi - \alpha_\varrho \eta)$ auftreten, gibt es in der Umgebung der Stelle $(x = a, y = b)$ des algebraischen Gebildes $G(x, y) = 0$ $\mu$ von einander verschiedene Functionenpaare:

$$\xi = \mathfrak{P}_1^{(\varrho)}(t), \quad \eta = \mathfrak{P}_2^{(\varrho)}(t)$$

oder

$$x - a = \mathfrak{P}_1^{(\varrho)}(t), \quad y - b = \mathfrak{P}_2^{(\varrho)}(t) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$$

und die Gesammtheit der aus denselben für hinlänglich kleine Werthe von $t$ entspringenden Werthepaare $(x, y)$ genügen der gegebenen Gleichung.

Die Stelle $(a, b)$ heiſst eine $\mu$·*elementige*, weil $\mu$ der $m$ Elemente für $y$ an der Stelle $x = a$ denselben Werth $b$ annehmen.

Gibt es hingegen ganze Functionen $g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$, in welchen das Glied niedrigsten Grades in $\bar{\eta}_\varrho$ $\bar{\eta}_\varrho^{\mu_\varrho}$ ist, so verfahre man mit der Gleichung

$$g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho) = (\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)_{\mu_\varrho} + (\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)_{\mu_\varrho+1} + \cdots = 0$$

ebenso wie früher mit $G(a+\xi, b+\eta) = 0$. Man zerlege die homogene ganze Function $(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho)$, welche die Glieder $\bar{\xi}_\varrho^{\mu_\varrho}$ und $\bar{\eta}_\varrho^{\mu_\varrho}$ wieder enthalten soll, in das Product ihrer Primfactoren:

$$C_\varrho \prod_{\pi=1}^{p} (\beta_{\varrho,\pi}\bar{\xi}_\varrho - \alpha_{\varrho,\pi}\bar{\eta}_\varrho)^{\mu_{\varrho,\pi}},$$

wo $\sum\limits_{\pi=1}^{p} \mu_{\varrho,\pi} = \mu_\varrho$ ist, wähle dann $p$ Gröfsenpaare $a_{\varrho,\pi}$, $b_{\varrho,\pi}$ derart, dafs

$$a_{\varrho,\pi}\beta_{\varrho,\pi} - b_{\varrho,\pi}\alpha_{\varrho,\pi} = 1, \quad |a_{\varrho,\pi}\beta_{\varrho,\pi'} - b_{\varrho,\pi}\alpha_{\varrho,\pi'}| > 0$$

wird, setze wieder

$$\bar{\xi}_\varrho = (-\alpha_{\varrho,\pi} + a_{\varrho,\pi}\bar{\eta}_{\varrho,\pi})\bar{\xi}_{\varrho,\pi}, \quad \bar{\eta}_\varrho = (-\beta_{\varrho,\pi} + b_{\varrho,\pi}\bar{\eta}_{\varrho,\pi})\bar{\xi}_{\varrho,\pi},$$

leite dann

$$g_\varrho(\bar{\xi}_\varrho, \bar{\eta}_\varrho) = (\bar{\xi}_{\varrho,\pi})^{\mu_\varrho} g_{\varrho,\pi}(\bar{\xi}_{\varrho,\pi}, \bar{\eta}_{\varrho,\pi})$$

ab, so wird das System der $p$ Gleichungen $g_{\varrho,\pi} = 0$ mit den neuen Variabeln $\bar{\xi}_{\varrho,\pi}$, $\bar{\eta}_{\varrho,\pi}$ der einen Gleichung $g_\varrho = 0$ in dem früheren Sinne äquivalent sein und es kann der Fall eintreten, dafs für $\bar{\eta}_{\varrho,\pi}$ eine an der Stelle $\bar{\xi}_{\varrho,\pi} = 0$ verschwindende Potenzreihe aufzustellen ist, die wieder die Existenz eines Functionenpaares

$$x - a = \mathfrak{P}_1^{(\varrho,\pi)}(t), \quad y - b = \mathfrak{P}_2^{(\varrho,\pi)}(t)$$

zur Folge hat.

Andernfalls mufs man die Transformationen der bisherigen Art fortsetzen, doch ist zu zeigen, dafs man nach einer endlichen Anzahl von Transformationen stets zu Gleichungen $g(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$ gelangt, welche die abhängige Variable $\bar{\eta}$ in der ersten Potenz enthalten.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dafs

$$(\xi, \eta)_\mu = C(\beta_1\xi - \alpha_1\eta)^{\mu_1}$$

sei, und schreiben wir die aufeinanderfolgenden Substitutionen in der übersichtlichen Form:

$$\begin{array}{lll}
\beta_1 a_1 - \alpha_1 b_1 = 1, & \xi = (-\alpha_1 + a_1\eta_1)\xi_1, & \eta = (-\beta_1 + b_1\eta_1)\xi_1 \\
\beta_2 a_2 - \alpha_2 b_2 = 1, & \xi_1 = (-\alpha_2 + a_2\eta_2)\xi_2, & \eta_1 = (-\beta_2 + b_2\eta_2)\xi_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_\nu a_\nu - \alpha_\nu b_\nu = 1, & \xi_{\nu-1} = (-\alpha_\nu + a_\nu\eta_\nu)\xi_\nu, & \eta_{\nu-1} = (-\beta_\nu + b_\nu\eta_\nu)\xi_\nu,
\end{array}$$

durch welche successive die Gleichungen

$$\begin{aligned}
G(a+\xi, b+\eta) &= \xi_1^{\mu_1} g_1(\xi_1, \eta_1) \\
g_1(\xi_1, \eta_1) &= \xi_2^{\mu_2} g_2(\xi_2, \eta_2) \\
&\cdots \\
g_{\nu-1}(\xi_{\nu-1}, \eta_{\nu-1}) &= \xi_\nu^{\mu_\nu} g_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)
\end{aligned}$$

hervorgehen, so mufs man beweisen, dafs die gewifs nicht zunehmenden Exponenten $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu$ nicht gleich bleiben können, sondern abnehmen und ein letzter den Werth Eins annehmen wird; dann enthält $g_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$ gewifs ein Glied erster Dimension. Wenn aber in

$$g_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu) = \gamma\xi_\nu + \delta\eta_\nu + (\xi_\nu, \eta_\nu)_2 + \cdots$$

$\delta = 0$ sein sollte, führt eine lineare Substitution

$$\xi_\nu = \xi'_\nu + c\eta'_\nu, \quad \eta_\nu = \eta'_\nu$$

auf eine Gleichung:

$$g'_\nu(\xi'_\nu, \eta'_\nu) = \gamma\xi'_\nu + c\gamma\eta'_\nu + (\xi'_\nu, \eta'_\nu)_2 + \cdots = 0,$$

der eine Potenzreihe:

$$\eta'_\nu = \xi'_\nu\,\mathfrak{P}(\xi'_\nu)$$

zu entnehmen ist. Weil ferner $\xi$ und $\eta$ rational durch $\xi'_\nu$ und $\eta'_\nu$ auszudrücken sind, existiren auch zwei Potenzreihen:

$$\xi = \mathfrak{P}_1(\xi'_\nu), \quad \eta = \mathfrak{P}_2(\xi'_\nu),$$

welche der Gleichung $G(a + \xi, b + \eta) = 0$ genügen.

Leitet man aus der Gleichung

$$G = \xi_1^{\mu_1} g_1(\xi_1, \eta_1)$$

die Relationen ab:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_1} = \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta_1} = \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \eta_1}$$

oder

$$\mu_1\xi_1^{\mu_1-1}g_1 + \xi_1^{\mu_1}\frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial G}{\partial \xi}(-\alpha_1 + a_1\eta_1) + \frac{\partial G}{\partial \eta}(-\beta_1 + b_1\eta_1)$$

$$\xi_1^{\mu_1}\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial G}{\partial \xi}a_1\xi_1 + \frac{\partial G}{\partial \eta}b_1\xi_1$$

und berechnet aus diesem Gleichungssysteme

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \left(b_1\mu_1 g_1 + b_1\xi_1\frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} + (\beta_1 - b_1\eta_1)\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}\right)\xi^{\mu_1-1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = -\left(a_1\mu_1 g_1 + a_1\xi_1\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1} + (\alpha_1 - a_1\eta_1)\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}\right)\xi^{\mu_1-1},$$

so erscheint $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial G}{\partial \eta}$ als homogene lineare Function von $\frac{\partial g_1}{\partial \xi_1}$ und $\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}$. Drückt man wieder $g_1$ und die ersten partiellen Ableitungen durch $g_2$, $\frac{\partial g_2}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial g_2}{\partial \eta_2}$ aus usw., so wird

$$G = \xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\ldots\xi_\nu^{\mu_\nu}g^\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \xi_1^{\mu_1-1}\xi_2^{\mu_2-1}\ldots\xi_\nu^{\mu_\nu-1}\varphi_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \xi_1^{\mu_1-1}\xi_2^{\mu_2-1}\ldots\xi_\nu^{\mu_\nu-1}\psi_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

wo $\varphi_\nu$ und $\psi_\nu$ ganze Functionen bezeichnen. Stellt man auch noch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\nu-1}$ durch $\xi_\nu$ dar, so folgt:

$$G = \xi^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}\bar{g}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$$
$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \xi^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu-\nu}\bar{\varphi}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$$
$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \xi^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu-\nu}\bar{\psi}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu).$$

Nehmen wir nun an, dafs die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu$ gleich bleiben, dann ist vor Allem

$$g_1(\xi_1, \eta_1) = C\eta_1^{\mu_1} + \xi_1\gamma_1(\xi_1, \eta_1),$$

und wenn $\gamma_1(\xi_1, \eta_1)$ Glieder der $(\mu_1 - 1)^{\text{ten}}$ Dimension enthält:

$$(\xi_1, \eta_1)_{\mu_1-1},$$

so mufs

$$C\eta_1^{\mu_1} + \xi_1(\xi_1, \eta_1)_{\mu_1-1}$$

die $\mu_1^{\text{te}}$ Potenz eines Fastors $(\beta_2'\xi_1 - \alpha_2'\eta_1)$ sein und die Coefficienten $\alpha_2', \beta_2'$ werden $\alpha_2$ und $\beta_2$ proportional, weil die Function $(\xi_1, \eta_1)_{\mu_1}$ der Voraussetzung nach den Factor $(\beta_2\xi_1 - \alpha_2\eta_1)$ enthält Die Gröfse $\alpha_2$ wird darnach gewifs von Null verschieden sein.

Durch denselben Schlufs ergibt sich, dafs unter der Annahme gleicher Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu$ auch $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\nu$ nicht Null sein können, aber dann resultirt endlich noch für $\xi$ und $\eta$ eine bestimmte Darstellung der Gestalt:

$$\xi = ((-1)^\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu + h_1(\xi_\nu, \eta_\nu))\,\xi_\nu$$
$$\eta = ((-1)^\nu\beta_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu + h_2(\xi_\nu, \eta_\nu))\,\xi_\nu,$$

wo die ganzen Functionen $h_1$ und $h_2$ kein constantes Glied mehr enthalten.

Ist $G(x,y)$ eine irreductible Function, so können $G$ und $\frac{\partial G}{\partial \eta}$ keine gemeinsamen Theiler in $\eta$ besitzen. Dann gibt es zwei ganze Functionen $\Phi(\xi, \eta)$, $\Psi(\xi, \eta)$, deren Grad in $\eta$ niedriger ist als der von $G$ resp. $\frac{\partial G}{\partial \eta}$ und welche die Beschaffenheit haben, dafs

$$\Phi\frac{\partial G}{\partial \eta} + \Psi G$$

eine rationale Function von $\xi$ allein wird. Wir setzen fest, dafs $\Phi$ und $\Psi$ keine Potenz von $\xi$ zum gemeinsamen Theiler haben und

$$\Phi\frac{\partial G}{\partial \eta} + \Psi G = \xi^\lambda R(\xi), \quad |R(0)| > 0$$

sei, benutzen dann die oben abgeleiteten Formeln, und vergleichen in der entstehenden Relation

$$\Phi(\xi_\nu, \eta_\nu)\,\xi_\nu^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu-\nu}\bar{\varphi}(\xi_\nu, \eta_\nu) + \Psi(\xi_\nu, \eta_\nu)\,\xi_\nu^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}\bar{g}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)$$
$$= \xi_\nu^\lambda\left((-1)^\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu + h_1(\xi_\nu, \eta_\nu)\right)^\lambda R(\xi_\nu)$$

die niedrigsten Potenzen von $\xi_\nu$, so wird nothwendig

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu - \nu = \nu(\mu_1 - 1) \leqq \lambda.$$

Da somit $\nu$ an die endliche obere Grenze $\frac{\lambda}{\mu_1 - 1}$ gebunden ist, existirt nur eine endliche Anzahl von Transformationen, durch welche der Exponent $\mu_1$ nicht erniedrigt wird.

Mit diesem Satze ist vollständig bewiesen, dafs *die Umgebung jeder endlichen Stelle* $(a, b)$ *eines algebraischen Gebildes durch ein oder mehrere Functionenpaare darzustellen ist, je nachdem an dieser Stelle*

$$\frac{\partial G}{\partial x} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial G}{\partial y}$$

*nicht beide verschwinden oder beide Null sind.**)

Es handelt sich noch darum, die Darstellung des Gebildes in der Umgebung unendlich ferner Stellen $(a, b)$ zu vollführen, wenn also $a$ oder $b$ oder beide Gröfsen $a$ und $b$ unendlich sind.

Man setze der Reihe nach

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y - b = \eta \quad \text{oder} \quad x - a = \xi, \quad y = \frac{1}{\eta}$$

oder

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}$$

und behandele $\eta$ als Function von $\xi$ in der Umgebung der Stelle $\xi = 0$. Es ergeben sich die Potenzreihen:

$$\eta = y - b = \xi\,\mathfrak{P}(\xi) \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{1}{y} = \xi\,\mathfrak{P}(\xi)$$

oder

$$\eta = \frac{1}{y} = \xi\,\mathfrak{P}(\xi) = \frac{1}{x}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wenn

$$\left(\frac{\partial\, G(\eta, \xi)}{\partial \eta}\right)_{(\eta = 0,\ \xi = 0)}$$

von Null verschieden ist, und allgemein existirt ein Functionenpaar

$$\eta = \tau\,\mathfrak{P}_1(\tau), \quad \xi = \tau\,\mathfrak{P}_2(\tau).$$

Die Darstellung um die Stelle $(\infty, b)$ gilt aufserhalb desjenigen endlichen Bereiches, welcher alle im Endlichen gelegenen singulären Stellen $x'$ enthält, für die die Gleichungen

$$G = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

gleichzeitig bestehen.

Es ist nunmehr analytisch ausgedrückt, wie man die den $x$ Werthen der Umgebung irgend einer Stelle in dem Bereiche der unabhängigen Variabeln $x$ zugehörigen Werthe von $y$ darstellt. Es soll noch kurz das Verhalten der durch eine algebraische Gleichung:

$$G(y, x) = f_0(x)\,y^m + f_1(x)\,y^{m-1} + \cdots + f_m(x) = 0$$

---

*) Die in diesem Paragraphen gegebenen Entwicklungen sind durchaus Weierstrafs' Vorlesungen entnommen.

— wo $f_\mu(x)$ ganze rationale Functionen sind — definirten Gröſse $y = f(x)$ an den verschiedenartigen Stellen $x$ durch neue Bedingungen charakterisirt werden.

Ist $x = a$ ein Werth, dem eine einfache endliche oder unendliche Wurzel $y = f(a) = b$ zugehört, so wird

$$\big(f(x).(x-a)\big)_{x=a} = 0$$

oder

$$\big(f(x).(x-a)^{\nu+1}\big) = 0,$$

denn es gilt:

$$y - b = (x-a)^\nu \cdot \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)_{(a,\,b)} \frac{1}{\nu!} + (x-a)^{\nu+1}\left(\frac{d^{\nu+1} y}{d\,x^{\nu+1}}\right)_{(a,\,b)} \frac{1}{(\nu+1)!} + \cdots$$

beziehungsweise:

$$\frac{1}{y} = (x-a)^\nu \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)_{(a,\,\infty)} \frac{1}{\nu!} + (x-a)^{\nu+1}\left(\frac{d^{\nu+1} y}{dx^{\nu+1}}\right)_{(a,\,\infty)} \frac{1}{(\nu+1)!} + \cdots$$

Ist an der endlichen Stelle $(a,\,b)$ neben

$$G(a,\,b) = 0,\quad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) = \cdots = \left(\frac{\partial^{\mu-1} G}{\partial y^{\mu-1}}\right) = 0$$

aber $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$ von Null verschieden, so wird

$$\Big(f(x).(x-a)^{\frac{1}{\mu}}\Big)_{x=a} = 0,$$

weil die Entwicklung

$$y - b = (x-a)^{\frac{1}{\mu}}\, \mathfrak{P}\Big((x-a)^{\frac{1}{\mu}}\Big)$$

besteht. Ist erst das Product

$$\Big(f(x).(x-a)^{\frac{\nu+1}{\mu}}\Big)_{x=a} = 0,$$

so muſs die Entwicklung lauten:

$$\frac{1}{y} = (x-a)^{\frac{\nu}{\mu}}\, \mathfrak{P}\Big((x-a)^{\frac{1}{\mu}}\Big)$$

und man sagt: $y$ oder $f(x)$ wird an der Stelle $a$ von der Ordnung $\frac{\nu}{\mu}$ unendlich.

Tritt an Stelle des unendlichen Werthes $a$ die unendlich ferne Stelle $x = \infty$, so sind

$$\Big(f(x).\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{1}{\mu}}\Big)_{x=\infty} = 0 \quad\text{und}\quad \Big(f(x).\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\frac{\nu+1}{\mu}}\Big) = 0$$

die Bedingungen dafür, daſs $y$ an dem $(\mu - 1)$fachen Verzweigungspunkte $x = \infty$ endlich oder von der $\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich ist.

Ist $x = a$ eine $\mu$-elementige Stelle des algebraischen Gebildes, so können die genannten Vorkommnisse zusammenfallen, d. h. dieselbe Stelle kann aus einer oder mehreren einfachen oder Verzweigungsstellen bestehen, und $y$ kann für $x = a$ endlich oder unendlich sein; zum Beweise erinnere man sich nur an die Äquivalenz der Gleichungen $G = 0$ und $g_\varrho = 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$.

Wir behandeln ein bestimmtes Beispiel:

Es sei die algebraische Gleichung

$$y^m = A\prod_{\varkappa=1}^{\lambda}(x - a_\varkappa)^{n_\varkappa} = 0$$

gegeben und hierin

$$\sum_\varkappa n_\varkappa = n.$$

Die $(\lambda + 1)$ positiven ganzen Zahlen $m$ und $n_\varkappa$ sollen keinen gemeinsamen Theiler haben, der gröſste gemeinsame Theiler von $m$ und $n$ heiſse $m_0$, der von $m$ und $n_\varkappa$ $m_\varkappa$ und es sei

$$m = m_0\mu_0 = m_\varkappa\mu_\varkappa, \quad n = m_0\nu_0, \quad n_\varkappa = m_\varkappa\nu_\varkappa.$$

In der Umgebung einer endlichen, nicht singulären Stelle $(a, b)$ existirt ein Functionenpaar

$$x = a + t, \quad y = b(1 + t\,\mathfrak{P}(t)).$$

Ist aber $a$ eine Nullstelle $a_\varkappa$ des Polynoms

$$A\prod_\varkappa(x - a_\varkappa)^{n_\varkappa} = R(x),$$

so setze man

$$y_m = A(x - a_\varkappa)^{n_\varkappa}\prod_{i=1}^{\lambda}{}'(a_\varkappa - a_i)^{n_i}\prod_{i=1}^{\lambda}{}'\left(1 + \frac{x - a_\varkappa}{a_\varkappa - a_i}\right)^{n_i},$$

wo der Strich bei den Productzeichen anzeigen soll, daſs unter denselben $i$ nicht mehr den Werth $\varkappa$ anzunehmen hat. — Bezeichnet man

$$A\prod_i{}'(a_\varkappa - a_i)^{n_i} = B_\varkappa^{m_\varkappa},$$

so wird

$$y^{\mu_\varkappa} = B_\varkappa(x - a_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1 + (x - a_\varkappa)\,\mathfrak{P}(x - a_\varkappa)).$$

Sind $\mu'_\varkappa$, $\nu'_\varkappa$ zwei positive ganze Zahlen kleiner als $\mu_\varkappa$ resp. $\nu_\varkappa$, welche der Bedingung

$$\mu_\varkappa\nu'_\varkappa - \nu_\varkappa\mu'_\varkappa = 1$$

gehorchen, so wird

$$y^{\mu_\varkappa}B_\varkappa^{-\nu'_\varkappa\mu_\varkappa} = B_\varkappa^{-\nu_\varkappa\mu'_\varkappa}(x - a_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1 + (x - a_\varkappa)\,\mathfrak{P}(x - a_\varkappa))$$

und setzt man nun

$$B_\varkappa^{-\mu'_\varkappa}(x - a_\varkappa) = t^{\mu_\varkappa},$$

so folgen in der Umgebung der Stelle $(a_\varkappa, 0)$ entsprechend den $m_\varkappa$ Werthen von $B_\varkappa$ ebensoviele Functionenpaare:

$$x = a_\varkappa + B_\varkappa^{\mu'_\varkappa} t^{\mu_\varkappa}, \quad y = B_\varkappa^{\nu'_\varkappa} t^{\nu_\varkappa} (1 + B_\varkappa^{\mu'_\varkappa} t^{\mu_\varkappa} \mathfrak{P}(B_\varkappa^{\mu'_\varkappa} t^{\mu_\varkappa}).$$

Um $y$ in der Umgebung der $m_0$ unendlich fernen Stellen darzustellen, setze man

$$y^{\mu_0} = A^{\frac{1}{m_0}} x^{\nu_0} \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n_\varkappa}{m_0}},$$

hierin aber

$$A^{\frac{1}{m_0}} = B = B^{\mu_0 \nu_0' - \mu_0' \nu_0},$$

dann

$$B^{-\mu_0'} x = t^{-\mu_0},$$

so werden die $m_0$ Functionenpaare:

$$x = \frac{t^{-\mu_0}}{B^{-\mu_0'}}, \quad y = \frac{t^{-\nu_0}}{B^{-\nu_0'}} \left(1 + \frac{t^{\mu_0}}{B^{\mu_0'}} \mathfrak{P}\left(\frac{t^{\mu_0}}{B^{\mu_0'}}\right)\right).$$

Damit sind nun zu jeder Stelle $(a, b)$ die zugehörigen Functionenpaare aufgestellt, und soweit das einzelne Paar eine Geltung hat, soweit sind die zusammengehörigen Werthe $(x, y)$ durch dasselbe definirt.

## § 40. Transformation algebraischer Gleichungen.

Wenn jetzt die durch eine algebraische Gleichung $G(\overset{(m)}{y}, \overset{(n)}{x}) = 0$ definirte Gröſse $y$ in der Umgebung jeder Stelle $x = a$ dargestellt werden kann und daselbst die zusammengehörigen Werthe $x$ und $y$ stets durch eine endliche Anzahl von Functionenpaaren auszudrücken sind, so läſst sich das Verhalten einer rationalen Function von $x$ und $y$

$$R(x, y) = \frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)},$$

wo die ganzen Functionen $g_1$ und $g_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben mögen, in der Umgebung jeder Stelle $(a, b)$ angeben, indem man die daselbst bestehenden Functionenpaare für $x$ und $y$ in $R(x, y)$ einsetzt. Bezeichnet $R(a, b)$ den Werth von $R(x, y)$ an der gegebenen Stelle, so wird

$$R(x, y) - R(a, b)$$

durch eine in der Umgebung der Stelle $t = 0$ convergente Potenzreihe nach $t$ dargestellt, sofern $R(a, b)$ endlich ist; andernfalls beginnt die Entwicklung mit einem Gliede $ct^{-k}$. Nach dem Werthe des Potenzexponenten $k$ sagt man, daſs die rationale Function die $k$fache Stelle $(a, b)$ besitzt und von der $k^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird.

Ist wie bisher $G(y, x)$ in $y$ vom $m^{\text{ten}}$ Grade und sind $y_1, y_2, \ldots y_m$ die $m$ einem $x$-Werthe zugehörigen Werthe von $y$, so kann man in

$$\frac{g_1(x, y_\mu)}{g_2(x, y_\mu)} = \frac{g_1(x, y_\mu)\, g_2(x, y_1)\, g_2(x, y_2) \ldots g_2(x, y_{\mu-1})\, g_2(x, y_{\mu+1}) \ldots g_2(x, y_m)}{g_2(x, y_1)\, g_2(x, y_2) \ldots g_2(x, y_m)}$$

den Nenner, der eine symmetrische Function von $y_1, y_2, \ldots y_m$ ist, als

Function von $x$ allein darstellen, der Zähler hingegen ist eine Function von $x$ und $y$. Die rationale Function erhält also die Gestalt:

$$R(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

und hierin kann $f(x, y)$ gewifs nicht den Theiler $G(x, y)$ haben, wenn $R(x, y)$ nicht überall verschwinden soll. Weil $G(x, y)$ irreductibel ist, haben $f(x, y)$ und $G(x, y)$ überhaupt keinen Theiler gemein.

Wir fragen nun nach den Stellen $(x, y)$, für welche $R(x, y)$ einen bestimmten Werth $z$ annimmt.

Bildet man das Product

$$\prod_{\mu=1}^{m}(z - R(x, y_x^{(\mu)})) = \frac{\psi(x) z^m + \psi_1(x) z^{m-1} + \cdots + \psi_m(x)}{\psi(x)} = \frac{\Psi(x, z)}{\psi(x)},$$

wo $y_x^{(\mu)}$ die zu einem $x$ gehörigen $y$-Werthe sind und die ganzen Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, so wird einer der $m$ Werthe $R(x, y_x^{(\mu)})$ gleich $z$, wenn $x$ der Gleichung

$$\Psi(x, z) = 0$$

entlehnt ist. Dabei denken wir diejenigen $x$ Werthe ausgeschlossen, für welche auch $\psi(x)$ verschwindet, weil dann unser Product in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Um zu sehen, wie oft eine rationale Function $R(x, y)$ einen Werth $z$ annimmt, mufs man die Beschaffenheit von $\Psi(x, z)$ erkennen, und dazu behaupten wir, $\Psi(x, z)$ *ist irreductibel oder doch die ganzzahlige Potenz einer irreductiblen Function.*

Es sei $\Psi(x, z)$ das Product verschiedener irreductibler Factoren $\Psi_i(x, z)$ und $x'$ eine Stelle, der nur endliche Wurzeln $z'$ der Gleichung $\Psi_i = 0$ entsprechen, dann gehört zu $z'$ eine Lösung der Gleichung $G(x, y) = 0$, für die $z' - R(y, x')$ verschwindet, denn andernfalls könnte das obige Product nicht Null sein. Da somit jede der Functionen $\Psi_i(x, R(x, y))$ für jede Stelle der Umgebung von $x'$ eine Wurzel $y$ mit $G(x, y)$ gemein hat, sind sie durch $G$ theilbar. Jetzt aber sieht man, dafs je zwei der Functionen $\Psi_i(x, z)$ für jede Stelle aus der Nähe von $x'$ auch eine gemeinsame Lösung $z$ besitzen und darum jede durch die andere theilbar ist. Sie stimmen also bis auf einen von $z$ unabhängigen Factor überein, doch weil $\Psi(x, z)$ keinen solchen Factor enthält, wird

$$\Psi(x, z) = (\Psi_i(x, z))^\lambda,$$

wo $\lambda$ ein Theiler von $m$ ist. Gleichzeitig wird der Coefficient von $z^m$, nämlich $\psi(z)$, die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz einer ganzen Function $\psi_i(x)$, und man kann das Product in der Form schreiben:

$$\prod(z - R(x, y_x^{(\mu)})) = \left(\frac{\Psi_i(x, z)}{\psi_i(x)}\right)^\lambda.$$

Ist der Grad von $\Psi_i$ in $x$ $\nu$, so gehören gemäfs der Gleichung $\Psi_i = 0$ zu einem Werthe von $z$ $\nu$ Werthe $x$ und jedem derselben entsprechen $\lambda$ verschiedene Factoren $z - R(x, y_x^{(\mu)})$. Je $\lambda$ Factoren des Productes liefern $\Psi_i$.

Hat man die zu einem $z$-Werthe gehörenden Werthe $x$ gefunden, so gehen die entsprechenden $y$-Werthe aus den Gleichungen

$$G(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(x, R(x, y)) = 0 \quad \text{oder} \quad z - R(x, y) = 0$$

hervor. Ist $\Psi(x, z)$ irreductibel, so kann die diese $y$ definirende Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ und $z$ sind, in $y$ gewifs nicht von höherem als dem ersten Grade sein und $y$ wird rational durch $x$ und $z$ darstellbar, denn andernfalls entsprächen einem $x$-Werthe mehr als $m$ Werthe $y$, und folglich gehören zu einem Werthe $z$ so viele Stellen $(x, y)$ als der Grad von $\Psi(x, z)$ in $x$ anzeigt. Ist aber $\Psi$ die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz von $\Psi_i$, so gehören zu einem Werthepaare $(z, x)$ $\lambda$ im allgemeinen von einander verschiedene $y$-Werthe und zu einem Werthe $z$ $\lambda\nu$ Stellen $(x, y)$, wo $\lambda\nu = k$ ist.*)

Diese Sätze gelten auch, wenn man $z$ einen Werth gibt, für den mehrere der $x$-Werthe einander gleich werden, nur mufs man diese und die $y$-Werthe stets in der gehörigen Vielheit zählen. Hat $z$ einen Werth, dem gerade ein $x$ zugehört, welches die Function $\psi(x)$ oder $\psi_i(x)$ zum Verschwinden bringt, so werden Grenzbetrachtungen die fortdauernde Giltigkeit der Sätze bestätigen können. Also jeden Werth $z$ wird die rationale Function $R(x, y)$ an gleich viel Stellen $(x, y)$ annehmen. Die Anzahl dieser Stellen nennt man den *Grad der rationalen Function.*

Sind neben der Gleichung $G(x, y) = 0$ zwei rationale Functionen

$$\xi = R_1(x, y), \quad \eta = R_2(x, y)$$

von dem $\mu^{\text{ten}}$ und $\nu^{\text{ten}}$ Grade gegeben, so entspricht jeder Stelle $(x, y)$ ein Werthepaar $(\xi, \eta)$. Es entsteht nur die Frage, wann umgekehrt einem Werthesysteme $(\xi, \eta)$ eine einzige Stelle $(x, y)$ zuzuordnen ist.

Zu einem Werthe $\xi$ gehören $\mu$ Werthepaare $(x, y)$ und $\mu$ Werthe $\eta$, die man auch aus einer Gleichung findet, welche zwischen $\xi$ und $\eta$ allein besteht. Nennt man die zu $\xi$ gehörigen $\mu$ Werthepaare $(x, y)$:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_\mu, y_\mu),$$

und bildet

$$\prod_{\varkappa=1}^{\mu} \left(\eta - R_2(x_\varkappa, y_\varkappa)\right),$$

so ist dieses Product eine irreductible Function von $\xi$ und $\eta$ oder die Potenz einer solchen. Besteht nämlich zwischen $x$ und $\xi$ die irreductible

*) Vergleiche die Darstellung von Weber und Dedekind in dem 92. Bd. des Journals für reine und angewandte Mathematik §§ 1, 2, 13.

Gleichung $\Psi_1(\xi, x) = 0$ und ist $y$ rational durch $x$ und $\xi$ darstellbar, so geht das Product in ein nächstes über:

$$\prod_{\varkappa=1}^{\mu}\left(\eta - R_2'(x_\varkappa, \xi)\right),$$

welches wegen der symmetrisch eintretenden Gröfsen $x_\varkappa$ rational durch $\eta$ und die Coefficienten von $\Psi_1(\xi, x) = 0$ auszudrücken ist; sind ja doch die zu einem $\xi$ gehörigen Gröfsen $x_\varkappa$ gerade die Wurzeln dieser Gleichung. Es folgt also in der That die Existenz einer Gleichung:

$$\prod_{\varkappa}\left(\eta - R_2(x_\varkappa, y_\varkappa)\right) = \left(\frac{\Phi_2(\xi, \eta)}{\varphi_2(\xi)}\right)^{\lambda'}. —$$

Sollte $\Psi_1(\xi, x)$ die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz eines irreductiblen Factors und $y$ nicht rational durch $x$ und $\xi$ darstellbar sein, so führt eine einfache Substitution

$$\bar{x} = x + cy, \quad \bar{y} = y$$

zu einer Gleichung $G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ der Beschaffenheit, dafs die zu der rationalen Function $\xi = R_1(\bar{x}, \bar{y})$ gehörige Gleichung zwischen $\xi$ und $x$ irreductibel ist, d. h. man kann $c$ so wählen, dafs einem Werthe $\xi$ nur verschiedene Werthe $\bar{x}$ entsprechen:

$$x_1 + cy_{x_1}^{(1)}, \ldots\ x_1 + cy_{x_1}^{(\lambda)}, \ldots\ x_\nu + cy_{x_\nu}^{(1)}, \ldots\ x_\nu + cy_{x_\nu}^{(\lambda)}.$$

Die Gleichung zwischen $\xi$ und $\eta$ lautet $\Phi_2(\xi, \eta) = 0$. Ist $\lambda' = 1$, so erreicht $\eta$ in $\Phi_2(\xi, \eta)$ den Grad $\mu$, denn es gibt zu einem $\xi$-Werthe $\mu$ Werthepaare $(x, y)$. In diesem Falle $\lambda' = 1$ kann man umgekehrt $x$ und $y$ rational durch $\xi$ und $\eta$ darstellen, denn zufolge der Relationen

$$\Psi_1(\xi, x) = 0, \quad \eta - R_2'(\xi, x) = 0$$

ist zunächst $x$ rational durch $\xi$ und $\eta$ auszudrücken und ebenso $y$, denn $y$ ist eine rationale Function von $x$ und $\xi$. —

Zwei rational in einander transformirbare algebraische Gleichungen

$$G(x, y) = 0, \quad \Gamma(\xi, \eta) = 0,$$

deren Stellen $(x, y)$ und $(\xi, \eta)$ einander wechselseitig entsprechen, zählt man als zu einer *Klasse* gehörig und eine jede Gleichung ist als Repräsentantin einer ganzen Klasse aufzufassen.

Will man einer Repräsentantin eine bestimmte Normalform geben, so kann für diese Form die geringste Constantenzahl oder die niedrigste Dimension oder eine andere Forderung mafsgebend werden; die Zweckmäfsigkeit hat hier zu entscheiden.

Beachtet man, dafs die verschiedenen algebraischen Gebilde einer Klasse verschiedenartige singuläre Stellen haben werden, so kann man nach denjenigen Transformationen

$$\xi = R_1(x, y), \quad \eta = R_2(x, y)$$

fragen, durch welche die entstehende transformirte Gleichung

$$\Gamma(\xi, \eta) = 0$$

besondere singuläre Stellen erhält, z. B. eine Stelle, in deren Umgebung das neue algebraische Gebilde durch ein einziges Functionenpaar dargestellt wird. Allerdings bedarf die Erledigung dieser Transformationen weitläufiger Untersuchungen, denn wir werden leicht gewahr, daſs eine rationale Function $z = R(x, y)$ mit vorgeschriebenen Unendlichkeitsstellen durchaus nicht existiren muſs und deshalb sind wir nicht sicher, ob man eine Gleichung derselben Klasse angeben kann, welche irgend gestellte Forderungen erfüllt. Man muſs also nachsehen, welche Forderungen mit der Natur einer rationalen Function $R(x, y)$ verträglich sind, sofern zwischen $x$ und $y$ eine algebraische Gleichung $G(x, y) = 0$ besteht.

Wir wollen zur Erläuterung zeigen, daſs eine rationale Function $z = R(x, y)$, die nur an einer Stelle und dort von der ersten Ordnung unendlich wird, im Allgemeinen nicht existiren kann, daſs vielmehr solche Functionen nur möglich sind, wenn die Gleichung

$$G(x, y) = 0$$

eine besondere Beschaffenheit aufweist.

Angenommen, daſs es eine solche Function $z = R(x, y)$ gibt, so kann sie jeden Werth $z$ nur einmal annehmen. Zwischen $z$ und $x$ besteht dann eine Gleichung ersten Grades, und $x$ und $y$ lassen sich als rationale Functionen von $z$ allein darstellen. Ist $x = a_0$ eine reguläre Stelle, der ein Werth $y = b_0$ zugehört, so kann man jetzt $x$ und $y$ durch recurrente Reihen

$$x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$
$$y = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

ausdrücken. Es existiren demnach Relationen:

$$\alpha_0 a_{n+\nu} + \alpha_1 a_{n+\nu-1} + \cdots + \alpha_p a_{n+\nu-p} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$
$$\beta_0 b_{m+\mu} + \beta_1 b_{m+\mu-1} + \cdots + \beta_q b_{m+\mu-q} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2 \ldots).$$

Substituirt man die Reihen für $x$ und $y$ in die Potenzreihe

$$y - b_0 = (x - a_0) \cdot \mathfrak{P}(x - a_0) = (x - a_0) \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda (x - a_0)^\lambda,$$

welche die Umgebung der Stelle $(a_0, b_0)$ darstellt, und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $z$, so ergeben sich wegen der Relationen in den Gröſsen $a$ und $b$ zwischen den von den Coefficienten der Function $G(x, y)$ abhängigen Constanten $c_\lambda$ und somit zwischen den Constanten von $G(x, y)$ besondere Beziehungen.

Soll also eine rationale Function $R(x, y)$ ersten Grades existiren, so muſs die Gleichung $G(x, y) = 0$ eine specielle Natur besitzen und um diese allgemeine Einsicht war es uns hier zu thun.

Man erkennt nun die Berechtigung und Wichtigkeit der folgenden Frage: Welches ist die geringste Anzahl von Stellen $(a, b)$, welche für eine rationale Function $R(x, y)$ Unendlichkeitsstellen erster Ordnung sein müssen, oder welches ist der geringste Grad einer rationalen Function? Existirt keine rationale Function $R(x, y)$ mit $\varrho$ einfachen Unendlichkeitsstellen, gibt es aber rationale Functionen mit $\varrho + 1$ beliebigen Unendlichkeitsstellen, so heifst die offenbar endliche Zahl $\varrho$ der *Rang* oder das *Geschlecht* des algebraischen Gebildes. —

Wählt man zwei rationale Functionen $\xi$ und $\eta$ vom $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ und $(\varrho + 2)^{\text{ten}}$ Grade, deren Unendlichkeitsstellen alle in eine einzige $(x_0, y_0)$ zusammenfallen, und leitet man die zwischen $\xi$ und $\eta$ bestehende Gleichung $\Gamma(\xi, \eta) = 0$ ab, die in $\eta$ von dem $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$, in $\xi$ von dem $(\varrho + 2)^{\text{ten}}$ Grade sein wird, so besagen die in der Umgebung von $(x_0, y_0)$ giltigen Entwicklungen für $\xi$ und $\eta$:

$$\xi = a_0 \frac{1}{\tau^{\varrho+1}} + a_1 \frac{1}{\tau^{\varrho}} + \cdots + a_\varrho \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}_1(\tau)$$

$$\eta = b_0 \frac{1}{\tau^{\varrho+2}} + b_1 \frac{1}{\tau^{\varrho+1}} + \cdots + b_{\varrho+1} \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}_2(\tau),$$

dafs das neue algebraische Gebilde $\Gamma(\xi, \eta) = 0$ in der Umgebung der Stelle $(\xi = \infty, \eta = \infty)$ nur durch ein Functionenpaar dargestellt wird, indem einem Werthe von $\xi$ wirklich $(\varrho + 1)$ verschiedene Werthe $\eta$ entsprechen, wie es die Gleichung verlangt; es ist ja

$$\eta = \mathfrak{P}\left(\xi^{\frac{1}{\varrho+1}}\right).$$

Die Gleichung $\Gamma(\xi, \eta) = 0$ ist gleichzeitig mit $G(x, y) = 0$ irreductibel, und $\Gamma(\xi, \eta)$ ist nicht die Potenz einer irreductiblen Function von $\xi$ und $\eta$, gehört zu derselben Klasse und hat offenbar denselben Rang $\varrho$.

Diese Gleichung $\Gamma(\xi, \eta) = 0$ werden wir bei dem Beweise zu benutzen haben, dafs die durch eine irreductible Gleichung $G(x, y) = 0$ definirte Gröfse $y$ eine *monogene* analytische Function ist.

## § 41. Beweis für die Monogenität der algebraischen Function.

Bisher ist nur nachgewiesen, dafs die einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$G(x, y) = f_0(x) y^m + f_1(x) y^{m-1} + \cdots + f_m(x) = 0$$

entstammende Gröfse $y$ in der Umgebung jeder Stelle $x = a$, $y = b$ durch ein oder mehrere Functionenpaare

$$x - a = \mathfrak{P}_1(t), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(t)$$

dargestellt werden kann, ob aber alle Functionenpaare aus einander abzuleiten sind und ein Functionenpaar als die Quelle aller anderen zu betrachten ist, das mufs erst untersucht werden.

Früher haben wir nur von den aus einem Elemente

$$y - b = \mathfrak{P}(x - a)$$

abgeleiteten Fortsetzungen gesprochen. Jetzt wollen wir den Begriff der Fortsetzung entsprechend der Darstellungsart zweier durch eine Gleichung $G(x, y) = 0$ zusammenhängenden Gröfsen durch Potenzreihen neuer Variabeln $t$ erweitern.

Ist von vornherein ein Functionenpaar

$$x - a = \mathfrak{P}_1(t), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(t)$$

gegeben, nach welchem einem $t$ des gemeinsamen Convergenzbereiches der Reihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ein Werthepaar $x$, $y$ zugehört, und verschiedenen Stellen $t$ verschiedene Werthesysteme $(x, y)$, und endlich einem Werthepaare $(x, y)$ eine Stelle $t$ entspricht, und nennt man die Gesammtheit der dem Functionenpaare entstammenden Werthesysteme $(x, y)$ im Gebiete der Gröfsen $x$ und $y$ *ein Element eines analytischen Gebildes*, so kann man aus diesem unendlich viele Elemente ableiten. Setzt man

$$t = \mathfrak{P}(\tau),$$

wo $\mathfrak{P}(0)$ eine Stelle $t_0$ in dem genannten Bereiche der $t$ ist und $\tau$ eindeutig durch $t$ auszudrücken ist, so dafs $\mathfrak{P}(\tau)$ ein Glied erster Dimension besitzt, so erhält man ein neues Element, das an unendlich vielen Stellen der Umgebung von $t_0$ mit dem ersten übereinstimmt. Die Elemente heissen daher *coincidirend*. Dort, wo die Elemente nicht übereinstimmen, ist das eine die Fortsetzung des zweiten.

Zwei Functionenpaare der oben genannten Art:

$$x - a = \mathfrak{P}_1(t), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(t)$$
$$x - a' = \mathfrak{P}_1'(\tau), \quad y - b' = \mathfrak{P}_2'(\tau)$$

gehören demselben Gebilde an, wenn sie coincidiren, d. h. wenn sie in der Umgebung einer Stelle $(\alpha, \beta)$ ihres Giltigkeitsbereiches übereinstimmen. Dazu ist nothwendig, dafs für ein $t = t_0$ und $\tau = \tau_0$ $x = \alpha$, $y = \beta$ und

$$t - t_0 = (\tau - \tau_0)\mathfrak{P}(\tau - \tau_0)$$

wird, wo $\mathfrak{P}(\tau_0 - \tau_0)$ von Null verschieden ist, denn dann sind die Elemente aus einander abzuleiten und die aus je einem Functionenpaare entspringenden Elemente

$$y - b = \overline{\mathfrak{P}}(x - a) \quad \text{und} \quad y - b' = \overline{\mathfrak{P}}'(x - a')$$

sind Fortsetzungen früheren Sinnes.

Die mittelbar zusammenhängenden Functionenpaare oder Elemente eines analytischen Gebildes brauchen wir wohl nicht besonders zu erklären. —

Jetzt ist es leicht, den Zusammenhang zweier Elemente

$$y - b_1 = \mathfrak{P}_1(x - a_1), \quad y - b_2 = \mathfrak{P}_2(x - a_2),$$

die aus einer irreductiblen algebraischen Gleichung $G(x, y)$ entnommen sind, zu beweisen.

Zu diesem Zwecke gehe man von dem durch die Gleichung $G(y, x) = 0$ definirten algebraischen Gebilde zu dem oben besprochenen über, dessen Gleichung $\Gamma(\eta, \xi) = 0$ ist. Sind dann die den Stellen des ersten Gebildes $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ entsprechenden Stellen des zweiten $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, so kann man von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ aus auf zwei über keine singuläre Stelle $\xi$ führenden Wegen nach den in der Umgebung der Stelle $\xi = \infty$ gelegenen Stellen $\alpha_1'$, $\alpha_2'$ gelangen, wobei $\eta = \beta_1, \beta_2$ die Werthe $\beta_1'$, $\beta_2'$ erhalten mögen. Unter der Umgebung von $\xi = 0$ ist hier diejenige verstanden, welche aufser $\xi = \infty$ keine weitere singuläre Stelle enthält. Da nun die Umgebung der unendlich fernen Stelle $(\xi, \eta) = (\infty, \infty)$ durch das Functionenpaar

$$\frac{1}{\xi} = \tau^{\varrho+1}\mathfrak{P}_1(\tau), \quad \frac{1}{\eta} = \tau^{\varrho+2}\mathfrak{P}_2(\tau)$$

vollständig dargestellt wird, gibt es einen daselbst von $\alpha_1'$ nach $\alpha_2'$ führenden Weg, auf welchem $\beta_1'$ in $\beta_2'$ übergeht, denn das unendlich ferne Element coincidirt mit denen um die Stelle $(\alpha_1', \beta_1')$ und $(\alpha_2', \beta_2')$ und darum sind die Elemente

$$\eta - \beta_1' = \overline{\mathfrak{P}}_1(\xi - \alpha_1') \quad \text{und} \quad \eta - \beta_2' = \mathfrak{P}_2'(\xi - \alpha_2')$$

zusammenhängend oder aus einander ableitbar.

Wenn endlich $\xi$ von $\alpha_1$ über $\alpha_1'$ nach $\alpha_2'$ und nach $\alpha_2$ geht, gelangt man mit $\beta_1$ nach $\beta_2$ und entsprechend mit $b_1$ nach $b_2$.

Damit ist nun die Monogenität der durch eine irreductible algebraische Gleichung $G(x, y) = 0$ definirten Gröfse $y$ erwiesen; sie ist eine monogene analytische Function und heifst *algebraische Function.*

Unser algebraisches Gebilde wird durch eine endliche Anzahl von Functionenpaaren dargestellt, denn es gibt nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen für die algebraische Function und nur eine endliche Anzahl von Discriminantenlösungen, und in der Umgebung mehrfacher Punkte genügt zur Darstellung ebenfalls eine endliche Anzahl von Functionenpaaren.

Wenn umgekehrt eine mit einer unabhängigen Variabeln $x$ im Zusammenhange stehende monogene analytische Function $y$ den Bedingungen genügt:

1) $y$ nimmt für jeden Werth von $x = a$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen $x = \alpha$ $m$ verschiedene Werthe an,
2) und zwar lassen sich in der Umgebung der Stellen $a$ die zugehörigen Werthe von $y$ aus $m$ nach positiven ganzen Potenzen von $(x - a)$ fortschreitenden convergenten Reihen berechnen,
3) indefs die den Stellen $x$ aus der Reihe der singulären Stellen $\alpha$ entsprechenden $m$ $y$-Werthe durch eine endliche Anzahl con-

vergenter Reihen darzustellen sind, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(x - a)$ fortschreiten und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten,

dann ist $y$ die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ sind.

Offenbar genügt $y$ als $m$-werthige analytische Function einer Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten eindeutige analytische Functionen sind. Doch können diese nur rationale Functionen sein, indem die Potenzsummen der zu einem Werthe $x$ gehörigen $y$-Werthe eindeutige Functionen ohne wesentlich singuläre Stellen werden. —

Nun verlassen wir das durch eine Gleichung definirte algebraische Gebilde und verzichten auf die Construction der rationalen Functionen mit vorgegebenen Unendlichkeitsstellen und auf die Ermittlung der Abhängigkeit des Ranges eines Gebildes von der Beschaffenheit desselben, weil uns der bloſse Begriff der algebraischen Gleichungen verschiedenen Ranges späterhin genügen wird.

## § 42. Systeme algebraischer Gleichungen.
### Das analytische Gebilde $m^{\text{ter}}$ Stufe im Gebiete von $(m + n)$ Gröſsen.

Es sollen die voranstehenden Untersuchungen auf ein System $n$ algebraischer Gleichungen mit $n + m$ variablen Gröſsen übertragen werden. Bezeichnen wir die unabhängigen Variabeln mit $x_{n+1}$, $x_{n+2}$, $\ldots x_{n+m}$, die abhängigen mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die in den letzteren ganzen rationalen Functionen, die gleich Null gesetzt sein sollen, mit

$$G_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+m}),$$

in welchen die Coefficienten analytische Functionen von $x_{n+1}$, $x_{n+2}$, $\ldots x_{n+m}$ mit einem gemeinsamen Stetigkeitsbereiche sind, so möge vorausgesetzt werden, daſs durch Elimination von je $(n-1)$ der Gröſsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ $n$ algebraische Gleichungen

$$g_\nu(x_\nu, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}) = 0$$

hervorgehen, aber niemals eine Gleichung in den $m$ Variabeln $x_{n+\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ allein resultirt, denn dann lieſse sich das gegebene Gleichungssystem auf ein anderes reduciren, welches eine Variable weniger hat, indem etwa $x_{n+\mu}$ als eine von den übrigen $(m-1)$ Variabeln abhängige Gröſse anzusehen wäre.

Die genannte Elimination von $(n-1)$ Variabeln z. B. $x_1, \ldots x_{n-1}$ besteht nicht etwa in der successiven Bildung der $(n-1)$ Resultanten $R^{(1)}_{\nu_1}(x_2, x_3, \ldots x_{n+m})$, der Bildung der $(n-2)$ Resultanten $R^{(1)}_{\nu_2}(x_3, \ldots x_{n+m})$ der Gleichungen $R^{(1)}_{\nu_1} = 0$ usw., endlich in der Bildung der Resultante zweier Gleichungen

$$R_1^{(n-1)}(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m}) = 0, \quad R_2^{(n-1)}(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m}) = 0,$$

sondern man mufs vielmehr die $(n-1)$ Variabeln gleichzeitig eliminiren, indem man eine der Gleichungen $G_\nu = 0$, deren Ordnung in $x_1, \ldots x_n$ $k_\nu$ sei, mit einer ganzen Function $\Gamma_\nu$ von $x_1, \ldots x_n$ multiplicirt, dann in dem Producte $G_\nu \Gamma_\nu$ mit Hilfe der übrigen Gleichungen $G_{\nu'} = 0$ die durch $x_1^{k_1}, \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}}$ theilbaren Glieder fortschafft und über die willkürlichen Constanten von $\Gamma_\nu$ so verfügt, dafs $G_\nu \Gamma_\nu$ blos Glieder in der $n^{\text{ten}}$ Variabeln $x_n$ behält. Es resultirt dann $g_n(x_n, x_{n+1} \ldots x_{n+m})$. (Vergleiche Serret Algebra Bd. 1, Cap. 4.) Die Werthesysteme $(x_1, \ldots x_n)$, welche den Gleichungen $G_\nu = 0$ genügen, befriedigen auch die Gleichungen $g_\nu = 0$, weil man offenbar $g_\nu$ die Form geben kann $\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu \Gamma_\nu$. —

Nun könnte man jede einzelne Gleichung $g_\nu = 0$ für sich behandeln, doch wenn man dann in der Umgebung einer Stelle

$$x_{n+\mu} = a_{n+\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots m),$$

welcher die $m_\nu$ Werthe

$$x_\nu = a_\nu^{(1)}, \ a_\nu^{(2)}, \ldots a_\nu^{(m_\nu)}$$

zugehören mögen, die Darstellungen finden kann:

$$x_\nu - a_\nu^{(\mu_\nu)} = \mathfrak{P}_{\mu_\nu}^{(\nu)}(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} \,|\, (a_{n+\mu})) \quad (\mu_\nu = 1, 2, \ldots m_\nu),$$

wo $\mathfrak{P}_{\mu_\nu}^{(\nu)}$ kein constantes Glied enthält, so mufs man untersuchen, ob $n$ dieser $N = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ Potenzreihen $\mathfrak{P}_{\mu_\nu}^{(\nu)}$ einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen, derart dafs irgend einer Stelle desselben Werthesysteme für $x_1, x_2, \ldots x_n$ zugehören, welche gleichzeitig die $n$ Gleichungen $g_\nu = 0$ erfüllen. Denn bei der Frage, ob ein Gleichungssystem $n$ analytische Functionen definirt, hat man in dem $2m$fach ausgedehnten Werthegebiete der Gröfsen $x_{n+\mu}$ Stellen ausfindig zu machen, in deren Umgebung $n$ convergente Potenzreihen für $x_1, x_2, \ldots x_n$ existiren, welche das Gleichungssystem identisch befriedigen.

Die Entscheidung hierüber könnte man dadurch herbeiführen, dafs man nachsieht, ob in der Umgebung einer Stelle $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+m})$ des gemeinsamen Stetigkeitsbereiches der Coefficienten der Gleichungen $g_\nu = 0$ ein Bereich existirt, an dessen Stellen keine der Discriminanten

$$D_\nu(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m})$$

verschwindet und keine der Gröfsen $x_\nu$ unendlich wird.

Andrerseits steht uns der Weg von den Gleichungen $g_\nu = 0$ zu einem oder mehreren denselben äquivalenten sogenannten Normalgleichungssystemen der Form

$$H(y, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}) = 0,$$

$$x_\nu = \frac{H_\nu(y, x_{n+1}, \ldots x_{n+m})}{\frac{\partial H}{\partial y}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

offen, wo $H$ eine irreductible ganze rationale Function der von den $n$ Gröfsen $x_\nu$ linear abhängigen Gröfse $y$ und $H_\nu$ ganze rationale Functionen von $y$ bedeuten. An diese Systeme hat man wieder die Frage zu knüpfen, ob aus denselben Systeme gleichzeitig convergenter Potenzreihen für $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ hervorgehen.

Endlich kann man die gegebenen Gleichungen $G_\nu = 0$ direct so behandeln, wie die eine Gleichung $G(y, x) = 0$. Wir wählen den letzten Weg, da wir noch Gelegenheit haben werden, Normalgleichungssysteme bilden und untersuchen zu können.

Es sei $(a_1, a_2, \ldots a_{m+n})$ eine endliche Stelle, welche den $n$ Gleichungen

$$G_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{n+m}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

genügt, und man setze

$$x_\nu - a_\nu = \xi_\nu, \quad x_{n+\mu} - a_{n+\mu} = \xi_{n+\mu},$$

dann erhalten die Gleichungen die bekannte Form:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \cdots + A_{1,\,m+n}\xi_{n+m} + (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{1,2} + \cdots = 0\\
&A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + \cdots + A_{2,\,m+n}\xi_{n+m} + (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{2,2} + \cdots = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&A_{n,1}\xi_1 + A_{n,2}\xi_2 + \cdots + A_{n,\,m+n}\xi_{n+m} + (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{n,2} + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

wo $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{\nu,\lambda}$ die Glieder $\lambda^{\text{ter}}$ Dimension aus der Gleichung:

$$G_\nu(a_1 + \xi_1, a_2 + \xi_2, \ldots a_{n+m} + \xi_{n+m}) = 0$$

umfafst.

Wenn dann in der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} A_{11}, \ldots A_{1,n}, & A_{1,n+1}, \ldots A_{1,n+m}\\ A_{21}, \ldots A_{2,n}, & A_{2,n+1}, \ldots A_{2,n+m}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ A_{n,1}, \ldots A_{n,n}, & A_{n,n+1}, \ldots A_{n,n+m}\end{matrix}\right\|$$

eine der Determinanten $n^{\text{ter}}$ Ordnung, z. B.

$$\begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1,n}\\ A_{21}, A_{22}, \ldots A_{2,n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots A_{n,n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_n}\right)\\ \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_n}\right)\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \left(\frac{\partial G_n}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial G_n}{\partial x_n}\right)\end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, lassen sich $n$ der Gröfsen $\xi$ und zwar $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ in der Umgebung der Stelle $(0)$ nach Potenzreihen der $m$ übrigen Variabeln ohne constantes Glied entwickeln:

$$\xi_\nu = \mathfrak{P}_\nu(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{n+m}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Man kann nämlich eine Folge von Stellen $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ oder $(\xi_\nu)$

$$0, (\xi_\nu^{(1)}), (\xi_\nu^{(2)}) \ldots (\xi_\nu^{(\varkappa)}) \ldots$$

mit einer solchen Grenzstelle $(\xi_\nu')$ angeben derart, dafs die Grenzwerthe $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ durch Potenzreihen in den Variabeln $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{n+m}$ auszudrücken sind, und die gegebenen Gleichungen erfüllen. Bildet man die Beziehungen

$$A_{\nu,1}\xi_1 + A_{\nu,2}\xi_2 + \cdots + A_{\nu,n}\xi_n = f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m+n})$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo $f_\nu$ keine Glieder erster Dimension in den Gröfsen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ allein enthält, setzt rechts für $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ Null und löst die entstehenden Gleichungen nach den links stehenden Unbekannten — was angeht, da die Determinante nicht verschwindet —, so findet man etwa

$$\xi_1 = \xi_1^{(1)}, \quad \xi_2 = \xi_2^{(1)}, \ldots \xi_n = \xi_n^{(1)}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke $f_\nu$ gibt neue Gleichungen mit den Lösungen

$$\xi_1 = \xi_1^{(2)}, \quad \xi_2 = \xi_2^{(2)}, \ldots \xi_n = \xi_n^{(2)}.$$

So fortfahrend gelangt man zu Grenzwerthen

$$\xi_1 = \xi_1', \quad \xi_2 = \xi_2', \ldots \xi_n = \xi_n',$$

welche den vorgegebenen Gleichungen genügen und als Potenzreihen nach den Variabeln $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{n+m}$ auszudrücken sind, indem bei der Zusammensetzung nur Additionen und Multiplicationen zu vollziehen sind und die Summen ganzer rationaler Functionen in Potenzreihen umgeformt werden können, wenn die Summen gleichmässig convergiren.

Den Convergenzbeweis führen wir praktischer gleich in dem Falle, wo wir die $n+m$ Gröfsen $\xi$ durch Potenzreihen nach $m$ neuen Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_m$ darstellen, wie das bei dem algebraischen Gebilde $G(y, x) = 0$ geschah.

Verbindet man mit den $n$ gegebenen Gleichungen

$$A_{\nu,1}\xi_1 + A_{\nu,2}\xi_2 + \cdots + A_{\nu,n+m}\xi_{n+m} = \varphi_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

weitere $m$ Gleichungen, welche $m$ neue Variable $t_\mu$ mit den Gröfsen $\xi$ in Zusammenhang bringen:

$$A_{n+\mu,1}\xi_1 + A_{n+\mu,2}\xi_2 + \cdots + A_{n+\mu,n+m}\xi_{n+m} = t_\mu$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots m),$$

wo die Constanten $A_{n+\mu,\nu+\mu'}$ so gewählt sein mögen, dafs die Determinante $(n+m)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n+m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n+m,1} & \ldots & A_{n+m,n+m} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, und bestimmt aus den $(n+m)$ Gleichungen durch das frühere Verfahren denselben genügende Grenzwerthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m}$ als Potenzreihen der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_m$,

$$\xi_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m),$$

so besitzen diese einen gemeinsamen Convergenzbereich um die Stelle (0).

Zum Convergenzbeweise ersetze man in den Lösungen der $(n+m)$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m + \psi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m}) \\
\xi_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m + \psi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_{n+m} &= a_{n+m,1}t_1 + a_{n+m,2}t_2 + \cdots + a_{n+m,m}t_m + \psi_{n+m}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m}),
\end{aligned}$$

wo die Ausdrücke $\psi_\lambda$ keine Constanten und keine Glieder erster Dimension enthalten, auf dafs in ihrer Darstellung durch eine $(n+m)$-fache in einem Bereiche $|\xi_\lambda| < R$ convergente Summe:

$$\sum_{(\nu_\lambda)=0}^{\infty} b^{(\lambda)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n+m}} \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} \ldots \xi_{n+m}^{\nu_{n+m}}$$

$\sum\limits_{\lambda=1}^{n+m} \nu_\lambda \geqq 2$ sein mufs, die Coefficienten $a_{\lambda,\mu}$ durch eine solche positive Gröfse $\gamma$, dafs der absolute Betrag:

$$|a_{\lambda,\mu}| \leqq \gamma$$

ist. Ist dann für jedes $(\lambda)$ und ein $r < R$

$$\left| b^{(\lambda)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n+m}} \right| \leqq g r^{-(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{n+m})},$$

so werden die Coefficienten der Reihe für

$$g \prod_{\lambda=1}^{n+m} \left( \frac{1}{1 - \frac{\xi_\lambda}{r}} \right) - \left\{ g + g \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+m}}{r} \right\}$$

nicht kleiner als die absoluten Beträge der Coefficienten gleichnamiger Glieder jeder Reihe $\psi_\lambda$, und umsoweniger kleiner als die der Reihe

$$\frac{g}{1 - \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+m}}{r}} - \left\{ g + g \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+m}}{r} \right\}.$$

Sollten nun aus den $(n+m)$ Gleichungen:

$$\xi_\lambda = \gamma(t_1 + t_2 + \cdots + t_m) + g \sum_{\varkappa=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+m}}{r} \right)^{\varkappa}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots n+m)$$

$(n+m)$ convergente Potenzreihen für die Gröfsen $\xi_\lambda$ hervorgehen, so können wir sicher sein, dafs auch die gegebenen Gleichungen durch gleichzeitig convergente Potenzreihen identisch zu erfüllen sind.

Die Reihen, die aber den letzten $(n+m)$ Gleichungen genügen, werden offenbar gleich. Setzt man daher

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_m = t, \quad \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+m} = \xi,$$

so dafs $\xi_\lambda = \frac{\xi}{n+m}$ wird, so reducirt sich das letzte System auf die einzige Gleichung

$$\xi = (n+m)\gamma t + (n+m) g \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{\xi}{r}} = 0$$

oder

$$\xi^2 - \frac{r(n+m)\gamma t + r^2}{(n+m)g + r}\xi + \frac{r^2(n+m)\gamma t}{(n+m)g+r} = 0,$$

und weil $\xi$ in der Umgebung der Stelle $t = 0$ in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann, müssen auch die $(n+m)$ Potenzreihen

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$$

einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen, was zu zeigen war. —

Indem die Gröfsen $t_\mu$ als lineare Functionen der Gröfsen $\xi_\lambda$ eingeführt waren, entspricht nicht allein jedem Werthesysteme aus dem gemeinsamen Convergenzbereiche der gefundenen Reihen eine bestimmte Stelle $(x_\lambda)$, sondern es gehört auch zu jedem dieser Werthesysteme $x_1, x_2, \ldots x_{n+m}$ eine bestimmte Stelle $(t)$. Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ eine Stelle des gemeinsamen Giltigkeitsbereiches der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$, welcher die Stelle $(a_1', a_2', \ldots a_{n+m}')$ entspricht, so existiren auch $(n+m)$ convergente Reihen

$$x_\lambda - a_\lambda' = \mathfrak{P}_\lambda'(t_1, t_2, \ldots t_m | (\alpha)) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n+m),$$

und wenn $m$ der neuen Reihen $\mathfrak{P}_\lambda'$ die Bedingung erfüllen, dafs eine der Determinanten $m^{\text{ter}}$ Ordnung aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_1'}{\partial t_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{n+m}'}{\partial t_1}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_1'}{\partial t_m}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{n+m}'}{\partial t_m}\right) \end{matrix} \right\|_{(\alpha)}$$

z. B. die aus den letzten $m$ Verticalreihen gebildete nicht verschwindet, so kann man die $m$ Gröfsen $t_\mu - \alpha_\mu$ durch Potenzreihen in den $m$ Gröfsen $\xi_{n+\mu}' = x_{n+\mu} - a_{n+\mu}'$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ darstellen und die Substitution dieser Reihen in die $n$ übrigen gibt $n$ gleichzeitig convergente Potenzreihen:

$$x_\nu - a_\nu' = \mathfrak{P}_\nu(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} | a_{n+1}', a_{n+2}', \ldots a_{n+m}')$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n). —$$

Wir wissen bereits, dafs im Falle einer Gleichung

$$G(x_1, x_2, \ldots x_{n+m}) = 0,$$

aus welcher für $x_1$ eine Potenzreihe

$$x_1 - a_1 = \mathfrak{P}_1(x_2, x_3, \ldots x_{n+m} | a_2, a_3, \ldots a_{n+m})$$

entstammt sein mag, alle in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_{n+m})$ liegenden Stellen, welche dem durch die Gleichung definirten Gebilde angehören, aus der Potenzreihe hervorgehen. Dieser Satz gilt auch, wenn $n$ Gleichungen mit $n+m$ Variabeln gegeben sind und an einer Stelle $(a)$ $n$ Potenzreihen

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} | a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+m})$$

existiren, welche diesen Gleichungen genügen.

Weil dann die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1,n} \\ A_{12}, & A_{22}, & \ldots & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein mufs, gibt es gewifs eine Gröfse $A_{1,\nu}$, welche nicht verschwindet, z. B. $A_{11}$. Entwickelt man dann zunächst aus der Gleichung:

$$A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \cdots + A_{1,n+m}\xi_{n+m} + (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{1,2} + \cdots = 0$$

$\xi_1$ als eine Potenzreihe in den Variabeln $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n+m}$

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n+m})$$

und substituirt dieselbe in die übrigen $n-1$ Gleichungen, so entsteht ein System:

$$\begin{aligned} A'_{22}\xi_2 + \cdots + A'_{2,n+m}\xi_{n+m} + \chi_2(\xi_2, \ldots \xi_{n+m}) &= 0 \\ A'_{32}\xi_2 + \cdots + A'_{3,n+m}\xi_{n+m} + \chi_3(\xi_2, \ldots \xi_{n+m}) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ A'_{n,2}\xi_2 + \cdots + A'_{n,n+m}\xi_{n+m} + \chi_n(\xi_2, \ldots \xi_{n+m}) &= 0, \end{aligned} \tag{$\alpha$}$$

welches dieselbe Behandlung zuläfst wie das gegebene, wenn nur eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Matrix

$$\begin{Vmatrix} A'_{22} & \ldots & A'_{2,n+m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ A'_{n,2} & \ldots & A'_{n,n+m} \end{Vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Bemerkt man, dafs die Elemente der aus den ersten $(n-1)$ Verticalreihen gebildeten Determinante gefunden werden, indem man den Ausdruck

$$\xi_1 = \frac{-1}{A_{11}}(A_{12}\xi_2 + \cdots + A_{1,n+m}\xi_{n+m})$$

in den Gleichungen

$$A_{\nu,1}\xi_1 + A_{\nu,2}\xi_2 + \cdots + A_{\nu,n+m}\xi_{n+m} + (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+m})_{\nu,2} + \cdots = 0$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots n)$$

substituirt und die Coefficienten von $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n+m}$ sucht, wobei die Glieder höherer als der ersten Dimension nicht in Betracht kommen, so ist klar, dafs die in Rede stehende Determinante in den $A'$ auch nicht verschwinden kann.

Dann aber gibt es $(n-1)$ Potenzreihen:

$$\xi_\nu = \mathfrak{P}'_\nu(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots \xi_{n+m}) \quad (\nu = 2, 3, \ldots n),$$

und wenn aus diesen alle möglichen Werthesysteme einer Umgebung der Stelle (0) zu entnehmen sind, welche den Gleichungen $(\alpha)$ genügen, so werden alle den ursprünglichen Gleichungen genügenden Werthesysteme einer gewissen Umgebung der Stelle $(\xi) = (0)$ zu finden sein, wenn man den hier genannten Stellen $(\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n+m})$ denjenigen Werth $\xi_1$ zuordnet, welcher nach Substitution der $(n-1)$ Reihen $\mathfrak{P}'_\nu$ für $\xi_\nu$ aus der Reihe $\overline{\mathfrak{P}}_1(\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n+m})$ hervorgeht.

So ist durch den Schlufs von $(n-1)$ auf $n$ bewiesen, dafs die den gegebenen Gleichungen genügenden Stellen der Umgebung einer ersten Stelle $(a)$ alle aus den Potenzreihen $\mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$ gefunden werden. —

Angenommen, dafs in der Umgebung einer zweiten Stelle $(b_\lambda)$ des durch die Gleichungen $G_\nu = 0$ definirten Gebildes ein System neuer Reihen:

$$x_\lambda - b_\lambda = \mathfrak{P}'_\lambda(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m)$$

das Gebilde darstellt, und innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches dieser Reihen ein Bereich um eine Stelle $(\tau^{(0)})$ existirt, welchem nur Werthesysteme einer Umgebung der Stelle

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \ldots x_{n+m} = c_{n+m}$$

zugehören, die auch aus den Reihen

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$$

entspringen, wenn $t_1, t_2, \ldots t_m$ auf eine gewisse Umgebung einer Stelle $(t^{(0)})$ beschränkt wird, dann coincidiren die durch die beiden Systeme von Potenzreihen definirten Systeme von Stellen. Indem man ein solches System von Stellen ein *Element* des durch die Gleichungen $G_\nu = 0$ bestimmten Gebildes nennt, kann man sagen: die zwei Elemente *coincidiren* in der Umgebung der Stelle $(c_\lambda)$.

Weil die Gröfsen $t_\mu$ lineare Functionen von $x_\lambda - a_\lambda$ waren:

$$t_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n+m} A_{n+\mu,\lambda}(x_\lambda - a_\lambda) \quad (\mu = 1, 2, \ldots m),$$

die identisch in

$$\sum_{\lambda=1}^{n+m} A_{n+\mu,\lambda}(b_\lambda - a_\lambda + (x_\lambda - b_\lambda))$$

umzuformen sind, so lehrt die Substitution der Reihen für $x_\lambda - b_\lambda$, dafs $t_\mu$ in Potenzreihen nach den Gröfsen $\tau_\mu$ entwickelt werden können; und da den Stellen $(t^{(0)})$ und $(\tau^{(0)})$ gleichzeitig die Stelle $(a_\lambda)$ zugeordnet war, haben diese Reihen die Form

$$t_\mu - t_\mu^{(0)} = \mathfrak{p}_\mu(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m \,|\, (\tau^{(0)})),$$

wo $\mathfrak{p}_\mu$ kein constantes Glied enthält. — Die Ausdrücke

$$a_\lambda + \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$$

werden mit Hilfe dieser Reihen in $b_\lambda + \mathfrak{P}_\lambda'(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m)$ übergehen.

Da die Gröfsen $\tau_\mu$ lineare Functionen von $x_\lambda - b_\lambda$ sind, existiren auch $m$ Potenzreihen

$$\tau_\mu - \tau_\mu^{(0)} = \mathfrak{p}_\mu'(t_1, t_2, \ldots t_m \,|\, (t^{(0)})),$$

die durch Umkehrung der früheren Reihen

$$t_\mu - t_\mu^{(0)} = \sum_{(\nu)}^{\infty} e^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} (\tau_1 - \tau_1^{(0)})^{\nu_1} (\tau_2 - \tau_2^{(0)})^{\nu_2} \cdots (\tau_m - \tau_m^{(0)})^{\nu_m}$$

zu gewinnen sein müssen, weil zu einem Werthesysteme der $t$ nur ein bestimmtes System der $\tau$ gehören kann und umgekehrt. Dazu mufs nothwendig die Determinante

$$\begin{vmatrix} e^{(1)}_{1,0,\ldots 0} & \ldots & e^{(1)}_{0,0,\ldots 0,1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ e^{(m)}_{1,0,\ldots 0} & \ldots & e^{(m)}_{0,0,\ldots 0,1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein.

Wenn darnach zwei Elemente eines durch $n$ Gleichungen $G_\nu = 0$ definirten Gebildes in der Umgebung einer Stelle $(a_\lambda)$ convergiren und die Werthe $a_\lambda$ für $t_\mu = \alpha_\mu$ und $\tau_\mu = \beta_\mu$ aus den Elementen entspringen, dann gibt es $m$ Potenzreihen

$$t_\mu - \alpha_\mu = \mathfrak{p}_\mu(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m \,|\, (\beta_\mu)),$$

welche das erste Element in das zweite überführen, und das zweite ist umgekehrt durch die aus diesen Reihen hervorgehenden Reihen

$$\tau_\mu - \beta_\mu = \mathfrak{p}_\mu'(t_1, t_2, \ldots t_m \,|\, (\alpha_\mu))$$

in das erste zu transformiren.

Damit ist klar, wie man ein Element:

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m) \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

fortzusetzen hat. Man greife aus dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ eine Stelle $(\alpha_\mu)$ heraus, setze dann anstatt $t_\mu$ $\alpha_\mu + (t_\mu - \alpha_\mu)$ und ordne die Reihen nach Potenzen von $t_\mu - \alpha_\mu$, führe statt $t_\mu - \alpha_\mu$ $m$ convergente Potenzreihen

$$\mathfrak{p}_\mu(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m \,|\, (\beta_\mu))$$

ohne constantes Glied ein, so entstehen die Reihen

$$x_\lambda - c_\lambda = \mathfrak{P}'_\lambda(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m | (\beta_\mu)).$$

Setzt man schliefslich $\tau_\mu - \beta_\mu = u_\mu$, so folgt die frühere Form

$$x_\lambda - c_\lambda = \mathfrak{P}'_\lambda(u_1, u_2, \ldots u_m),$$

und dieses Element coincidirt mit dem ersten in der Umgebung von $(c_\lambda)$. Die somit anstatt $t_\mu$ eingeführten Reihen

$$t_\mu = \alpha_\mu + \mathfrak{p}_\mu(u_1, u_2, \ldots u_m)$$

haben aber nothwendig die Eigenthümlichkeit, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial u_2}, & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{p}_m}{\partial u_1}, & \frac{\partial \mathfrak{p}_m}{\partial u_2}, & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{p}_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

an der Stelle $u_1 = u_2 = \cdots = u_m = 0$ nicht verschwindet. —

Stellt man unabhängig von den ursprünglichen Gleichungen $G_\nu = 0$ als Definition eines monogenen analytischen Gebildes die Gesammtheit der durch ein Element:

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n + m)$$

und seiner Fortsetzungen gegebenen Werthesysteme auf, so hat man zu zeigen, dafs dieses Gebilde das durch die $n$ Gleichungen definirte umfafst. Nun wissen wir bereits, dafs überall, wo eine der Determinanten aus der Matrix

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial G_n}{\partial x_{n+m}} \end{matrix} \right\Vert$$

nicht verschwindet, $n$ der Gröfsen $x$ durch Potenzreihen in den übrigen $m$ Variabeln und alle Gröfsen $x$ durch Potenzreihen in $m$ neuen Variabeln darstellbar sind. Die Fortsetzungen dieser $n$ Reihen sind aber auch Fortsetzungen des Elementes, das nach der Anzahl der unabhängigen Variabeln $t$ eines $m^{ter}$ *Stufe in dem* $2(n+m)$*fach ausgedehnten Gebiete* der $(n+m)$ Gröfsen $x_\lambda$ genannt wird.

In der That: wenn die $n$ Reihen

$$x_\nu - a_\nu = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} | (a_{n+\mu}))$$

und das Element

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m)$$

in einem Bereiche um die Stelle $(a)$ dieselben Werthesysteme $(x)$ liefern, so werden die aus der Fortsetzung:

$$x_\lambda - c_\lambda = \mathfrak{P}'_\lambda(u_1, u_2, \ldots u_m)$$

abzuleitenden Potenzreihen

$$x_\nu - c_\nu = \mathfrak{P}'_\nu\,(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} \,|\, (c_{n+\mu}))$$

Fortsetzungen der ersten $n$ Reihen sein, denn wenn das erste und zweite Element in der Umgebung von $(c_\lambda)$ coincidiren, so stimmen auch die $n$ Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{P}}'_\nu$ für jede Stelle eines gewissen Bereiches um die Stelle $(c)$ überein und umgekehrt.

*Das analytische Gebilde $m^{ter}$ Stufe* in dem Gebiete von $m + n$ Gröfsen enthält aber mehr Stellen als das durch $n$ primitive Reihen

$$x_\nu - a_\nu = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_{n+1}, \ldots x_{n+m} \,|\, (a_{n+\mu})) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

definirte System analytischer Functionen, denn das Gebilde besitzt auch dort ein Element, wo die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1}, & \ldots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial G_n}{\partial x_1}, & \ldots & \dfrac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

verschwindet, sofern nur eine andere der Determinanten aus der oben genannten Matrix von Null verschieden ist.

Darum erheben wir das analytische Gebilde über die analytische Function des früheren Sinnes und treffen für die analytische Function folgende Festsetzung: Zu den Werthen $(c_{n+\mu})$ der unabhängigen Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}$ gehören bestimmte Werthe $c_1, c_2, \ldots c_n$ der durch ein System primitiver Elemente

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x_{n+1}, \ldots x_{n+m} \,|\, a_{n+1}, \ldots a_{n+m})$$

definirten analytischen Functionen, wenn in dem Gebiete der $(n + m)$ unabhängigen Gröfsen $x_\lambda$ ein Gebilde $m^{ter}$ Stufe mit einem in der Umgebung der Stelle $(c_\lambda)$ giltigen Elemente

$$x_\lambda - c_\lambda = \mathfrak{P}'_\lambda\,(u_1, u_2, \ldots u_m)$$

existirt, welches in jeder Umgebung der Stelle $(0)$ unendlich viele Werthesysteme $(x)$ mit der Häufungsstelle $(c_\lambda)$ definirt, die auch aus $n$ simultanen Elementen unseres Functionensystems hervorgehen. Darnach gehört z. B. die Stelle $(\infty)$ zu dem Giltigkeitsbereiche von $n$ analytischen Functionen, und sie nehmen dort den Werth $\infty$ an, wenn man ein Element der Form:

$$\frac{1}{x_\lambda} = \mathfrak{P}_\lambda(v_1, v_2, \ldots v_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n + m)$$

angeben kann, in dessen Convergenzbereiche eine Stelle $(v^{(0)})$ der Beschaffenheit liegt, dafs in der Umgebung der zugehörigen Stelle $(x^{(0)})$ dieses Element mit den simultanen Fortsetzungen unserer primitiven Reihen übereinstimmt.

So haben wir an der Hand der Aufgabe, die durch algebraische Gleichungen definirten Gröfsen als analytische Functionen der unabhängigen Variabeln zu erkennen, den Functionsbegriff und den eines Systems von Functionen zu dem Begriffe des analytischen Gebildes erweitert, und wenn dieses durch ein Element

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n + m)$$

definirt ist, so sind die Potenzreihen einzig und allein der Beschränkung zu unterwerfen, dafs eine der Determinanten aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_1}, & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{P}_{n+m}}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_m}, & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{P}_{n+m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, denn andernfalls könnte zwischen den Gröfsen $x_\lambda$ kein Zusammenhang bestehen. Wäre z. B. die aus den letzten $m$ Verticalreihen gebildete Determinante identisch Null, so könnte man niemals $t_1, t_2, \ldots t_m$ nach Potenzreihen von $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}$ entwickeln; und wenn die Gröfsen $t$ niemals durch Potenzreihen in $m$ der Gröfsen $x$ darzustellen sind, gibt es auch keine Elemente der Form:

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)} | (a^{(\mu)}),$$

wo unter den $x^{(\mu)}$ und $a^{(\mu)}$ Gröfsen $x_\lambda$ und $a_\mu$ zu verstehen sind, d. h. es bestünde zwischen den Gröfsen $x_\lambda$ kein Zusammenhang.

Diejenigen Stellen, wo alle Determinanten der genannten Art verschwinden, sind die *singulären Stellen* des Gebildes $m^{\text{ter}}$ Stufe. Im Falle das Gebilde durch eine algebraische Gleichung $G(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten definirt ist, sind diese singulären Stellen diejenigen, wo man zur Darstellung des Gebildes mehrere Elemente oder Functionenpaare bedarf.

Wir kommen in dem letzten Capitel noch einmal auf das durch eine irreductible algebraische Gleichung definirte Gebilde $m^{\text{ter}}$ Stufe in dem Gebiete von $m+1$ Gröfsen zurück, um auch der hier unberücksichtigt gebliebenen Frage nach der Monogenität eines solchen Gebildes unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden.

## II. Abschnitt.

## Durch Differentialgleichungen definirte analytische Functionen.

### § 43. Totale Differentialgleichungen.

Die eingeführten analytischen Functionen besitzen an allen nicht singulären Stellen Differentialquotienten jeder Ordnung nach den unabhängigen Variabeln. Wenn aber $(a_\lambda)$ eine singuläre Stelle ist, in deren Umgebung wohl ein Element

$$x_\lambda - a_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1, t_2, \dots t_m) \quad (\lambda = 1, 2 \dots n + m)$$

aufzustellen ist, auf dafs

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial t_\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_{n+\mu'}}{\partial t_\mu}$$

existirt, kann man aber aus den letzten $m$ Potenzreihen $t_1, t_2, \dots t_m$ nicht nach Potenzen von $(x_{n+\mu} - a_{n+\mu})$ $(\mu = 1, 2 \dots m)$ entwickeln, so wird der Differentialquotient

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_{n+\mu}} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial t_\mu}{\partial x_{n+\mu}}$$

an der Stelle $(a_\lambda)$ nicht durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m} \mid (a_{n+\mu}))$$

darstellbar sein; d. h. der Differentialquotient der analytischen Function $x_\nu$ von $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$ nach $x_{n+\mu}$ wird an der Stelle $(a_\lambda)$ nicht von regulärem Verhalten sein.

Soviel steht aber fest, dafs wir die Ableitungen unserer Functionen als vollständig definirte analytische Functionen in Rechnung zu ziehen haben. Wenn die Ableitungen mit der Function gegeben sind, kann man fragen, ob eine vorgelegte analytische Function die Ableitung einer gleichartigen Function sein kann, und allgemeiner mufs man untersuchen, ob man $n$ analytische Functionen $x_\nu$ von $m$ unabhängigen Variabeln so bestimmen kann, dafs zwischen den unabhängigen Variabeln $x_{n+\mu}$ $(\mu = 1, 2 \dots m)$ und den Gröfsen $x_\nu$ $(\nu = 1, 2 \dots n)$ und einer nach den $x_{n+\mu}$ genommenen bestimmten Anzahl von Ableitungen verschiedener Ordnung derselben eine Reihe von Beziehungen besteht, die durch die arithmetischen Operationen mit den in Rede stehenden Gröfsen dargestellt sind.

Gibt es Functionen dieser Art, so heifsen sie *Integralfunctionen.* Wir nehmen zunächst an, dafs nur eine unabhängige Variable $x$ in Betracht komme. Wir nennen die $n$ von $x$ abhängigen Gröfsen $x_1, x_2, \dots x_n$ und setzen fest, dafs zwischen diesen Gröfsen $x$ selbst

und den ersten $m_1$ Ableitungen von $x_1$ nach $x$, den $m_2$ ersten Ableitungen von $x_2$ nach $x$, und endlich zwischen den $m_n$ ersten Ableitungen von $x_n$ nach $x$ $n$ in den höchsten Differentialquotienten algebraische Gleichungen bestehen:

$$F_\nu\left(x, x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m_1}x_1}{dx^{m_1}}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{dx_n}{dx}, \frac{d^2x_n}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m_n}x_n}{dx^{m_n}}\right) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen der übrigen Gröfsen sind.

Führen wir an Stelle der ersten $(m_\nu - 1)$ Ableitungen:

$$\frac{dx_\nu}{dx}, \frac{d^2x_\nu}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m_\nu-1}x_\nu}{dx^{m_\nu-1}}$$

die neuen Gröfsen:

$$x_\nu^{(2)},\ x_\nu^{(3)} = \frac{dx_\nu^{(2)}}{dx}, \ldots x_\nu^{(m_\nu)} = \frac{dx_\nu^{(m_\nu-1)}}{dx}$$

ein und schreiben für $x_\nu$ $x_\nu^{(1)}$, so erhalten wir:

$$n + \sum_{\nu=1}^{n}(m_\nu - 1) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = M$$

Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F_\nu\left(x;\ x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots x_1^{(m_1)}, \frac{dx_1^{(m_1)}}{dx}; \ldots x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots x_n^{(m_n)}, \frac{dx_n^{(m_n)}}{dx}\right) = 0$$

$$x_\nu^{(2)} - \frac{dx_\nu^{(1)}}{dx} = 0,\ x_\nu^{(3)} - \frac{dx_\nu^{(2)}}{dx} = 0, \ldots x_\nu^{(m_\nu)} - \frac{dx_\nu^{(m_\nu-1)}}{dx} = 0$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

mit $M$ abhängigen Gröfsen $x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots x_\nu^{(m_\nu)}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$.

Dieses System ersetzen wir allgemeiner durch ein anderes gleicher Gestalt:

$$F_\nu\left(x;\ x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n).$$

Wenn die ursprünglichen Gleichungen nicht alle die höchsten in dem Systeme vorkommenden Differentialquotienten enthalten sollten, so sind sie nicht unmittelbar auf diese Form zu bringen, doch wird man mit Hilfe von Differentiationen der gegebenen Gleichungen stets ein System unserer Art bilden können. Hierauf hat man aber zu zeigen, dafs die Functionen, welche diesem Systeme genügen, auch das erste erfüllen und man wird ausfindig machen müssen, wie sich aus den durch das neue System bestimmten Functionen diejenigen ableiten lassen, welche

den gegebenen Gleichungen genügen. Diese Aufgaben lassen wir hier aufser Acht. —

Wir setzen voraus, dafs man aus den neuen Gleichungen $F_\nu = 0$ bei der Elimination von $n - 1$ Differentialquotienten niemals eine Gleichung in $x$ und den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ allein ableiten könne, sondern dafs das System der Eliminationsresultate die Form erhält:

$$G_\nu\left(x;\, x_1,\, x_2, \cdots x_n,\, \frac{dx_\nu}{dx}\right) = 0,$$

denn wenn einmal eine Gleichung $G_\nu(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ hervorginge, so könnte man diese zur Reduction des Gleichungssystems $F_\nu = 0$ auf ein anderes benützen, in welchem die Anzahl von Differentialgleichungen und Variabeln um Eins vermindert ist.

Das System $G_\nu = 0$, dem offenbar alle Lösungen der Differentialgleichungen $F_\nu = 0$ genügen, wollen wir durch ein oder mehrere *Normalgleichungssysteme* der schon oben genannten Art ersetzen.

Bezeichnet man die Differentialquotienten $\frac{dx_\nu}{dx}$ mit $y_\nu$ und führt eine neue Gröſe $x_{n+1}$ ein, die durch den Ausdruck

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n$$

mit $n$ willkürlichen Constanten definirt sei, so kann man zunächst eine algebraische Gleichung ableiten, welcher $x_{n+1}$ genügt. Ist die Function $G_\nu(x, x_1, x_2, \ldots x_n, y_\nu)$ in $y_\nu$ vom $m_\nu^{\text{ten}}$ Grade und sind die Lösungen der Gleichung $G_\nu = 0$

$$y_\nu^{(1)},\; y_\nu^{(2)},\; \ldots\; y_\nu^{(m_\nu)},$$

so ist das Product

$$\Phi(x_{n+1}) = \prod\left(x_{n+1} - (a_1 y_1^{(\mu_1)} + a_2 y_2^{(\mu_2)} + \cdots + a_n y_n^{(\mu_n)})\right) \qquad (\alpha)$$

über alle Factoren $x_{n+1} - (a_1 y_1^{(\mu_1)} + \cdots + a_n y_n^{(\mu_n)})$, die bei den verschiedenen Combinationen der Lösungen $y_\nu^{(m_\nu)}$ hervorgehen, eine ganze rationale Function von $x_{n+1}$. Die neue Gröfse $x_{n+1}$ genügt der Gleichung $\Phi(x_{n+1}) = 0$.

Sind die Gleichungen $F_\nu = 0$ und $G_\nu = 0$ in den Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ rational, so werden die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $x_{n+1}$ rationale Functionen der Coefficienten der Gleichungen $G_\nu = 0$ und somit rational in $x, x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n$ sein. Zerlegt man hierauf das Product in seine irreductiblen Factoren:

$$H(x_{n+1};\, x,\, x_1, \ldots x_n,\, a_1,\, a_2, \ldots a_n),$$

so sind deren Nullstellen

$$x_{n+1}^{(i)} = a_1 y_1^{(i)} + a_2 y_2^{(i)} + \cdots + a_n y_n^{(i)}.$$

Genügt ein System von Gröfsen $y_\nu^{(i)}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ aus einer Wurzel der Gleichung $H = 0$ gleichzeitig den Gleichungen $G_\nu = 0$ und $F_\nu = 0$,

so wird wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung $H=0$ jedes in einer weiteren Lösung

$$x^{(j)}_{n+1} = a_1 y_1^{(j)} + a_2 y_2^{(j)} + \cdots + a_n y_n^{(j)}$$

auftretende System von Lösungen der Gleichungen $G_\nu = 0$ ebenfalls die ursprünglichen Gleichungen erfüllen, d. h. die Beziehung $H=0$, welche zwischen $n$ Lösungen $y_\nu^{(i)}$ der Gleichungen $F_\nu = 0$ besteht, bleibt erhalten, wenn man das System von $n$ Functionen $y_\nu^{(i)}$ auf gleichem Wege fortsetzt.

Damit leuchtet ein, dafs aus der irreductiblen Gleichung $H=0$ ein System zusammengehöriger Werthe für $y_1, y_2, \ldots y_n$ entspringt, und jedenfalls lassen sich die Lösungen der Gleichungen $G_\nu = 0$ in Gruppen ordnen, denen je ein irreductibler Factor entspricht.

Setzt man

$$H(x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{k} (x_{n+1} - (a_1 y_1^{(i)} + a_2 y_2^{(i)} + \cdots + a_n y_n^{(i)})),$$

und bildet

$$-\frac{\partial H}{\partial a_\nu} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_\nu^{(i)} H}{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(i)} + a_2 y_2^{(i)} + \cdots + a_n y_n^{(i)})}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{H}{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(i)} + a_2 y_2^{(i)} + \cdots + a_n y_n^{(i)})},$$

und sind die willkürlichen Constanten $a_\nu$ so gewählt, dafs $\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}$ für keine der Wurzeln $x^{(i)}_{n+1}$ verschwindet, so wird

$$-\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial a_\nu}}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}}\right) = y_\nu^{(i)},$$

d. h. jeder Lösung der Gleichung $H(x_{n+1}) = 0$ entspricht ein Werthesystem:

$$\frac{dx_\nu}{dx} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial a_\nu}}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}} = \frac{H_\nu(x, x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1})}{\frac{\partial H(x, x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}},$$

und darum sind die gegebenen Gleichungen $G_\nu = 0$ durch ebensoviele Gleichungssysteme der Form

$$H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx_\nu}{dx} = \frac{H_\nu}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

zu ersetzen, als irreductible Factoren in dem ursprünglichem Producte $(\alpha)$ enthalten sind.

Die willkürlichen Constanten $a$ sind hier wieder verschwunden, weil wir ihnen solche bestimmte Werthe beigelegt dachten, dafs die Discriminante von $H$ nicht identisch verschwindet.

Die genannte *canonische Form* eines Systems von $n$ Differentialgleichungen mit $n$ abhängigen und einer unabhängigen Variabeln läfst sich noch dahin modificiren, dafs man die hinzugetretene irreductible algebraische Gleichung $H=0$ für die Hilfsgröfse $x_{n+1}$ durch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Differentialgleichung ersetzt. Durch Differentiation der Gleichung $H=0$ nach $x$ folgt:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{dx}}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}} = \frac{H_{n+1}(x, x_1 \ldots x_{n+1})}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}},$$

und umgekehrt mufs mit den $(n+1)$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_\nu}{dx} = \frac{H_\nu}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad H = \text{const.}$$

sein. Wir werden gleich sehen, dafs wir dieser Constanten den Werth Null beizulegen haben.

Der Vortheil des neuen Systems von Differentialgleichungen gegenüber dem canonischen beruht darin, dafs in demselben die Variablen Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ gleichberechtigt erscheinen.

Indem wir $x$ durch $x_0$ bezeichnen und eine weitere Variable $t$ durch die Gleichung

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} = H_0$$

einführen, erhalten wir das System von $(n+2)$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = H_\nu(x_0, x_1, \ldots x_{n+1}) \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n+1),$$

wo die Function bis auf $H_{\nu+1}$ ganze rationale Functionen von $x_{n+1}$ sind, welche die Variable $t$ nicht enthalten.

Es handelt sich nun um den Beweis, dafs man das canonische System identisch erfüllen kann, indem man $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ in der Umgebung einer Stelle $x = c$ durch convergente Potenzreihen darstellt, die für $x = c$ die Werthe $c_1, c_2, \ldots c_{n+1}$ annehmen, wo $c_1, c_2, \ldots c_n$ einzig an die Bedingung geknüpft sind, dafs der diesen Werthen zufolge der Gleichung $H(x_{n+1}) = 0$ zugeordnete Werth $x_{n+1} = c_{n+1}$ keine vielfache Wurzel ist, da dann $\left(\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}\right)$ verschwände.

Bei einer derartigen Wahl der willkürlichen Constanten ist offenbar in der früheren Gleichung $H = \text{const.}$ die Constante gleich Null zu setzen.

Will man beweisen, dafs das dritte System von Differentialgleichungen formell durch Potenzreihen nach der Variablen $t$ zu erfüllen ist, so ordne man $t = 0$ solche Anfangswerthe $x_0, x_1 \dots x_{n+1}$ zu, dafs die Functionen $H_\nu$ nicht verschwinden. Andernfalls würden alle Gröfsen $x_\nu$ Constanten.

Die hier genannte Forderung betreffs der Constanten ist die natürliche Erweiterung der früheren, denn die Anfangswerthe, welche die Gleichungen

$$H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} = 0$$

erfüllen, machen vor Allem die Functionen

$$H_\nu = -\frac{\partial H}{\partial a_\nu} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_\nu^{(i)} H}{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(i)} + a_2 y_2^{(i)} + \cdots + a_n y_n^{(i)})}$$

zu Null, und die Function:

$$H_{n+1} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial x}\right) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial H}{\partial a_\nu}}{\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}}$$

scheint wohl unbestimmt zu sein, da ihr Werth die Form $\frac{0}{0}$ erhält, doch sie verschwindet ebenfalls für die Anfangswerthe, weil

$$dH = 0 = \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\,\frac{dx_\nu}{dx}\,dx + \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}\,\frac{dx_{n+1}}{dx}\,dx$$

ist.*)

Nach dieser Ableitung der verschiedenen Formen eines Systems von Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln gehen wir auf die dritte Form ein, setzen aber voraus, dafs in den $n$ Gleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = F_\nu(x_1, x_2, \dots x_n) \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

$F_\nu$ ganz allgemein analytische Functionen der $n$ Variabeln seien, deren Stetigkeitsbereich wenigstens theilweise zusammenfällt.

Bezeichnet $(c)$ eine Stelle dieses gemeinsamen Bereiches, so existirt

---

*) Aus diesem Umstande kann man schliefsen, dafs der angegebene Zähler in dem Ausdrucke für $H_{n+1}$ durch $\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}$ als Function von $x_{n+1}$ theilbar ist und überhaupt theilbar sein mufs, wenn die Coefficienten in den Gleichungen $G_\nu = 0$ rationale Functionen sind.

eine Umgebung derselben, in welcher jede der Functionen $F_\nu$ durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n \,|\, (c))$$

dargestellt wird. Es soll aber die Stelle $(c)$ nicht gerade eine solche sein, wo diese definirenden Elemente der analytischen Functionen alle den Werth Null annehmen.

Bildet man aus den gegebenen Gleichungen die höheren Ableitungen:

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu} F_\mu = F_\nu^{(2)}$$

$$\frac{d^3 x_\nu}{dt^3} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\nu^{(2)}}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\nu^{(2)}}{\partial x_\mu} F_\mu^{(2)} = F_\nu^{(3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^\varkappa x_\nu}{dt^2} = F_\nu^{(\varkappa)}$$

und beachtet, dafs für die analytische Function $x_\nu$ einer Variabeln $t$ — sofern $t = 0$ der Werth $x_\nu = c_\nu$ zugeordnet wird — die formelle Entwicklung

$$x_\nu - c_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{d^\varkappa x_\nu}{dt^\nu}\right) \frac{t^\varkappa}{\varkappa!}$$

gilt, so erhalten wir in unserem Falle die den Differentialgleichungen formell genügenden Reihen:

$$x_\nu - c_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} F_\nu^{(\varkappa)}(c_1, c_2, \ldots c_n) \cdot \frac{t^\varkappa}{\varkappa!} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

denen erst eine analytische Bedeutung zuzuschreiben ist, wenn gezeigt wird, dafs sie unter den für $F_\nu$ vorausgesetzten Bedingungen einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen.

Man sieht leicht, dafs die aufgestellten Reihen unsere Differentialgleichungen identisch erfüllen, denn wenn man in

$$F_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathfrak{P}_\nu\big(x_1, x_2 \ldots x_n \,|\, (c)\big) =$$
$$= \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} F_\nu}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}\right) \frac{(x_1 - c_1)^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{(x_2 - c_2)^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdots \frac{(x_n - c_n)^{\mu_n}}{\mu_n!}$$

die gewonnenen Reihen substituirt, so entsteht gerade die Reihe:

$$F_\nu^{(1)}(c_1, c_2 \ldots c_n) + F_\nu^{(2)}(c_1, c_2, \ldots c_n) \frac{t}{1} + F_\nu^{(3)}(c_1, c_2, \ldots c_n) \cdot \frac{t^3}{2!} + \cdots$$
$$= (F_\nu^{(1)}) + \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F_\nu^{(1)}}{\partial x_\mu} F_\mu^{(1)}\right) \cdot \frac{t}{1} +$$
$$+ \left(\sum_{\mu,\mu'} \frac{\partial^2 F_\nu^{(1)}}{\partial x_\mu \partial x_{\mu'}} F_\mu^{(1)} F_{\mu'}^{(1)} + \frac{\partial F_\nu^{(1)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial F_\mu^{(1)}}{\partial x_{\mu'}} F_\mu^{(1)}\right) \frac{t^2}{2!} + \cdots = \frac{dx_\nu}{dt}.$$

Die Coefficienten $F_\nu^{(\varkappa)}$ sind aus den gegebenen Functionen $F_\nu$ nur durch Addition und Multiplication entstanden, ob sie deshalb auch durch convergente Potenzreihen darzustellen sind, müssen wir erst untersuchen.

Convergiren die Reihen für $F_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ innerhalb des durch die Bedingungen:

$$|\xi_\nu| = |x_\nu - c_\nu| < R$$

definirten Bereiches und ist die obere Grenze der Werthe $|F_\nu|$ für alle Werthesysteme $x_1, x_2 \ldots x_n$, die aus den Gleichungen

$$|\xi_\nu| = |x_\nu - c_\nu| = r < R$$

hervorgehen, etwa gleich $g_\nu$, so ist der absolute Betrag jedes Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}_\nu$ gleich oder kleiner als der entsprechende Coefficient der Reihe für

$$\frac{g_\nu}{\left(1-\frac{\xi_1}{r}\right)\left(1-\frac{\xi_2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi_n}{r}\right)}.$$

Nehmen wir an, dafs die der Stelle $t=0$ zugeordneten Anfangswerthe für $x_1, x_2, \ldots x_n$ alle Null sind, was durch die linearen Substitutionen $x_\nu - c_\nu = \xi_\nu$ stets zu erreichen ist, so vergleichen wir die Reihe $\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für $F_\nu$ mit der für

$$\frac{g_\nu}{\left(1-\frac{x_1}{r}\right)\left(1-\frac{x_2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{r}\right)}.$$

Beachten wir, dafs

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x_\nu}{r}\right) > 1 - \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{r},$$

so werden die Coefficienten der für den Ausdruck $g_\nu \dfrac{1}{1-\frac{\sum x_\nu}{r}}$ giltigen Reihe gröfser als die der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Wenn deshalb aus den neuen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{g_\nu}{1-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{r}} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

in der Umgebung der Stelle $t=0$; $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ $n$ Functionenelemente hervorgehen, die einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen, so wird das umsomehr für die früheren Differentialgleichungen gelten.

Ist $g$ der gröfste Werth unter den $g_\nu$, so wird das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{g}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{r}}$$

umsomehr zu dem genannten Schlusse geeignet sein. Leitet man die diesem System genügenden Potenzreihen für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ab, indem man

$$\frac{d^\varkappa x}{dt^\varkappa} = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2\varkappa - 3) \cdot \left(\frac{g}{r}\right)^{\varkappa - 1} \frac{g}{\left(1 - \frac{\sum x_\nu}{r}\right)^{2\varkappa - 1}}$$

und

$$\left(\frac{d^\varkappa x}{dt^2}\right) = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2\varkappa - 3) \cdot g \left(\frac{g}{r}\right)^{\varkappa - 1}$$

bildet, so folgt $n$ mal dieselbe Reihe

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} g \left(\frac{g}{r}\right)^{\varkappa-1} \frac{(2\varkappa - 2)!}{2^{\varkappa-1}(\varkappa - 1)!\, \varkappa!} t^\varkappa,$$

doch weil der Quotient der Coefficienten von $t^\varkappa$ und $t^{\varkappa+1}$, nämlich

$$\frac{r}{g} \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa - 1},$$

gröſser bleibt als $\frac{r}{2g}$, so convergiren die gefundenen Reihen in dem Bereiche, wo

$$|t| < \frac{r}{2g},$$

und dieser Bereich ist darum, weil $r$ von Null verschieden und $g$ eine endliche angebbare Gröſse ist, nicht kleiner als jeder beliebig kleine Bereich.

Umsomehr müssen nun die früheren Reihen

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} F_\nu^{(1)}(0, 0 \ldots 0) \cdot \frac{t^\varkappa}{\varkappa!}$$

oder

$$x_\nu - c_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} F_\nu^{(1)}(c_1, c_2, \ldots c_n) \cdot \frac{t^\varkappa}{\varkappa!}$$

einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen. Wie groſs dieser Bereich ist, ist für unsere Untersuchungen ganz gleichgiltig, denn wir wissen, daſs die simultanen Fortsetzungen der gefundenen Elemente in derselben Beziehung zu einander stehen wie die primitiven, d. h. den Differentialgleichungen genügen.

Ist neben $n$ ersten Elementen ein zweites System

$$x_\nu - c_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} F_\nu^{(1)}(C_1, C_2, \ldots C_n) \cdot \frac{\tau^\varkappa}{\varkappa!}$$

gegeben, welches denselben Differentialgleichungen genügt, und läſst sich in dem gemeinsamen Convergenzbereiche dieser Reihen eine Stelle

($\tau^{(0)}$) angeben, in deren Umgebung das neue Functionensystem dieselben Werthe gibt wie das erste in der Umgebung einer Stelle $t^{(0)}$ ihres gemeinsamen Convergenzbereiches, so coincidiren daselbst die beiden Systeme von Potenzreihen; sie gehören demselben durch die Differentialgleichungen definirten analytischen Gebilde erster Stufe in dem Gebiete von $(n+1)$ Gröfsen an.

Durch diese Untersuchungen ist klar geworden, dafs die in Rede stehenden Differentialgleichungen wirklich wieder analytische Functionen definiren und man kann ebenso wie bei den durch algebraische Gleichungen definirten Gröfsen beweisen, dafs sie ausschliefslich analytische Functionen bestimmen, d. h. dafs alle Gröfsen $x_\nu$, welche die Differentialgleichungen erfüllen, durch Reihen der oben bestimmten Art auszudrücken sind.

Um diese Reihen zu finden, kann man sich auch der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen. Man setze für $x_\nu - c_\nu$ Potenzreihen mit unbestimmten Coefficienten

$$x_\nu - c_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa^{(\nu)} t^\varkappa$$

in die gegebenen Differentialgleichungen ein, entwickle die Substitutionsresultate nach Potenzen von $t$ und vergleiche die Coefficienten gleichnamiger Glieder in $t$. Bestimmt man die unbestimmten Coefficienten so, dafs die Differentialgleichungen erfüllt sind, so kann man auch wieder zeigen, dafs sie einen gemeinsamen Convergenzbereich aufweisen.

### § 44. Partielle Differentialgleichungen.

Den eben bezeichneten Weg wollen wir einschlagen, wenn ein System von $n$ algebraischen Differentialgleichungen vorgelegt ist, in welchen die $n$ zu bestimmenden Functionen

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

nicht blos von einer sondern von $m+1$ von einander unabhängigen Variabeln

$$t_0, t_1, \dots t_m$$

abhängen.

Die in den Differentialgleichungen auftretenden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m} x_\nu}{\partial t_0^{\alpha_0} \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_m^{\alpha_m}} \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

seien höchstens von den Ordnungen $m_\nu$ $(\nu = 1, 2 \dots n)$, so dafs

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < m_\nu$$

ist und wir setzen voraus, dafs die Ableitungen höchster Ordnung nach einer der Variabeln, z. B.

$$\frac{\partial^{m_1} x_1}{\partial t_0^{m_1}}, \quad \frac{\partial^{m_2} x_2}{\partial t_0^{m_2}}, \quad \dots \frac{\partial^{m_n} x_n}{\partial t_0^{m_n}}$$

wirklich in den Gleichungen vorkommen und diese nach den genannten Ableitungen auch lösbar seien.

Führt man dann wieder eine Hilfsfunction

$$x_0 = a_0 \frac{\partial^{m_1} x_1}{\partial t_0^{m_1}} + \dots + a_n \frac{\partial^{m_n} x_n}{\partial t_0^{m_n}}$$

ein, so genügt dieselbe einer algebraischen Gleichung $\Phi(x_0) = 0$ und wenn $H_0(x_0)$ ein irreductibler Factor von $\Phi(x_0)$ ist, so kann man die gegebenen Differentialgleichungen wieder durch canonische Systeme der Form:

$$H_0(x_0) = 0$$

$$\frac{\partial^{m_\nu} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu}} - \frac{H_\nu}{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

ersetzen, worin die Function $H_\nu$, $\frac{\partial H_0}{\partial x_0}$ ganze rationale Functionen der Variabeln $t_0, t_1, \dots t_m$ und derjenigen Ableitungen:

$$\frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m} x_\nu}{\partial t_0^{\alpha_0} \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_m^{\alpha_m}} = x_{\nu;\, \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m}$$

sind, in welchen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots a_m \leqq m_\nu, \quad \alpha_0 < m_\nu$$

ist.

Es sollen nun $(m+1)$ Potenzreihen

$$x_\nu = \sum_{(\alpha)=0}^{\infty} a^{(\nu)}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m} \frac{(t_0 - c_0)^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \frac{(t_1 - c_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(t_m - c_m)^{\alpha_m}}{\alpha_m!}$$

$$= \mathfrak{P}_\nu(t_0, t_1, \dots t_m \,|\, (c)) = \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \overset{(\alpha_0)}{\mathfrak{P}_\nu} \frac{(t_0 - c_0)^{\alpha_0}}{\alpha_0!}$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \dots n)$$

so bestimmt werden, dafs diese das canonische System von Differentialgleichungen befriedigen, d. h. man soll die vorderhand noch unbestimmt gelassenen Gröfsen

$$c_0, c_1, \dots c_m, a^{(\nu)}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m}$$

derartig wählen, dafs die Differentialgleichungen durch die Reihen befriedigt werden.

Entwickelt man zunächst $H_0$ nach Potenzen von $t_0 - c_0$, $t_1 - c_1$,

$\ldots t_m - c_m$, so erhält man das constante Glied der Entwicklung, indem man in $H_0$

$$t_0 = c_0,\ t_1 = c_1,\ \ldots t_m = c_m$$

$$x_{\nu;\,\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_m} = a^{(\nu)}_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_m} \quad \text{und} \quad x_0 = a^{(0)}_{0,0\ldots 0}$$

setzt. Das so zu bestimmende Glied — es heiſse $h_0$ — muſs für sich verschwinden.

Entwickelt man $H_0$ blos nach Potenzen von $(t_0 - c_0)$ und will man den Coefficienten von $(t_0 - c_0)^0$, so muſs man in $H_0$

$$t_0 = c_0 \quad \text{und} \quad x_{\nu;\,\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_m} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} \overset{(\alpha_0)}{\mathfrak{P}}_\nu}{\partial t_1^{\alpha_1}\,\partial t_2^{\alpha_2}\ldots\partial t_m^{\alpha_m}} \quad \text{und} \quad x_0 = \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0$$

setzen; der Coefficient wird also eine ganze Function von $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0$:

$$H(\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0)$$

und deren Coefficienten sind wieder ganze Functionen von $t_1, t_2, \ldots t_m$ und den Gröſsen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\nu,\ \overset{(1)}{\mathfrak{P}}_\nu,\ \ldots \overset{(m_\nu-1)}{\mathfrak{P}}_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots m)$$

und Ableitungen dieser. Für

$$t_1 = c_1,\ t_2 = c_2,\ \ldots t_m = c_m$$

geht $\overline{H}(\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0)$ in $h_0$ über.

Offenbar hat man nun $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0$ so zu bestimmen, daſs auch $\overline{H}(\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0)$ verschwindet, und $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0$ eine Potenzreihe von $t_1 - c_1, \ldots t_m - c_m$ wird, die für $t_1 = c_1,\ t_2 = c_2,\ \ldots t_m = c_m$ den Werth $a^{(0)}_{0,0\ldots 0}$ erhält. Das ist aber immer möglich, wenn man die in $h_0$ vorkommenden Gröſsen

$$c_0,\ c_1,\ \ldots c_m \quad \text{und} \quad a^{(\nu)}_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_m}$$

so beschränkt, daſs die Gleichung $h_0 = 0$ eine endliche und einfache Lösung $a^{(0)}_{0,0\ldots 0}$ zuläſst. Im Übrigen kann man die $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$ Functionen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\nu(t_1, t_2 \ldots t_m|(c)),\ \ldots \overset{(m_\nu-1)}{\mathfrak{P}}_\nu(t_1, t_2, \ldots t_m|(c)) \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

willkürlich wählen. Wenn sie nur einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen, dann hat auch die Reihe

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_0(t_1, \ldots t_m|(c))$$

einen Convergenzbereich.

Differentiirt man die Ausdrücke

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0}\frac{\partial^{m_\nu} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu}} - H_\nu,$$

die wir als Functionen von $t_0$ ansehen, $\mu$ mal nach $t_0$, so erhält die $\mu^{\text{te}}$ Ableitung die Gestalt:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0} \frac{\partial^{m_\nu+\mu} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu+\mu}} + H_\nu^{(\mu)},$$

wo $H_\nu^{(\mu)}$ eine ganze Function von $t_0, t_1, \ldots t_m$ und denjenigen Ableitungen

$$x_{\nu;\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m}$$

ist, in welchen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \leqq m_\nu + \mu \quad \text{und} \quad \alpha_0 < m_\nu + \mu.$$

Daher hat der Coefficient von $\frac{(t_0 - c_0)^\mu}{\mu!}$ in der Entwicklung von

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0} \frac{\partial^{m_\nu} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu}} - H_\nu$$

die Form:

$$\overline{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}} \overset{(m_\nu+\mu)}{\mathfrak{P}_\nu} + \overline{H}_\nu^{(\mu)},$$

wenn $\overline{\frac{\partial H}{\partial x_0}}$ und $\overline{H}_\nu^{(\mu)}$ die Werthe von $\frac{\partial H_0}{\partial x_0}$ und $H_\nu^{(\mu)}$ für

$$t_0 = c_0 \quad \text{und} \quad x_{\nu;\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m} \overset{(\alpha_0)}{\mathfrak{P}_\nu}}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_m^{\alpha_m}}$$

bezeichnen.

Die $\mu^{\text{te}}$ Ableitung von $H_0$ nach $t_0$ hat die Form:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0} \frac{\partial^\mu x_0}{\partial t_0^\mu} + H_0^{(\mu)}.$$

Versteht man wieder unter $\overline{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}}$ und $\overline{H}_0^{(\mu)}$ die Ausdrücke, welche bei den oben genannten Substitutionen aus $\frac{\partial H_0}{\partial x_0}$ und $H_0^{(\mu)}$ hervorgehen, so lautet der Coefficient von $\frac{(t_0 - c_0)^\mu}{\mu!}$ in der Entwicklung von $H_0$ nach Potenzen von $(t_0 - c_0)$:

$$\overline{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}} \overset{(\mu)}{\mathfrak{P}_0} + \overline{H}_0^{(\mu)}.$$

Sollen nun die gegebenen Differentialgleichungen durch unsere Reihen erfüllt werden, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\overline{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}} \overset{(m_\nu+\mu)}{\mathfrak{P}_\nu} + \overline{H}_\nu^{(\mu)} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n), \qquad (\alpha)$$

doch weil $\overline{\frac{\partial H_0}{\partial x_0}}$ für $t_1 = c_1, \ldots t_m = c_m$ nicht verschwindet, kann man

$$\overset{(m_\nu+\mu)}{\mathfrak{P}_\nu} = -\frac{\overline{H}_\nu^{(\mu)}}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_0}} \quad \begin{pmatrix}\nu = 1,\, 2\,\ldots n\\ \mu = 0,\, 1,\, 2\ldots\end{pmatrix}$$

und

$$\overset{(1+\mu)}{\mathfrak{P}_0} = -\frac{\overline{H}_0^{(\mu)}}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_0}} \quad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$$

durch bestimmte Potenzreihen von $(t_1 - c_1)$, $(t_2 - c_2)$, $\ldots (t_m - c_m)$ darstellen, wenn nur

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}_0} \quad \text{und} \quad \overset{(0)}{\mathfrak{P}_\nu},\, \overset{(1)}{\mathfrak{P}_\nu},\, \ldots\, \overset{(m_\nu-1)}{\mathfrak{P}_\nu} \quad (\nu = 1,\, 2\, \ldots n)$$

bestimmt sind.

Nimmt man somit die Gröfsen $c_0, c_1, \ldots c_m$ und die in $h_0$ vorkommenden Gröfsen $a^{(\nu)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m}$ derart an, dafs die Gleichung $h_0 = 0$ eine einfache und endliche Wurzel $a^{(0)}_{0,0\ldots 0}$ besitzt und wählt im Übrigen die Functionen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}_\nu},\, \overset{(1)}{\mathfrak{P}_\nu} \ldots \overset{(m_\nu-1)}{\mathfrak{P}_\nu}$$

willkürlich, so kann man zunächst $\overset{(0)}{\mathfrak{P}_0}$ und dann $\overset{(1+\mu)}{\mathfrak{P}_0}$ und $\overset{(m_\nu+\mu)}{\mathfrak{P}_\nu}$ so bestimmen, dafs die Potenzreihen

$$x_\nu = \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \overset{(\alpha_0)}{\mathfrak{P}_\nu}(t_1,\, t_2,\, \ldots t_m \,|\, c_1,\, c_2,\, \ldots c_m)\, \frac{(t_0 - c_0)^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \quad (\nu = 0,\, 1,\, 2\ldots n)$$

den Differentialgleichungen und $H_0 = 0$ formell genügen. —

Setzt man

$$t_0 = c_0 + u_0,\; t_1 = c_1 + u_1,\; \ldots\; t_m = c_m + u_m$$

und versteht unter $x_{\nu;\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m}$ nunmehr die Potenzreihe von $u_0$, $u_1$, $\ldots u_m$, in welche

$$\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m} x_\nu}{\partial t_0^{\alpha_0}\, \partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_m^{\alpha_m}}$$

zu transformiren ist, und bezeichnet man

$$\text{1)} \qquad x_{\nu;\,1,0,\ldots0} = \frac{\partial x_\nu}{\partial u_0},\; x_{\nu;\,2,0,\ldots0} = \frac{\partial x_{\nu;\,1,0\ldots0}}{\partial u_0},\; \ldots$$

$$\ldots\; x_{\nu;\,m_\nu-1,0,\ldots0} = \frac{\partial x_{\nu;\,m_\nu-2,0,\ldots0}}{\partial u_0},$$

so werden die Differentialgleichungen des canonischen Systems:

$$\text{2)} \qquad \frac{\partial H_0}{\partial x_0}\, \frac{\partial x_{\nu;\,m_\nu-1,0\ldots0}}{\partial u_0} - H_\nu = 0\,.$$

Ferner ist aber für jede Gröfse $x_{\nu;\,\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_m}$, in welcher

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < m_\nu$$

und mindestens eine der Zahlen $\alpha$ von Null verschieden ist,

3) $$\frac{\partial x_{\nu;\,\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_m}}{\partial u_0} = \frac{\partial x_{\nu;\,\alpha_0+1,\,\alpha_2,\,\ldots\alpha_\mu-1,\,\ldots\alpha_m}}{\partial u_\mu}.$$

Beachtet man endlich, dafs neben $H_0 = 0$ die Gleichung:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0}\,\frac{\partial x_0}{\partial u_0} + H_0^{(1)} = 0$$

besteht, wo $H_0^{(1)}$ eine ganze Function von $u_0,\ u_1,\ \ldots u_m$ und denjenigen Gröfsen $x_{\nu;\,\alpha_0,\,\alpha_1,\,\ldots\alpha_m}$ bezeichnet, in welchen die Summe der $\alpha$ nicht gröfser als $m_\nu + 1$ und $\alpha_0 \leqq m_\nu$ ist, und eliminirt man mit Hilfe der früheren Gleichungen ($\alpha$) die Gröfsen

$$\frac{\partial^{m_\nu} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{m_\nu+1} x_\nu}{\partial t_0^{m_\nu}\partial t_\mu} \quad \begin{pmatrix}\nu = 1,\ 2\ldots n\\ \mu = 1,\ 2\ldots m\end{pmatrix},$$

so geht eine Gleichung

4) $$\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_0}\right)^k \frac{\partial x_0}{\partial u_0} - G_0 = 0$$

hervor, in der $G_0$ aus denselben Gröfsen zusammengesetzt ist wie $H_\nu$, und wo $k$ eine ganze Zahl bezeichnet.

Da noch

5) $$\frac{\partial t_0}{\partial u_0} = 1,\quad \frac{\partial t_1}{\partial u_0} = 0,\quad \ldots \frac{\partial t_m}{\partial u_0} = 0$$

ist, hat man in den Gleichungen 1) bis 5) für die Gröfsen $t_0,\ t_1,\ \ldots t_m$ und diejenigen Gröfsen

$$x_{\nu;\,\alpha_0,\,\alpha_1,\,\ldots\alpha_m},$$

in welchen $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m < m_\nu$, die Potenzreihen von $u_0,\ u_1\ \ldots\ u_m$ sind, ein System von Differentialgleichungen der Form:

$$G^{(\varrho)}(x_1, x_2, \ldots x_r)\frac{\partial x_\varrho}{\partial u_0} = G^{(\varrho)}_{0,0}(x_1,\ x_2,\ \ldots x_r) +$$

$$+\sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{1,\pi}(x_1, x_2, \ldots x_r)\cdot\frac{\partial x_\pi}{\partial u_1} + \cdots + \sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{m,\pi}(x_1,\ x_2,\ \ldots x_r)\cdot\frac{\partial x_\pi}{\partial u_m}$$

$$(\varrho = 1,\ 2\ldots r),$$

worin die Gröfsen $G^{(\varrho)}$, $G^{(\varrho)}_{0,0}$ und $G^{(\varrho)}_{\mu,\pi}$ Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots x_r$ sind. Wir beschäftigen uns mit diesem allgemeinen System.

Lauten die diesen Differentialgleichungen formell genügenden Potenzreihen

$$x_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(u_0,\ u_1,\ \ldots u_m) \quad (\varrho = 1,\ 2\ldots r),$$

und haben — wie in unserem früheren Falle — die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_\varrho(0,\ u_1, \ldots u_m) \quad (\varrho = 1,\ 2\ldots r)$$

einen gemeinsamen Convergenzbereich, gehört ferner die Stelle

$$\mathfrak{P}_\varrho(0,\ 0, \ldots 0) \quad (\varrho = 1,\ 2\ldots r)$$

dem Convergenzbereiche aller Reihen $G$ an und ist keine der Functionen $G^{(\varrho)}(x_1, x_2, \ldots x_r)$ für

$$x_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(0, 0 \ldots 0) \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

Null, dann besitzen — so behaupten wir — die Potenzreihen $\mathfrak{P}_\varrho(u_0, u_1, \ldots u_m)$ einen gemeinsamen Convergenzbereich und definiren somit $r$ analytische Functionen.

Zum Beweise gehen wir zunächst auf die Differentialgleichungen der einfacheren Gestalt:

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial u_0} = \sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{1,\pi}(x_1, \ldots x_r)\frac{\partial x_\pi}{\partial u_1} + \cdots + \sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{m,\pi}(x_1, \ldots x_r)\frac{\partial x_\pi}{\partial u_m}$$

$$(\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

ein und setzen fest, dafs in den formell gebildeten Reihen

$$x_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(u_0, u_1, \ldots u_m) = \sum_{\beta_0=0}^{\infty} \overset{(\beta_0)}{\mathfrak{P}}_\varrho(u_1 \ldots u_m) \cdot \frac{u_0^{\beta_0}}{\beta_0!}$$

die $r$ übrigens willkürlich zu fixirenden Reihen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho = \sum_{(\beta)=0}^{\infty} b^{(\varrho)}_{0,\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m} \frac{u_1^{\beta_1}}{\beta_1!} \cdots \frac{u_m^{\beta_m}}{\beta_m!}$$

kein constantes Glied $b^{(\varrho)}_{0,0,\ldots 0}$ besitzen, wonach die Stelle

$$x_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(0, 0 \ldots 0) \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

gewifs in dem Convergenzbereiche der Reihen $G^{(\varrho)}_{\mu,\pi}$ liegt. — Substituirt man die Reihen für $x_\varrho$ in die Differentialgleichungen, so wird zunächst

$$\overset{(1)}{\mathfrak{P}}_\varrho(u_1, \ldots u_m) = \sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{1\pi}(\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_1, \ldots \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\nu)\frac{\partial \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\pi}{\partial u_1} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\pi=1}^{r} G^{(\varrho)}_{m,\pi}(\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_1, \ldots \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\nu)\frac{\partial \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\pi}{\partial u_m}.$$

Hierauf ist jede der zu suchenden Reihen

$$\overset{(\beta_0)}{\mathfrak{P}}_\varrho(u_1, \ldots u_m) = \sum_{(\beta)=0}^{\infty} b^{(\varrho)}_{\beta_0,\beta_1,\ldots\beta_m} \frac{u_1^{\beta_1}}{\beta_1!} \cdots \frac{u_m^{\beta_m}}{\beta_m!}$$

$$(\varrho = 1, 2 \ldots r, \quad \alpha_0 = 1, 2, \ldots)$$

als ganze rationale Function einer endlichen Anzahl von Ableitungen der Gröfsen $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho$ nach $u_1, u_2, \ldots u_m$ auszudrücken, deren Coefficienten wiederum Potenzreihen von $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho$ sind. Doch die Coefficienten dieser letzten Reihen sind nur aus einer endlichen Anzahl von Coefficienten der Reihen $G^{(\varrho)}_{\mu,\pi}$ durch Addition und Multiplication zusammengesetzt, so dafs auch die Gröfsen

$$b^{(\varrho)}_{\beta_0,\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m}$$

nur ganze rationale Function einer endlichen Anzahl von Gröfsen $b^{(\varrho)}_{\beta_0, \beta_1, \dots \beta_m}$ und den Coefficienten von $G^{(\varrho)}_{\mu, \pi}$ werden.

Soll von den formell genügenden Reihen

$$x_\varrho = \sum_{(\beta)=0}^{\infty} b^{(\varrho)}_{\beta_0, \beta_1 \dots \beta_m} \frac{u_0^{\beta_1}}{\beta_1!} \frac{u_1^{\beta_1}}{\beta_2!} \cdots \frac{u_m^{\beta_m}}{\beta_m!}$$

gezeigt werden, dafs sie innerhalb eines Bereiches um die Stelle $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\dots u_m = 0$ gleichzeitig convergiren, so bringen wir dieselben mit den einem neuen System von Differentialgleichungen gleicher Gestalt:

$$\frac{\partial y_\varrho}{\partial u_0} = \sum_{\pi=1}^{r} \overline{G}^{(\varrho)}_{1, \pi}(y_1, y_2, \dots y_r) \frac{\partial y_\varrho}{\partial u_1} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\pi=1}^{r} \overline{G}^{(\varrho)}_{m, \pi}(y_1, y_2, \dots y_r) \frac{\partial y_\pi}{\partial u_m},$$

worin aber die Reihen $\overline{G}^{(\varrho)}_{\mu, \pi}$ nur positive Coefficienten besitzen, die nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Coefficienten von $G^{(\varrho)}_{\mu, \pi}$, genügenden Reihen in Vergleich.

Fixirt man anstatt der früheren Reihen $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho$ neue $\overset{(0)}{g}_\varrho$, deren ausschliefslich positive Coefficienten gegenüber denen von $\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho$ wieder von gröfserem oder gleichem Betrage sind, so werden die den letzten Differentialgleichungen genügenden Reihen für $y_\varrho$ nur positive Coefficienten haben, die nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der gleichnamigen Coefficienten in den Reihen für $x_\varrho$. Wenn demnach die Reihen für $y_\varrho$ gleichzeitig convergiren, ist das umsomehr bei den Reihen für $x_\varrho$ der Fall.

Zur Vereinfachung des letzten Systems von Differentialgleichungen bemerke man noch, dafs man einer positiven Gröfse $R$ der Beschaffenheit, dafs die Reihen $G^{(\varrho)}_{\mu, \pi}(x_1, x_2, \dots x_r)$ alle an der Stelle

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = R$$

convergiren, eine positive Gröfse $G$ so zuordnen kann, dafs die positiven Coefficienten der Reihe für

$$\frac{G}{1 - \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_r}{R}}$$

— die $\mathfrak{P}(y_1, y_2, \dots y_r)$ heifse — gröfser sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Coefficienten der Reihen $G^{(\varrho)}_{\mu, \pi}(x_1, x_2, \dots x_r)$ und andrerseits auch zwei positive Gröfsen $R'$ und $G'$ angebbar sind, so dafs die positiven Coefficienten der Reihe für

$$G' \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_m}{1 - \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_m}{R'}}$$

— sie heiſse $U(u_1, u_2, \dots u_m)$ — gröſser sind als die absoluten Beträge der gleichnamigen Coefficienten der Reihen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho(u_1, u_2, \dots u_m) \quad (\varrho = 1, 2 \dots r).$$

Läſst man nun an Stelle der Reihen $\bar{G}^{(\varrho)}_{\mu,\pi}$ die Reihe $\mathfrak{P}(y_1, y_2, \dots y_\varrho)$ treten und setzt fest, daſs die Reihen für $y_\varrho$ in dem Falle, wo $u_0 = 0$ gesetzt wird, in die Reihe $U(u_1, u_2, \dots u_m)$ übergehen, so werden die Reihen für $y_\varrho$, welche den $r$ Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y_\varrho}{\partial u_0} = \mathfrak{P}(y_1, y_2, \dots y_r) \cdot \sum_{\mu=1}^{m} \left( \frac{\partial y_1}{\partial u_\mu} + \frac{\partial y_2}{\partial u_\mu} + \dots + \frac{\partial y_r}{\partial u_\mu} \right)$$
$$(\varrho = 1, 2 \dots r)$$

genügen, einander gleich und werden blos von $u_0$ und

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_m}{R'}$$

abhängig.

Setzt man

$$u_0 = u, \quad \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_m}{R'} = z \quad \text{und} \quad \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_r}{G'} = y,$$

und somit

$$\mathfrak{P}(y_1, y_2, \dots y_r) = \frac{G}{1-y}, \quad y_\varrho = \frac{G'}{r} y,$$

so reducirt sich das System auf die einzige Differentialgleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{m \cdot r}{R'} G \frac{1}{1-y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{a}{1-y} \frac{\partial y}{\partial z},$$

und aus dieser soll $y$ derart als Function von $u$ und $z$ gefunden werden, daſs $y$ für $u = 0$ in

$$G' R' \frac{z}{1-z} = b \frac{z}{1-z}$$

übergeht.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten liefert aber leicht eine Reihe für $y$:

$$y = \frac{bz}{1-z} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \overset{(\alpha)}{\mathfrak{P}}_x(z) \frac{u^\alpha}{\alpha!},$$

deren Coefficienten $\overset{(\alpha)}{\mathfrak{P}}(z)$ aus der Gleichung:

$$\overset{(1)}{\mathfrak{P}}(z) + \overset{(2)}{\mathfrak{P}}(z) \frac{u}{1} + \overset{(3)}{\mathfrak{P}}(z) \frac{u^2}{2!} + \dots =$$

$$= \frac{a(1-z)}{1-(1+b)z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\left(\overset{(1)}{\mathfrak{P}}_x(z) u + \overset{(2)}{\mathfrak{P}}(z) \dfrac{u^2}{2!} + \dots\right)(1-z)}{1-(1+b)z}}$$

$$\times \left[\frac{b}{(1-z)^2} + \frac{u}{1} \frac{\partial \overset{(1)}{\mathfrak{P}}(z)}{\partial z} + \frac{u^2}{2!} \frac{\partial \overset{(2)}{\mathfrak{P}}(z)}{\partial z} + \dots\right]$$

hervorgehen, indem man die Coefficienten gleicher Potenzen von $u$ gleichsetzt, und diese Reihe wird convergent. Dann hat aber auch die durch die Substitution

$$z = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_m}{R'}$$

zu bildende Reihe einen Convergenzbereich, und endlich müssen die Reihen für $x_1$, $x_1$, ... $x_r$ einen gemeinsamen Convergenzbereich aufweisen.

Setzt man nicht fest, dafs die Reihen

$$\overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho(u_1, u_2, \ldots u_m)$$

kein constantes Glied haben, sondern dafs das Werthesystem

$$x_\varrho^{(0)} = \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho(0, 0 \ldots 0) \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

in dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen $G_{\mu,\pi}^{(\varrho)}$ liege, so bleiben die früheren Betrachtungen unberührt, wenn man die Gröfsen

$$x_\varrho - x_\varrho^{(0)}$$

als die zu bestimmenden Functionen ansieht.

Für ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial u_0} = \sum_{\pi=1}^{r} G_{1,\pi}^{(\varrho)}(x_1, \ldots x_r) \frac{\partial x_\pi}{\partial u_1} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\pi=1}^{r} G_{m,\pi}^{(\varrho)} \frac{\partial x_\pi}{\partial u_m} + G_{0,0}^{(\varrho)}(x_1, \ldots x_r)$$

$$(\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

gelten dieselben Sätze, denn die Aufnahme einer neuen Gleichung

$$\frac{\partial x_0}{\partial u_0} = 0$$

mit der Festsetzung, dafs $x_0$ für $u_0$ gleich $u_\mu$ sei, erlaubt eine Zurückführung der $(r + 1)$ Gleichungen auf die frühere Form, da man die Gröfsen $G_{0,0}^{(\varrho)}$, ohne eine Änderung herbeizuführen, mit $\frac{\partial x_0}{\partial u_\mu}$ multipliciren darf.

Sind endlich die Reihen $G_{\mu,\pi}^{(\varrho)}$ Quotienten zweier Potenzreihen mit dem Nenner $G^{(\varrho)}(x_1, \ldots x_r)$, auf dafs man wieder das Gleichungssystem auf Seite 258 erhält, so werden auch hier die formell genügenden Reihen $x_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(u_0, u_1, \ldots u_m)$ einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen und analytische Functionen definiren, wenn nur das Werthesystem

$$\bar{x}_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho(0, u_1, \ldots u_m) = \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_\varrho \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$$

dem Convergenzbereiche aller Functionen $G^{(\varrho)}_{\mu\pi}$, $G^{(\varrho)}_{00}$ und $G^{(\varrho)}$ angehört und die Stelle

$$x^{(0)}_{\varrho} = \overset{(0)}{\mathfrak{P}}_{\varrho}(0, 0 \ldots 0) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

keine Nullstelle von einer oder mehreren der Gröſsen $G^{(\varrho)}$ ist.*)

Nunmehr ist auch bewiesen, daſs die angegebenen Potenzreihen

$$x_{\nu} = \mathfrak{P}_{\nu}(t_0, t_1, \ldots t_m | (c)) \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

des ursprünglichen canonischen Systems partieller Differentialgleichungen $n$ Elemente von $n$ diesen Gleichungen genügenden analytischen Functionen der $m+1$ Variabeln $t_0, t_1, \ldots t_m$ sind, deren simultane Fortsetzungen jedenfalls wieder die Gleichungen befriedigen. —

Hier schlieſsen wir die Untersuchungen über den Umfang des Begriffes der analytischen Function ab, denn an der Behandlung der algebraischen Gleichungen und algebraischen Differentialgleichungen ist klar geworden, wie man das ursprünglich gestellte Problem, die durch irgend einen arithmetischen Zusammenhang definirten Gröſsen als analytische Functionen zu kennzeichnen, anzufassen hat.

---

*) Diese letzte Bedingung ist eigentlich zu beschränkend, indem ja die Reihen $G^{(\varrho)}_{00}$ und $G^{(\varrho)}_{\mu\pi}$ dieselbe Nullstelle haben und die Quotienten $\frac{G^{(\varrho)}_{\mu\pi}}{G^{(\varrho)}}$ und $\frac{G^{(\varrho)}_{00}}{G^{(\varrho)}}$ trotzdem durch Potenzreihen darstellbar sein können.

# Fünftes Capitel.

## Ableitung der elementaren transcendenten Functionen einer Variabeln.

### § 45. Die Exponentialfunction.

Indem wir uns zu der zweiten der zu Beginn des vorigen Capitels definirten Aufgaben wenden, nämlich zu der Ermittlung analytischer Functionen (einer unabhängigen Variabeln) von vorgegebener analytisch ausdrückbarer Eigenschaft, nehmen wir stets an, dafs ein Element der zu suchenden Function $y = f(x)$, d. i. eine Potenzreihe mit noch unbestimmten Coefficienten

$$y = \mathfrak{P}(x - a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a)^\nu$$

die vorausgesetzte Eigenschaft innerhalb seines endlichen, wenn auch noch so kleinen Convergenzbereiches besitze. Aus der die Eigenschaft definirenden analytischen Beziehung werden dann jedesmal Schlüsse über die Coefficienten $c_\nu$ zu ziehen und diese zu bestimmen sein. Wenn die so gefundene Reihe einen Convergenzbereich besitzt, existirt eine analytische Function, von der noch gezeigt werden mufs, dafs ihr in dem ganzen Giltigkeitsbereiche die Eigenschaft zukommt, die das primitive Element in seinem Convergenzbereiche aufweist.

Für die ganzzahligen Potenzen einer Gröfse $a$ besteht die in der Gleichung

$$a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$$

ausgedrückte Eigenschaft. Wir fragen, ob nicht eine analytische Function existirt, welche die hier entlehnte allgemeine Gleichung

$$f(z_1) . f(z_2) = f(z_1 + z_2)$$

erfüllt, wo $z_1$ und $z_2$ nicht blos ganzzahlige, sondern beliebige Werthe aus dem Stetigkeitsbereiche der Function sind.

Wenn eine solche Function $f(z)$ existirt, so mufs sie in der Umgebung einer Stelle $a$ in eine Potenzeihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - a)^\nu$$

zu entwickeln sein und in deren (als endlich vorausgesetztem) Convergenzbereiche besteht die Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z_1 - a)^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z_2 - a)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z_1 + z_2 - a)^\nu.$$

Wir können annehmen, dafs das die fundamentale Eigenschaft erfüllende Functionselement die Stelle Null in seinem Convergenzbereiche enthalte oder dafs dasselbe direct in der Umgebung dieser Stelle als bestehend vorausgesetzt werde, denn substituirt man statt $z$ $x + a$, so wird zufolge der Fundamentalgleichung

$$f(z) = f(a + z - a) = f(a) . f(z - a) = f(a) . f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

und nun
$$f(x) = \frac{1}{f(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x),$$

wenn nur $f(a)$ von Null verschieden ist. Die Gleichung

$$f(z) = f(a) . f(z - a)$$

lehrt aber, dafs $f(x)$ für keinen Werth $a$ aus dem Convergenzbereiche des primitiven Elementes verschwinden kann, denn sonst wäre $f(z)$ an jeder Stelle desselben Null, und es gäbe keine Function der verlangten Art.

Wenn demnach eine Function von besagter Beschaffenheit existirt, so gehört die Stelle Null und ein endlicher Bereich um diese Stelle zu ihrem Stetigkeitsbereiche.

Wir überlegen nun, dafs für die Fortsetzungen von $\mathfrak{P}(x)$ die Fundamentaleigenschaft des primitiven Elementes erhalten bleibt. In der That: wenn wir in der für einen festen Werth $a$ und jeden Werth von $x$ einer Umgebung von $a$ giltigen Gleichung

$$f(x + a) - f(x) . f(a) = 0 \qquad (\alpha)$$

für $f(x)$ und $f(x + a)$ die Potenzreihen $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{P}(x + a)$ einsetzen, so müssen in der links entstehenden Reihe die einzelnen Potenzen von $x$ verschwindende Coefficienten haben. Setzen wir aber statt $f(x)$ und $f(x + a)$ Fortsetzungen $\mathfrak{P}(x - x_0 + x_0)$ und $\mathfrak{P}(x - x_0 + (x_0 + a))$ ein, so wird die neue Potenzreihe an unendlich vielen Stellen des Convergenzbereiches mit der früheren Reihe übereinstimmen, also auch identisch verschwinden.

Da somit dieselbe Beziehung $(\alpha)$ bei einem festen Werthe $a$ bestehen bleibt und nun $a$ auch variirt werden kann, so haben die Fortsetzungen die Fundamentaleigenschaft mit dem primitiven Elemente wirklich gemein.

Jetzt können wir zeigen, dafs die in Frage stehende Function in der Umgebung jeder im Endlichen gelegenen Stelle in eine Potenzreihe entwickelt werden kann.

Wäre nämlich $b_1$ eine Stelle auf dem blos endlichen Convergenz-

kreise von $\mathfrak{P}(x)$, in deren Umgebung keine durch Vermittlung einer innerhalb des Kreises gelegenen Stelle $b_0$ ableitbare Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x \mid b_0, b_1)$$

existirt, so könnte überhaupt keine Function $f(x)$ gefunden werden.

Beachten wir vorher, dafs

$$f(a) = f(0) \cdot f(a) \quad \text{also} \quad f(0) = 1 = \mathfrak{P}(0) = c_0$$

und deshalb

$$f(a) \cdot f(-a) = 1 \quad \text{also} \quad f(-a) = \frac{1}{f(a)}$$

ist und bilden darauf

$$f(b_0 + (x - b_0)) = f(b_0) \cdot f(x - b_0)$$

oder $\mathfrak{P}(x - b_0)$, so könnte man nicht mehr weiter schliefsen, dafs

$$f(x - b_1 + (b_1 - b_0)) = f(b_1 - b_0) \cdot f(x - b_1)$$

ist, weil ja $b_1$ nicht in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x \mid b_0)$ liegen kann und eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x \mid b_0, b_1) = f(x - b_1) = \frac{f(x - b_0)}{f(b_1 - b_0)} = \frac{f(x)}{f(b_1)}$$

der Annahme nach nicht existirt. Diese formal gebildete Reihe ist aber zugleich mit $\mathfrak{P}(x)$ convergent, wenn nur $f(b_1)$ von Null verschieden ist. Wir müssen also annehmen, dafs es auf der Grenze des endlichen Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x)$ eine Stelle $b_1$ gibt, wo $f(x)$ verschwindet. Dann wäre aber wegen

$$f(b_1) = f\left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2}\right) = f\left(\frac{b_1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{b_1}{2}\right) = 0 \qquad (\alpha)$$

die Function $f(x)$ auch innerhalb ihres Stetigkeitsbereiches Null, und das widerspricht unserm früheren Satze. Folglich ist die Annahme falsch und es existirt eine Reihe $\mathfrak{P}(x \mid b_0, b_1)$. Wenn wir so fortfahren, ist die Behauptung erwiesen; die in Frage stehende Function ist durch eine beständig convergente Potenzreihe darstellbar.

Wir beweisen diesen Satz nochmals auf eine zweite Art.*)

Die Gleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

ist für diejenigen Werthesysteme $x_1$ und $x_2$ giltig, für welche

$$|x_1| < \frac{r}{2}, \quad |x_2| < \frac{r}{2},$$

wenn der Convergenzradius des Elementes $\mathfrak{P}(x)$ $r$ genannt wird. Setzt man nun $x_1 = x_2$, so gilt

$$f(2x_1) = f(x_1) \cdot f(x_1) \quad \text{und} \quad f(x_1) = f\left(\frac{x_1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

Doch weil der Convergenzbereich des hier rechts stehenden Ausdruckes

*) Der erste Beweis ist nicht einwurfsfrei. Man kann an der Existenz der Gleichung $(\alpha)$ zweifeln, da $b_1$ schon auf der Convergenzgrenze des primitiven Elementes liegt.

doppelt so grofs ist als der von $f(x_1)$, aber innerhalb des Kreises $fx_1|<r$ die Übereinstimmung beider Seiten angenommen war, so mufs $f(x_1)$ soweit eine Bedeutung haben, als dem Product $f\left(\frac{x_1}{2}\right)f\left(\frac{x_1}{2}\right)$ eine zukommt, d. h. der Convergenzbereich von $f(x)$ ist ein Kreis mit dem Radius $2r$.

So kann man weiter schliefsen und findet, dafs $\mathfrak{P}(x)$ eine beständig convergente Reihe sein mufs.

Um die Existenz von $f(x)$ wirklich zu beweisen, ersetzen wir in der Gleichung

$$f(x_1).f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

$f(x_1)$, $f(x_2)$ und $f(x_1+x_2)$ der Reihe nach durch

$$1 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_n x_1^n + \cdots$$
$$1 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_n x_2^n + \cdots$$
$$1 + c_1(x_1+x_2) + c_2(x_1+x_2)^2 + \cdots + c_n(x_1+x_2)^n + \cdots$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} f(x_1).f(x_2) = 1 &+ (c_1 x_1 + c_2 x_2) + (c_2 x_1^2 + c_1^2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2) + \cdots \\ &+ (c_n x_1^n + c_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + \cdots + c_{n-\nu} c_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu + \cdots \\ &+ c_n x_2^n) + \cdots \end{aligned}$$

gleich

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2) = 1 + c_1(x_1+x_2) + c_2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \cdots \\ + c_n\left(x_1^n + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 + \cdots + \binom{n}{\nu} x_1^{n-\nu} x_1^\nu + \cdots \right. \\ \left. + \binom{n}{n} x_2^n\right) + \cdots \end{aligned}$$

und nun liefert die Vergleichung gleichnamiger Glieder die Beziehungen

$$c_{n-1}c_1 = c_n\binom{n}{1}, \quad c_{n-2}c_2 = c_n\binom{n}{2}, \cdots$$

$$c_{n-\nu}c_\nu = c_n\binom{n}{\nu}, \ldots c_n = c_n.$$

Aus der ersten derselben folgt

$$c_1 c_1 = 2c_2, \quad c_2 c_1 = 3c_3, \ldots c_{n-1}c_1 = nc_n.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so entsteht

$$c_1^n c_2 c_3 \ldots c_{n-1} = n!\, c_2 c_3 \ldots c_n \quad \text{oder} \quad c_n = \frac{c_1^n}{n!}.$$

Wenn wir somit bereits alle Coefficienten $c_n$ durch einen $c_1$ ausgedrückt haben, müssen wir nachsehen, ob diese Bestimmung mit der allgemeinen Beziehung

$$c_{n-\nu}c_\nu = c_n\binom{n}{\nu}$$

in Einklange steht und ob vielleicht auch $c_1$ zu berechnen ist. Die Substitution der gefundenen Werthe gibt blos eine Identität

$$\frac{c_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\,\frac{c_1^\nu}{\nu\,!} = \frac{c_1^n}{n!}\binom{n}{\nu} = \frac{c_1^n}{n!}\;\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!},$$

und wir können $c_1$ nicht berechnen. Bezeichnen wir $c_1$ einfach mit $c$, so folgt die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + \frac{cx}{1} + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \cdots,$$

die zum mindesten den Convergenzradius $\left|\frac{1}{c}\right|$ oder 1 besitzt, je nachdem die willkürliche Constante $c$ dem absoluten Betrage nach $< 1$ oder $\geqq 1$, denn der Quotient der Coefficienten aufeinanderfolgender Glieder $\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$ bleibt dem absoluten Betrage nach kleiner als $|c|$ oder 1.

*Das auf Grund der Fundamentaleigenschaft abgeleitete primitive Element convergirt, $f(x)$ existirt und ist als beständig convergente Reihe eine eindeutige ganze transcendente Function.*

Mit Rücksicht darauf, daſs die Function mit dem Product $cx$ ungeändert bleibt, bezeichnen wir besser $cx$ mit $x$ und $f\left(\frac{x}{c}\right)$ mit $g(x)$.

Nennt man den Werth $g(1)$ $e$, so gilt für ganze Zahlen $x = m$ die Gleichung

$$g(m) = e^m, \quad \text{weil} \quad g(m) = g\Big(1 + 1 + \cdots + 1\,\big(\text{m} \atop \text{mal}\big)\Big) = \overset{m}{g(1)}$$

ist, und wegen dieser Eigenschaft bezeichnet man $g(x)$ passend mit $e^x$ und es ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Die Fundamentaleigenschaft der neugeschaffenen sogenannten *Exponentialfunction* ist jetzt in folgender Weise zu schreiben:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\,.\,e^{x_2}$$

und es gilt

$$e^0 = 1, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

für jedes positive oder negative ganzzahlige $n$ aber ist

$$e^{nx} = (e^x)^n.$$

Wenn darnach das Argument $x$ der Exponentialfunction durch Addition und Subtraction aus den Gröſsen $x_1, x_2, \dots x_n$ entstanden ist, so läſst sich $e^x$ rational durch die den Argumenten $x_1, x_2, \dots x_n$ zugehörigen Functionswerthe darstellen.

Die Ableitung der Exponentialfunction

$$\frac{de^x}{dx} \quad \text{ist gleich} \quad e^x.$$

Der Ableitungsproceſs bringt demnach keine Änderung hervor.

Diese Eigenschaft von $g(x) = e^x$ folgt auch aus der Functionalgleichung

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y),$$

denn die Differentiation nach den mit einander vertauschbaren Gröfsen $x$ und $y$ gibt

$$\frac{\partial g(x+y)}{\partial x} = \frac{dg(x)}{dx} g(y), \quad \frac{\partial g(x+y)}{\partial y} = \frac{dg(y)}{dy} g(x).$$

Doch weil

$$\frac{\partial g(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)} \frac{\partial (x+y)}{\partial x} = \frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)} \frac{\partial (x+y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x+y)}{\partial y}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dg(y)}{dy} = \text{const.}$$

Ordnet man dem Werthe $x = 0$ $g(x) = 1$ zu und heifst die Constante $c$, so gibt die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dg(x)}{dx} = cg(x)$$

wieder

$$g(x) = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \cdots = e^{cx},$$

und setzt man noch fest, dafs auch die Ableitung $\frac{dg(x)}{dx}$ an der Stelle Null den Werth 1 besitze, so wird

$$g(x) = e^x.$$

## § 46. Aus der Exponentialfunction rational zusammengesetzte Functionen.

Wir untersuchen jetzt einige aus der Exponentialfunction $e^{cx}$ rational zusammengesetzte, also eindeutige Functionen

$$f(x) = R(e^{cx}).$$

Für diese besteht offenbar auch die Eigenthümlichkeit, dafs die zu den drei Argumentswerthen

$$x, \quad y \quad \text{und} \quad x+y$$

gehörigen Functionswerthe

$$f(x+y), \quad f(x), \quad f(y)$$

eine algebraische Gleichung

$$G(f(x+y), f(x), f(y)) = 0$$

erfüllen, deren Coefficienten von den Variabelnwerthen unabhängig sind; man hat ja nur zu bemerken, dafs man aus den Gleichungen

$$f(x) = R(e^{cx}), \quad f(y) = R(e^{cy}), \quad f(x+y) = R(e^{cx}.e^{cy})$$

die Exponentialfunction eliminiren kann.

Man sagt: für die Function $f(x) = R(c^{cx})$ besteht ein *algebraisches Additionstheorem.* Jede rationale Function von $f(x)$ genügt dann wieder einer Gleichung der eben besagten Art.

Wenn wir die Gleichung $G = 0$ noch $x$ und $y$ differentiiren, so entstehen die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial f(x)} \frac{df(x)}{dx} + \frac{\partial G}{\partial f(x+y)} \frac{\partial f(x+y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial f(y)} \frac{df(y)}{dy} + \frac{\partial G}{\partial f(x+y)} \frac{\partial f(x+y)}{\partial y} = 0$$

und nach Subtraction folgt wegen der Beziehung:

$$\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial G}{\partial f(x)} \frac{df(x)}{dx} - \frac{\partial G}{\partial f(y)} \frac{df(y)}{dy} = 0$$

und diese Gleichung ermöglicht es, $f(x+y)$ als algebraische Function von $f(x)$, $f(y)$ und den ersten Ableitungen $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{df(y)}{dy}$ darzustellen.

Neben dem Additionstheorem kann man auch eine Gleichung zwischen

$$f(x) \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

ableiten, denn man braucht nur $e^{cx}$ aus

$$f(x) = R(e^{cx}) \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx} = R'(e^{cx})$$

zu eliminiren.

Die wichtigsten unter den rationalen Functionen der Exponentialfunction sind im Nachstehenden kurz besprochen.

Es seien die Functionen

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}), \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$$

vorgelegt. — Die halbe Summe oder Differenz der ganzen Functionen $e^{xi}$ und $\frac{1}{e^{xi}}$ sind gewifs wieder ganze Functionen und dargestellt sind sie durch die Reihen:

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Die Fundamentaleigenschaft dieser die Namen *cosinus* und *sinus* führenden Functionen, für welche die Bezeichnung

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x$$

gebraucht wird, leiten wir in der angegebenen Weise ab, d. h. wir eliminiren die Exponentialfunction aus den Ausdrücken für

$$\cos(x+y), \quad \cos x, \quad \cos y$$

respective

$$\sin(x+y), \quad \sin x, \quad \sin y$$

oder aus den den Definitionen entspringenden Gleichungen ab:

$$e^{2xi}e^{2yi} - e^{xi}e^{yi}\,2\cos(x+y) + 1 = 0$$
$$e^{2xi} - e^{xi}\,2\cos x + 1 = 0$$
$$e^{2yi} - e^{yi}\,2\cos y + 1 = 0,$$

beziehungsweise

$$e^{2xi}e^{2yi} - e^{xi}e^{yi}\,2i\sin(x+y) - 1 = 0$$
$$e^{2xi} - e^{xi}\,2i\sin x - 1 = 0$$
$$e^{2yi} - e^{yi}\,2i\sin y - 1 = 0.$$

Bemerkt man aber, daſs

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-xi} = \cos x - i\sin x$$

ist, so wird

$$\cos(x+y) = \frac{1}{2}\left(e^{(x+y)i} + e^{-(x+y)i}\right) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2i}\left(e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i}\right) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

und die Gleichungen, welche das Additionstheorem enthalten, lauten

$$\cos^2(x+y) - 2\cos(x+y)\cos x\cos y + \cos^2 x + \cos^2 y - 1 = 0$$
$$\sin^4(x+y) - 2\sin^2(x+y)(\sin^2 x - 2\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2 y)^2$$
$$+ (\sin^2 x - \sin^2 y)^2 = 0,$$

wie sich leicht ergibt, wenn man noch die zwischen $\sin x$ und $\cos x$ bestehende Beziehung berücksichtigt:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Drückt man $\cos(x+y)$ auf die oben angegebene Weise als algebraische Function von $\cos x$, $\cos y$, $\frac{d\cos x}{dx}$, $\frac{d\sin x}{dx}$ aus, so folgt wegen der Beziehung:

$$(\cos(x+y)\cos y - \cos x)\frac{d\cos x}{dx} - (\cos(x+y)\cos x - \cos y)\frac{d\cos y}{dy} = 0$$

$$\cos(x+y) = \frac{\cos x\dfrac{d\cos x}{dx} - \cos y\dfrac{d\cos y}{dy}}{\cos y\dfrac{d\cos x}{dx} - \cos x\dfrac{d\cos y}{dy}}.$$

Weil ferner

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

ist, erhalten die Additionstheoreme auch die Gestalt:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \frac{d\cos x}{dx}\frac{d\cos y}{dy}$$

$$\sin(x+y) = \sin x\frac{d\sin y}{dy} + \sin y\frac{d\sin x}{dx}$$

und $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ erscheinen als rationale Functionen von $\cos x$, $\cos y$ respective $\sin x$, $\sin y$ und den ersten Ableitungen dieser Functionen.

Die Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ lassen auch die Relationen

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

erkennen, und darum bestehen die Gleichungen:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

und hierauf

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y = -2 \frac{d\cos x}{dx} \frac{d\cos y}{dy}$$
$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y = 2 \sin x \frac{d \sin y}{dy}$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y = 2 \frac{d \sin x}{dx} \sin y.$$

Führt man hier die Zeichen ein:

$$x + y = u, \qquad x - y = v,$$

so erhält man die Formeln:

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$$

Aus der Gleichung zwischen $\cos x$ und der Ableitung $\frac{d \cos x}{dx}$ bestehenden Gleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunction: Der absolute Betrag von $e^x$, wo $x = \xi + i\eta$ und $\xi$ und $\eta$ reell sei, ist gleich $e^\xi$.

Da nämlich

$$e^x = e^\xi e^{i\eta} = e^\xi(\cos\eta + i \sin\eta)$$

und

$$|e^x| = |e^\xi e^{i\eta}| = |e^\xi|$$

ist und $e^\xi$ für positive oder negative Werthe von $\xi$ positiv bleibt, indem $e^{-\xi} = \frac{1}{e^\xi}$ zu setzen ist, wird in der That $|e^x| = e^\xi$.

Läfst man $\xi$ von Null an zunehmen, so wächst $e^\xi$ von 1 bis $\infty$ und erhält dabei jeden in diesem Intervall liegenden Werth nur einmal, weil jedes Glied der Potenzreihe für $e^\xi$ für verschiedene Argumentswerthe $\xi_1$ und $\xi_2$ verschiedene Werthe annimmt, und mit $\xi_1 < \xi_2$

$$\frac{\xi_1^n}{n!} < \frac{\xi_2^n}{n!}.$$

Durchläuft $\xi$ die Werthe von 0 bis $-\infty$, so nimmt $e^\xi$ von 1 an ab und wird für unendlich grofse Werthe unendlich klein.

Wenn somit $e^\xi$ für reelle Werthe $\xi$ jeden positiven reellen Werth nur einmal annimmt, hat umgekehrt die Gleichung

$$e^{\xi} - a = 0,$$

wo $a$ reell und positiv ist, eine einzige reelle Wurzel $\xi$.

Weil die Exponentialfunction $e^x$ für keinen endlichen Werth des Argumentes den endlichen Werth Null erhält, sind wir darauf aufmerksam gemacht, daſs die Gleichung

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = 0$$

und allgemein die gleich Null gesetzte ganze transcendente Function gewiſs nicht in allen Stücken als Verallgemeinerung der algebraischen Gleichung angesehen werden kann, denn indem eine ganze rationale Function $n^{\text{ten}}$ Grades jeden Werth $n$mal annimmt, braucht die ganze Function nicht jeden Werth so oft anzunehmen, als ihr Grad anzeigt, d. i. unendlich oft.

Wir werden später zu zeigen haben, daſs in jeder Umgebung eines Werthes $a$, welchen die eindeutige Function an einer regulären Stelle erhält, Werthe $b$ liegen, welche die Function an beliebig vielen Stellen annimmt und daſs die ganze transcendente Function höchstens einen endlichen Werth im regulären Bereiche (d. i. im Endlichen) nicht annimmt. Jetzt wollen wir nur beweisen, daſs die Function $e^x = f(x)$ einen Werth $a$, den sie an zwei endlichen Stellen $x_1$ und $x_2$ erhält, auch für unendlich viele Werthe des Argumentes annimmt. In der That ist

$$f(x_1) = a, \quad f(x_2) = a,$$

so wird

$$f(x + x_1) = f(x)\,a, \quad f(x + x_2) = f(x)\,a$$

und

$$f(x + x_1) - f(x + x_2) = 0$$

oder

$$f(x + (x_1 - x_2)) = f(x).$$

Bezeichnet man $x_1 - x_2$ mit $2\omega$, so wird

$$f(x + 2\omega) = f(x),$$

und wenn $n$ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet, gilt auch

$$f(x + 2n\omega) = f(x).$$

Diese Gleichung besagt, daſs unsere Function $e^x$ den Werth, welchen sie für $x$ annimmt, auch für die unendlich vielen Werthe

$$x + 2n\omega \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

erhält.

Man nennt eine analytische Function $F(x)$ *periodisch*, wenn bei beliebigem Werthe ihres Argumentes für eine gewisse constante Gröſse $\omega$ die Gleichung

$$F(x + \omega) = F(x)$$

besteht. Die Gröſse $\omega$ und jedes ganzzahlige Vielfache von $\omega$ heiſst

eine *Periode.* Lassen sich alle Perioden einer Function $F(x)$ durch Addition und Subtraction aus $r$ Gröfsen

$$2\omega_1, \; 2\omega_2, \ldots 2\omega_r$$

zusammensetzen, zwischen denen keine ganzzahlige homogene lineare Relation besteht, so heifst die Function *rfach periodisch.*

Wenn darnach die Exponentialfunction einen Werth $a$ zweimal annimmt, so ist sie mindestens einfach periodisch, und weil für jede Periode $2n\omega$

$$f(2n\omega) = 1 \quad \text{oder} \quad e^{2n\omega} = 1$$

ist, findet man die Perioden durch Auflösung der Gleichung

$$e^x - 1 = 0,$$

und zwar ist jede Wurzel $x = \xi$ eine Periode, denn wenn $e^\xi = 1$ ist, besteht die Gleichung

$$f(x + \xi) = f(x)f(\xi) = f(x).$$

Hat die Exponentialfunction die Perioden $2n\omega$, dann besitzen die Functionen

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$$

offenbar die Perioden $\frac{2n\omega}{i}$, d. h. es bestehen die Gleichungen

$$\cos\left(x + \frac{2n\omega}{i}\right) = \cos x, \quad \sin\left(x + \frac{2n\omega}{i}\right) = \sin x,$$

und weil $\cos(0) = 1$, $\sin 0 = 0$ ist, wird

$$\cos\frac{2n\omega}{i} = 1, \quad \sin\frac{2n\omega}{i} = 0$$

und wegen der Beziehungen

$$\cos\frac{2\omega}{i} = \cos^2\frac{\omega}{i} - \sin^2\frac{\omega}{i} = 1$$

$$\cos^2\frac{\omega}{i} + \sin^2\frac{\omega}{i} = 1$$

ist ferner

$$\sin\frac{\omega}{i} = 0; \qquad \sin(2n+1)\frac{\omega}{i} = 0$$

$$\cos\frac{\omega}{i} = \pm 1, \quad \cos(2n+1)\frac{\omega}{i} = \pm 1,$$

doch ist über das Zeichen augenblicklich noch nicht zu entscheiden. Jedenfalls ist aber für jedes ganzzahlige $n$

$$\cos\left(x + n\frac{\omega}{i}\right) - \cos\left(x - n\frac{\omega}{i}\right) = 0$$

$$\sin\left(x + n\frac{\omega}{i}\right) - \sin\left(x - n\frac{\omega}{i}\right) = 0$$

und die halben Perioden $n\frac{\omega}{i}$ sind diejenigen Werthe $\alpha$, welche — wenn $f(x)$ für $\cos x$ oder $\sin x$ gesetzt wird — die Gleichung

$$f(x+\alpha) - f(x-\alpha) = 0$$

erfüllen. Aus den früheren Darstellungen für die Differenz von

$$f(x+y) - f(x-y)$$

entnehmen wir umgekehrt, dafs die halben Perioden $\frac{n\omega}{i}$ $\frac{d\cos x}{dx}$ oder $-\sin x$ zum Verschwinden bringen. Es gilt daher

$$\sin\frac{n\omega}{i} = 0, \quad \cos\frac{n\omega}{i} = \pm 1.$$

Die halben Perioden $m\frac{\omega}{i}$ sind somit als diejenigen $x$-Werthe erkannt, für welche $z = \cos x$ gleich $+1$ oder $-1$ wird. Hat man aber einen Werth $x_2 = \frac{\omega_1}{i}$ gefunden, für den $z = -1$ ist, so mufs $x_1 = \frac{\omega_1}{i} + \frac{\omega_1}{i}$ ein Werth sein, für welchen $z = +1$ wird.

Wir fragen zunächst, ob es Werthe $x_2 = \frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_2}{i}, \ldots \frac{\omega_r}{i}$ gibt, für die $\cos x$ den Werth $-1$ erhält, und welches diese sind.

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir auf die Differentialgleichung ein, welcher $\cos x = z$ genügt. Sie lautet

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 - z^2,$$

und wir wissen, dafs $x = 0$, $z = 1$ zusammengehörige Werthe sind.

Beachten wir, dafs $z$ bei den von Null ab zunehmenden reellen Werthen der Variabeln $x$ zunächst abnimmt, und das läfst ja die folgende Schreibweise der den Cosinus definirenden Reihe unmittelbar erkennen:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5.6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9.10}\right) + \cdots,$$

so werden wir aus der Differentialgleichung die Beziehung

$$dx = \frac{-dz}{\sqrt{(1-z)(1+z)}}$$

entnehmen und hier für die Wurzel in der Umgebung der Stelle Null das positive Zeichen festsetzen.

Benützt man in der Gleichung

$$dx = -(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz$$

die innerhalb des Bereiches $|z| < 1$ giltige Entwicklung:

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6 + \cdots,$$

so ist die Function $x$, welche der obigen Differentialgleichung genügt, offenbar durch das in dem Bereiche $|z| < 1$ giltige Element

$$x = -\left(z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \cdots\right) + \text{const}$$

definirt, und die Constante ist derart zu bestimmen, dafs $x = 0$ und $z = 1$ zusammengehörige Werthe sind.

Sie besitzt also den Werth

$$1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

und dieser ist endlich, denn die Glieder dieser Reihe sind kleiner als die entsprechenden der Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+2},$$

welche den endlichen Werth 2 hat, weil

$$1-\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{y^3}{6}+\cdots\right)=\sqrt{1-y}$$

auch für $y=1$ convergent ist.

Nun erhält man einen Werth $x_2$, wenn man in dem Ausdrucke für $x$ $z=-1$ setzt, und zwar folgt

$$x_2=2\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5}+\cdots\right).$$

Wir bezeichnen diesen positiven reellen Werth mit $\pi$, dann wird

$$\begin{aligned}
&\cos\pi=-1, && \sin\pi=0,\\
&\cos(\pi+\pi)=\cos 2\pi=1, && \sin 2\pi=0,\\
&\cos 2n\pi=1, && \sin 2n\pi=0,\\
&\cos(2n+1)\pi=-1, && \sin(2n+1)\pi=0
\end{aligned}$$

und wegen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-1=\cos^2\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}$$

$$1=\cos^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=\pm 1.$$

Hier ist das positive Zeichen zu wählen, weil

$$\sin x=\frac{x}{1}\left(1-\frac{x^2}{2.3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6.7}\right)+\frac{x^9}{9!}\left(1-\frac{x^2}{10.11}\right)+\cdots$$

offenbar so lange positiv bleibt, als $x$ solche reelle Werthe annimmt, für die $x^2<6$ ist, aber $\frac{\pi}{2}$ kleiner ist als 2. Es bestehen deshalb die Beziehungen

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi=(-1)^n,$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi=0$$

und

$$\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos n\pi=(-1)^n,$$

$$\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin n\pi=0.$$

Die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ besitzen demnach die Fundamentalperiode $2\pi$. Wenn wir zeigen können, dafs bereits alle Werthe angegeben sind, für welche $\cos x = \pm 1$ ist und $\sin x$ verschwindet, so erscheint nachgewiesen, dafs diese Functionen nur die Perioden $2n\pi = \frac{2n\omega}{i}$ besitzen und auch die Exponentialfunction nur einfach periodisch ist, indem alle Perioden positive oder negative ganzzahlige Vielfache von $2\pi i = 2\omega$ sind.

Wir überlegen zunächst, dafs $\sin x$ für keine complexen Werthe $x = \xi + i\eta$ verschwinden kann, denn für diese Werthe müfste

$$e^{xi} - e^{-xi} = 0$$

oder

$$e^{2xi} = e^{-2\eta+2\xi i} = e^{-2\eta}(\cos 2\xi + i \sin 2\xi) = 1$$

und

$$|e^{2xi}| = e^{-2\eta} = 1$$

sein. Doch diese Gleichung erfordert, dafs $\eta$ Null ist, denn es gibt nur diesen einen reellen Werth der verlangten Art. Die Nullstellen von $\sin x$ sind demnach alle reell und an diesen wird $\cos x = \pm 1$. Darum sehen wir nach, ob wir alle Stellen gefunden haben, wo $\cos x$ diese Werthe annimmt.

Der gefundene Werth $\pi$ war kleiner als 4, und $\frac{\pi}{2}$ ist darum, weil

$$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(4\nu+1)(4\nu+2)}\right)\frac{x^{4\nu}}{(4\nu)!}$$

gewifs positiv bleibt, solange das reelle $x < \sqrt{2}$ ist, gröfser als $\sqrt{2}$, denn es war $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Gäbe es nun innerhalb der Grenzen $2\sqrt{2}$ und 4 noch einen Werth $\pi'$, für den $\cos x = -1$ wäre, so müfste wieder

$$\cos\frac{\pi'}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi'}{2} = 1$$

und

$$\sin(\pi' - \pi) = 0$$

sein. Doch $\pi' - \pi$ ist kleiner als $4 - 2\sqrt{2} < 2$, und der Sinus war solange positiv, als $x^2 \leq 6$ war, daher gibt es innerhalb der genannten Grenzen keinen weiteren Werth, für den $\cos x = -1$ ist. Nun überzeugt uns die Gleichung

$$\cos(x + n\pi) = \cos(x - n\pi) \quad (n = \pm 1, 2 \ldots)$$

des Weiteren, dafs wir alle verlangten Stellen gefunden haben.

*Die Functionen cosinus und sinus sind also einfach periodisch und ebenso die Exponentialfunction.* Dann aber gehen alle Werthe $x$, für welche

$$e^x = a$$

ist, aus einem ersten $x_0$ hervor, wenn man ganzzahlige Vielfache von $2\omega = 2\pi i$ beliebig addirt oder subtrahirt. Es ist

$$e^{x_0 \pm 2n\pi i} = e^{x_0} e^{\pm 2n\pi i} = e^{x_0} (\cos 2n\pi \pm \sin 2n\pi) = e^{x_0} = a$$

und man hat nur zu untersuchen, ob stets ein erster Werth $x_0$ existirt, für den

$$e^{x_0} = a$$

wird, oder ob die Exponentialfunction (aufser Null) jeden Werth $a$ annehmen kann.

Man setze

$$a = \alpha + i\beta, \quad x_0 = \xi_0 + i\eta_0,$$

dann ist

$$|e^{x_0}| = e^{\xi_0} = |a|$$

und diese Gleichung hat eine und nur eine Lösung $\xi_0$. Es ist noch $\eta_0$ so zu bestimmen, dafs

$$e^{i\eta_0} = \cos \eta_0 + i \sin \eta_0 = \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

wird. Ist $a$ von Null verschieden und complex, so wird $\left|\frac{\alpha}{a}\right| < 1$ und dann gibt es nur einen positiven reellen Werth $\eta_0$ zwischen 0 und $\pi$, für den

$$\cos \eta_0 = \frac{\alpha}{|a|}.$$

In der That: gäbe es zwei Werthe $\eta_0^{(1)}$ und $\eta_0^{(2)}$, so müfste wegen der Relation

$$\cos \eta_0^{(1)} - \cos \eta_0^{(2)} = -2 \sin \frac{\eta_0^{(1)} + \eta_0^{(2)}}{2} \sin \frac{\eta_0^{(1)} - \eta_0^{(2)}}{2} = 0$$

der Sinus einer von Null verschiedenen Gröfse, die kleiner ist als $\pi$, verschwinden, was nicht angeht. Es gibt somit höchstens einen innerhalb der genannten Grenzen liegenden Werth, für den $\cos \eta_0 = \frac{a}{|\alpha|}$ ist; aber ein solcher Werth existirt gewifs, weil der Cosinus der reellen Variabeln eine überall stetige Function ist.

Für diesen Werth $\eta_0$ wird

$$\sin^2 \eta_0 = 1 - \cos^2 \eta_0 = 1 - \left|\frac{\alpha}{a}\right|^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

und

$$\sin \pm \eta_0 = \pm \sin \eta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

wo das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem $\beta$ positiv oder negativ ist. Wenn $\beta$ positiv ist, genügt daher der Gleichung

$$e^{\eta_0 i} = \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

eine positive, und wenn $\beta$ negativ ist, eine negative reelle Gröfse $\eta_0$, deren absoluter Betrag kleiner ist als $\pi$. Ist $\beta = 0$, so setze man je nach einem positiven oder negativen $\alpha$ $\eta$ gleich 0 oder $\pi$, und im

Falle $\alpha$ Null ist, entweder $\eta = \frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem $\beta$ positiv oder negativ ist.

Die Gleichung $e^x = a$ ist also stets durch einen endlichen Werth $x_0$ befriedigt, wenn $a$ nicht Null ist, und darum kann man jede Zahlengröfse $a = \alpha + i\beta$ in der Form

$$a = e^{x_0} = e^{\xi_0 + i\eta_0} = e^{\xi_0}(\cos\eta_0 + i\sin\eta_0)$$

darstellen und zwar auf unendlich viele Arten, doch weichen in den verschiedenen Darstellungen die Werthe $\eta_0$ nur um Vielfache von $2\pi$ von einander ab. Diejenige Darstellung einer nicht negativen reellen Gröfse $a$, in welcher $|\eta_0| < \pi$ ist, heifst die Hauptdarstellung. Diese ändert sich stetig mit dem Werthe $a$, d. h. $e^{\xi_0}$ und $\eta_0$ ändern sich stetig. Wenn aber $a$ aus dem Bereiche der Stellen mit negativem imaginären Bestandtheil nach einer Stelle $a'$ des negativen Theiles der reellen Axe übergeht, so müssen die zugehörigen $\eta_0$-Werthe mit der unteren Grenze $-\pi$ nach $\pi$ überspringen, sofern die Stellen der kleinsten Umgebung von $a'$, deren imaginärer Bestandtheil positiv ist, wieder die Hauptdarstellung finden sollen. Mit anderen Worten: in der Hauptdarstellung ist $\eta_0$ an den Stellen $a$ der negativen Abscissenaxe unstetig.

Man kann $\eta_0$ offenbar auch aus der Gleichung $\sin\eta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ berechnen und $\eta_0$ in das Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ einschliefsen und die positive Grenze zu ihren Werthen zählen, oder man kann $\eta_0$ aus einer Gleichung

$$\sin(\varepsilon + \eta_0) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

berechnen, wo $\varepsilon$ beliebig gewählt ist, und festsetzen, dafs $0 < \eta_0 \leq 2\pi$ werde usw. Darnach wird blos die Art der Hauptdarstellung einer ersten Lösung der Gleichung $e^x = a$ geändert. —

Man kann jetzt auch jede Gleichung

$$\sin x = a \quad \text{oder} \quad \cos y = a$$

auflösen, indem man zuerst die Anfangswerthe aus den Gleichungen

$$e^{ix} = ia \pm \sqrt{1 - a^2}$$

oder

$$e^{iy} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

entnimmt. Sind die Hauptlösungen $x_0^{(1)}$ und $x_0^{(2)}$ respective $y_0^{(1)}$ und $y_0^{(2)}$, so sind alle übrigen Lösungen

$$x_0^{(1)} \pm 2n\pi \quad \text{und} \quad -x_0^{(1)} \pm (2m+1)\pi$$

oder

$$y_0^{(1)} \pm 2n\pi \quad \text{und} \quad -y_0^{(1)} \pm 2m\pi,$$

denn es ist

$$e^{i(x_0^{(1)}+x_0^{(2)})} = -1, \quad e^{i(y_0^{(1)}+y_0^{(2)})} = 1$$

und

$$x_0^{(1)} + x_0^{(2)} = (2k+1)\pi, \quad y_0^{(1)} + y_0^{(2)} = 2k\pi,$$

wo $k$ irgend eine ganze Zahl bezeichnet.

Die inversen Functionen der eindeutigen analytischen Functionen

$$e^x = y, \quad \sin x = y, \quad \cos x = y$$

$x = \varphi(y)$ sind unendlich vieldeutige analytische Functionen, denn zu einem Werthe der jetzt unabhängigen Variabeln $y$ gehören unendlich viele Werthe von $x$, die allerdings nur um Vielfache einer constanten Gröſse $2\pi i$ von einander verschieden sind. Sie genügen beziehungsweise den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = +\sqrt{1-y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2},$$

und zwar sind der Reihe nach

$$x = 0,\ y = 1; \quad x = 0,\ y = 0; \quad x = 0,\ y = 1$$

zusammengehörige Werthepaare, und in der Umgebung der Stelle $y = 0$ sind die Wurzeln positiv zu nehmen, weil $y$ bei den von Null an zunehmenden $x$-Werthen zunächst wächst respective abnimmt.

Die Stellen

$$y = 0, \infty; \quad y = \pm 1, \infty; \quad y = \pm 1, \infty$$

werden für die neuen Functionen singuläre Stellen sein, denn in deren Umgebung läſst sich $x$ gewiſs nicht als Potenzreihe von $y$ darstellen.

Die Umkehrungsfunction von $\cos x$ hat — wie wir sahen — in der Umgebung der Stelle $y = 0$ die Entwicklung:

$$x = \varphi(y) = \frac{\pi}{2} - \left[y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

Für die Umkehrungsfunction des Sinus folgt mit Rücksicht auf die andere Anfangsbedingung:

$$x = \psi(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

und deshalb stehen die Functionen $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ in dem Convergenzbereiche der definirenden Elemente und somit in ihrem gemeinsamen Stetigkeitsbereiche in der Beziehung

$$\varphi(y) + \psi(y) = \frac{\pi}{2},$$

die entsprechenden Relationen zwischen dem Sinus und Cosinus lauten dann

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). —$$

Es soll auch das in der Umgebung der Stelle $y = 1$ giltige Element der Umkehrungsfunction von $e^x = y$ angegeben werden.

Weil die Ableitungen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{y^2}, \ldots \quad \frac{d^\nu x}{dy^\nu} = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{y^\nu}$$

an der Stelle $(y = 1, x = 0)$ die Werthe

$$1, \quad -1, \quad 1.2, \quad -1.2.3, \ldots \; (-1)^{\nu-1}.1.2\ldots(\nu-1)$$

annehmen, wird

$$x = \chi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{(y-1)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{(y-1)^\nu}{\nu}.$$

Unter den rationalen Functionen der Exponentialfunction $e^x$ mit den Perioden $2n\pi i$ oder der Function $e^{\frac{\pi i}{\omega}x}$ mit der Fundamentalperiode $2\omega$ führen wir zunächst noch die folgende an:

$$y = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2xi}-1}{e^{2xi}+1} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

die den Namen *Tangente* von $x$ führt.

Man kann diese Function $\operatorname{tg} x$ in der durch die Beziehung $|x| < \frac{\pi}{2}$ definirten Umgebung der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

entwickeln, weil $\cos x$ erst für $x = \frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ verschwindet. Durch die Methode der unbestimmten Coefficienten findet man aus der Gleichung

$$\frac{\displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\,x^{2\mu+1}}{\displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!}\,x^{2\mu}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

dafs alle Coefficienten $a^\nu$ mit geradem Index $\nu$ verschwinden und die mit ungeradem Index der Recursionsformel genügen:

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \left\{\frac{a_{2n-1}}{2!} - \frac{a_{2n-3}}{4!} + \cdot + \cdot + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{(2n)!}\right\},$$

welche nach der Substitution

$$a_\nu = \frac{c_\nu}{\nu!}$$

in die folgende übergeht:

$$c_{2n+1} - \binom{2n+1}{2}c_{2n-1} + \binom{2n+1}{4}c_{2n-3} - \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n}c_1 = (-1)^n.$$

Weil $a_1$ und $c_1$ gleich Eins ist, wird $c_3 = 2$, $c_5 = 16$ usw.

Jede Fortsetzung des primitiven Elementes besitzt ein oder zwei auf einander folgende Nullstellen von $\cos x$ als singuläre Stellen.

Weil an der einfachen Nullstelle $\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi$ von $\cos x$ $\sin x$ nicht verschwindet, hat $\operatorname{tg} x$ daselbst eine Darstellung in der Form

$$\left(x-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right)^{-1}\mathfrak{P}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

d. h. die Nullstellen von $\cos x$ sind für die Function $\operatorname{tg} x$ aufserwesentlich singuläre Stellen der ersten Ordnung.

Das Additionstheorem nimmt die in den folgenden Formeln enthaltene Gestalt an:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(x-y)=2\frac{\operatorname{tg} y\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1-\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y}.$$

Doch weil

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

ist, gilt die Beziehung:

$$\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(x-y)=\frac{2\operatorname{tg} y\,\frac{d\operatorname{tg} x}{dx}}{1-\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y}.$$

Für die halben Perioden $\alpha$ ist wiederum

$$\operatorname{tg}(x+\alpha)-\operatorname{tg}(x-\alpha)=0,$$

daher sind $\alpha$ diejenigen Werthe von $y$, für welche $\operatorname{tg} y$ verschwindet, also wird $\alpha$ gleich $2n\pi$.

Ähnliche Betrachtungen gelten für den Quotienten

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

der als die *Cotangente* von $x$ bezeichnet wird. Diese neue Function $y=\operatorname{cotg} x$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=-(1+y^2)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

und $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ sind zusammengehörige Werthe.

Das Reciproke des Cosinus und Sinus heifst die *Secante* und *Cosecante*:

$$\frac{1}{\cos x}=\sec x, \quad \frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x.$$

Diese Functionen stehen mit der Tangente und Cotangente in der einfachen Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x; \quad \frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{cotg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$$

und genügen den Differentialgleichungeu

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{y^2 - 1}\,; \quad \frac{dy}{dx} = -y\sqrt{y^2 - 1}$$

und zwar sind bei positiv gewählten Wurzeln $x = 0$, $y = 1$ respective $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$ zusammengehörige Werthe.

## § 47. Logarithmus.

Wir wenden uns zur Lösung einer zweiten Functionalgleichung:

$$f(x) + f(y) = f(x.y).$$

Die zu suchende analytische Function mufs, wenn sie überhaupt existirt, in der Umgebung einer Stelle $x_0$ durch eine convergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

darstellbar sein; doch weil in deren Convergenzbereiche

$$f(x_0 + (x - x_0)) = f\left(x_0\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)\right) = f(x_0) + f\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$$

gilt, und

$$f\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) + f(x_0) = a_0 + a_1 x_0\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right) + a_2 x_0{}^2\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$$

ist, so folgt, wenn wir an Stelle $a_\nu x_0^\nu$ $c_\nu$ und für $\frac{x - x_0}{x^0}$ $x$ schreiben, auch eine Entwicklung

$$f(1 + x) + f(x_0) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Da zufolge der Fundamentalgleichung die Beziehung

$$f(x) + f(1) = f(x)$$

besteht und daher $f(1) = 0$ sein mufs, ergibt sich aus der letzten Entwicklung für den Werth $x = 0$ $f(x_0) = c_0$, und man erhält die Darstellungen:

$$f(1 + x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x - 1)^\nu.$$

Schreibt man die Functionalgleichung in der Form:

$$f(1 + x + y) = f(1 + x) + f\left(1 + \frac{y}{1 + x}\right),$$

so mufs endlich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x + y)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \left(\frac{y}{1 + x}\right)^\nu$$

sein, und wenn wir hier die gleichnamigen Glieder gleich setzen, erhält man die Werthe der noch unbestimmten Coefficienten $c_\nu$.

Zunächst sind die von $y$ freien Terme beiderseits gleich und der Coefficient von $y^\nu$ ist links

$$c_\nu + c_{\nu+1}\binom{\nu+1}{1}x + c_{\nu+2}\binom{\nu+2}{2}x^2 + \cdots = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\nu+\mu}\binom{\nu+\mu}{\mu}x^\mu$$

und rechts:

$$\frac{c_\nu}{(1+x)^\nu} \quad \text{oder} \quad c_\nu\left(1 - \nu\frac{x}{1} + \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}x^2 - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}x^3 + \cdots\right).$$

Diese Entwicklung wird leicht aus derjenigen für $\frac{1}{1+x}$ durch den Schlufs von $\nu$ auf $(\nu+1)$ bewiesen.

Da

$$(-1)^\mu \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\mu-1)}{1.2.3\ldots\mu} = \frac{(-\nu)}{1}\frac{(-\nu-1)}{2}\cdots\frac{(-\nu-\mu+1)}{\mu}$$

ist, kann man diesen Ausdruck als den $\mu^{\text{ten}}$ Binomialcoefficienten der $(-\nu)^{\text{ten}}$ Potenz einführen und mit $\binom{-\nu}{\mu}$ bezeichnen. Dann ist

$$\frac{c_\nu}{(1+x)^\nu} = c_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{-\nu}{\mu}x^\mu.$$

Der Vergleich der gefundenen Coefficienten von $y^\nu$ führt auf die Relation

$$c_{\nu+\mu}\binom{\nu+\mu}{\mu} = c_\nu\binom{-\nu}{\mu}$$

oder

$$c_{\nu+\mu}\frac{(\nu+\mu)(\nu+\mu-1)\ldots(\nu+1)}{1.2\ldots\mu} = c_\nu(-1)^\mu\frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\mu-1)}{1.2\ldots\mu},$$

aus der die Beziehung folgt:

$$c_{\nu+\mu} = c_\nu(-1)^\mu\frac{\nu}{\nu+\mu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots \infty).$$

Es ist daher für $\nu = 1$

$$c_{\mu+1} = c_1\frac{(-1)^\mu}{\mu+1},$$

und wenn man hierin für $\mu$ $\nu-1$ oder $\mu+\nu-1$ setzt, ergeben sich die Formeln:

$$c_\nu = c_1\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}, \quad c_{\nu+\mu} = c_1\frac{(-1)^{\nu+\mu-1}}{\nu+\mu},$$

welche die voranstehende Gleichung identisch erfüllen.

Ersetzt man noch $c_1$ durch $\frac{1}{c}$, so erhält die Potenzreihe für $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=0$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{c}\left\{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots\right\}$$

und in der Umgebung der Stelle $x_0$ besteht die Darstellung:

$$f(x) = f(x_0) + f\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right) = f(x_0) + \frac{1}{c}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^\mu.$$

Der Convergenzbereich dieser Reihen kann die Stelle $x=0$ nicht enthalten, denn es wird

$$f(0)=f(x_0)-\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)$$

und hier ist die eingeklammerte Reihe unendlich und $f(x_0)$ ist endlich, weil $x_0$ eine Stelle des Stetigkeitsbereiches der Function ist. Die Stelle $x=0$ liegt aber auf der Grenze des Convergenzbereiches, weil die Reihen für die durch die Bedingungen

$$|x-1|<1 \quad \text{respective} \quad |x-x_0|<|x_0|$$

definirten Stellen endlich sind, indem ja der absolute Betrag jedes einzelnen Gliedes für diejenigen Stellen, wo $|x-1|=1$ oder $|x-x_0| = |x_0|$, endlich bleibt.

Wir behaupten, dafs die zweite Reihe eine Fortsetzung der ersten ist. In der That nehmen wir in dem Bereiche $|x-1|<1$ eine Stelle $x_1$ an und bilden aus der Reihe $\mathfrak{P}(x|1)$ das Element

$$\mathfrak{P}(x|1,x_1)=\mathfrak{P}(x_1|1)+\mathfrak{P}'(x_1|1)\frac{x-x_1}{1!}+\mathfrak{P}''(x_1|1)\frac{(x-x_1)^2}{2!}+\cdots,$$

indem wir die Ableitungen aufsuchen:

$$\mathfrak{P}'(x|1)=\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}(x-1)^{\mu}=\frac{1}{c}\,\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{cx}$$

$$\mathfrak{P}^{(2)}(x|1)=\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu+1}(\mu+1)(x-1)^{\mu}=-\frac{1}{cx^2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\mathfrak{P}^{(\nu)}(x|1)=\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu+\nu-1}(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)(x-1)^{\mu}$$
$$=(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{cx^{\nu}},$$

so hat dasselbe die Form:

$$\mathfrak{P}(x|1,x_1)=f(x_1)+\frac{1}{c}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\frac{x-x_1}{x_1}\right)^{\mu}$$

und besitzt den Convergenzradius $|x_1|$. Ist $x_2$ eine Stelle in dem Convergenzkreise der neuen Reihe, so folgt ebenso:

$$\mathfrak{P}(x|1,x_1,x_2)=f(x_2)+\frac{1}{c}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\frac{x-x_2}{x_2}\right)^{\mu}$$

und so fortfahrend, gelangt man offenbar zu der Reihe

$$\mathfrak{P}(x|1,x_1,x_2,\ldots x_n,x_0)=f(x_0)+\frac{1}{c}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\mu},$$

die früher mit Hilfe des Fundamentaltheorems abgeleitet werden konnte. Wir sehen somit, dafs es eine analytische Function $f(x)$ mit einer

willkürlichen Constanten $c$ gibt, die unserer Functionalgleichung genügt. Sie besitzt im Endlichen nur die einzige singuläre Stelle $x=0$, wie der Convergenzbereich jeder Fortsetzung des primitiven Elementes ersehen läſst.

Um die Beschaffenheit der Function $f(x)$ an der Stelle Null zu untersuchen, kann man die Reihe $\mathfrak{P}(x|1)$ fortsetzen und nachsehen, ob jede Fortsetzung

$$\mathfrak{P}(x|1, x_1, x_2, \ldots x_n, 1)$$

mit der ersten Reihe identisch ist. Man wähle hierzu continuirliche Wege, welche die singuläre Stelle nicht umgeben, und andere, welche sie umgeben. Gelangt man auf solche Weise zu verschiedenen Werthen, so ist die durch das primitive Element definirte monogene analytische Function vieldeutig. Diese Art der Untersuchung lieſse aber an Umständlichkeit nichts zu wünschen übrig.

Erinnern wir uns, daſs die eindeutige Function an einer singulären Stelle $c$ nicht die Bedingung

$$\Big((x-c)\,f(x)\Big)_{x=c} = 0$$

erfüllen konnte, läſst sich aber beweisen, daſs hier

$$\Big(x\,f(x)\Big)_{x=0} = 0$$

wird, so muſs die neue Function vieldeutig sein.

Setzt man der Einfachheit halber die willkürliche Constante $c=1$, und bemerkt, daſs der reelle Theil von

$$\varphi(x) = f(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu}(x-1)^{\mu}$$

bei abnehmenden Werthen $|x|$ wächst, so werden den abnehmenden positiven reellen Gröſsen

$$r_1, r_2, \ldots r'$$

wachsende Functionalwerthe zugehören:

$$\varphi(r_1) < \varphi(r_2) < \cdots < \varphi(r').$$

Schlieſst man $r'$ in beliebig kleine Grenzen $\frac{1}{2^n}$ und $\frac{1}{2^{n+1}}$ ein und stellt die Ungleichung auf:

$$-f\left(\frac{1}{2^n}\right) = -nf\left(\frac{1}{2}\right) = -nf\left(1-\frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \cdots\right) < n,$$

wonach

$$-\frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}}$$

ist und die Gröſsen

$$\frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

mit wachsendem $n$ beliebig klein werden, so folgt:

$$-r'f(r') < -r'f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < -\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < \delta. \qquad \text{q. e. d.}$$

Die Function $f(x)$ ist nach diesem Satze wirklich vieldeutig, und nun könnte man fragen, ob $f(x)$ in der Umgebung der Stelle Null ein Verhalten besitzt wie die algebraische Function in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen. Da aber die Function $e^y = x$ der Differentialgleichung $\frac{dx}{dy} = x$ genügte und aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

bei der Zuordnung $x = 0 \quad y = 1$ das Element

$$y = -\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu}(x-1)^\mu$$

gefunden war, so erkennen wir in der der Functionalgleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

genügenden analytischen Function $f(x)$ gerade die Umkehrungsfunction der Exponentialfunction $e^{cy} = x$, und diese ist unendlich vieldeutig, da zu einem Werthe $x$ unendlich viele Werthe $cy$ gehörten.

Die neue Function $f(x)$ heifst der *Logarithmus* von $x$ und wird, im Falle die Constante $c = 1$ ist, mit $\log x$ bezeichnet. Dann wird

$$f(x) = \frac{1}{c}\log x,$$

und hier kann man $c$ so wählen, dafs $f(x)$ an einer bestimmten Stelle $x_0$ einen beliebig festgesetzten Werth annimmt. Ist $f(x_0) = 1$, so heifst $f(x)$ der Logarithmus von $x$ in Bezug auf die Basis $x_0$, und zwar wird dieser *künstliche* Logarithmus durch die Logarithmen für die Basis $c$ (wo $c = 1$ ist), welche *natürliche* heifsen, in folgender Weise darzustellen sein:

$$f(x) = \frac{\log x}{\log x_0}.$$

In der Analysis wird durchwegs der natürliche Logarithmus verwendet.

Da jede von Null verschiedene, nicht reelle negative Zahlengröfse $a = \alpha + i\beta$ auf eine einzige Art in der Form

$$a = e^{x_0} = e^{\xi_0 + i\eta_0} = e^{\xi_0}(\cos\eta_0 + i\sin\eta_0)$$

dargestellt werden konnte, wo

$$e^{\xi_0} = |a|$$

ist und die reelle Gröfse $\eta_0$ einen absoluten Betrag kleiner als $\pi$ besitzt, so wird der Werth des natürlichen Logarithmus von $a$

$$\log a = \xi_0 + i\eta_0 = \log|a| + i\eta_0$$

und alle anderen Werthe gehen durch Addition ganzzahliger Vielfacher der Gröfse $2\pi i$ hervor.

Man bezeichnet den erstgenannten Werth des natürlichen Logarithmus als *Hauptwerth* Log $a$ oder log nat $a$.

Als Hauptwerth negativ reeller Zahlengröſsen $a$ wird die Gröſse

$$\xi_0 + i\pi$$

definirt.*) —

In der Umgebung einer endlichen Stelle $a$ existiren die unendlich vielen Elemente

$$\log x = \operatorname{Log} a + 2n\pi i + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu} \left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu}.$$

Die Fortsetzungen eines Elementes, welche nicht mit denen eines zweiten übereinstimmen, constituiren einen Zweig des Logarithmus, und der Inbegriff der Hauptwerthe, der aus demjenigen Elemente hervorgeht, in welchem $n = 0$ ist, heiſst der *Hauptzweig* der Function.

Der Logarithmus hat die beiden singulären Stellen 0 und $\infty$ und ist in dem durch diese Stellen begrenzten Continuum durchwegs endlich und stetig, der einzelne Zweig aber ist längs der von 0 bis $-\infty$ sich erstreckenden negativ reellen Axe unstetig, indem $\eta_0$ zufolge der früheren Festsetzungen bei Überschreiten dieser Axe aus dem Gebiete von Gröſsen mit negativ reellem und imaginärem Bestandtheil um $2\pi$ wächst. Setzt man aber den Logarithmus mit Hilfe der Potenzreihen fort, so kommt man bei dem Überschreiten des negativen Theiles der Abscissenaxe in das Gebiet eines nächsten Zweiges etwa aus dem des $n^{\text{ten}}$ in das Gebiet des $(n-1)^{\text{ten}}$ Zweiges.

Da der Übergang von einem Zweige in einen anderen auf geschlossenem Wege nur möglich ist, wenn der von dem Wege begrenzte Bereich eine singuläre Stelle enthält, so kann die Fortsetzung des Logarithmus von einer Stelle $a$ aus zu keinem anderen Werthe in $a$ führen, sofern der bei der Fortsetzung eingehaltene geschlossene Weg die Stelle $x = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Stelle $\infty$ nicht umschlieſst, selbst wenn man dabei aus dem Gebiete eines Zweiges in das eines anderen und dann wieder in das des ersten gelangen sollte. Ein geschlossener Weg um die Stelle Null, der aber die negative Abscissenaxe $m$ mal im Sinne der wachsenden und $n$ mal im Sinne der abnehmenden Gröſsen $\eta_0$ überschreitet, führt zu dem um

$$2(m-n)\pi i$$

vermehrten ursprünglichen Functionalwerthe, der dem $(m-n)^{\text{ten}}$ Zweige angehört, wenn der Hauptzweig der nullte heiſst.

---

*) Es ist besonders der Hauptwerth von

$$\log 1 = 0, \quad \log(-1) = i\pi, \quad \log e = 1, \quad \log e^n = n,$$

$$\log i = \frac{1}{2} i\pi, \quad \log(-i) = -\frac{1}{2} i\pi, \quad \log e^x = x.$$

Es ist noch interessant, die Beziehung der in dem einzelnen Zweige befindlichen Werthe des Logarithmus zu den Variabelnwerthen aufzusuchen, wie sie bei der geometrischen Betrachtung sich präsentirt.

Wenn man in $y = \log x$ $x$ alle möglichen Werthe beilegt, so werden die zugehörigen $y$-Werthe eines Zweiges nur einen Parallelstreifen in der $y$-Ebene ausfüllen, und zwar entsprechen den unendlich vielen Werthen des Logarithmus an einer Stelle $x$ unendlich viele Punkte $y$, die in den unendlich vielen Parallelstreifen homolog liegen.

Einem Kreise $|x| = r$ entspricht in dem einzelnen Streifen eine Folge von Punkten gleichen reellen Bestandtheiles usw.

## § 48. Die allgemeine Potenz.

Den bisher behandelten Functionalgleichungen

$$f(x).f(y) = f(x+y), \quad f(x) + f(y) = f(xy)$$

in der Form sehr nahe verwandte sind die folgenden

$$f(x).f(y) = f(xy), \quad f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Wir wissen bereits, dafs es analytische Functionen mit einer der hier ausgesprochenen Eigenschaften gibt, denn die ganzzahlige Potenz $a^n$ genügte nicht allein der Rechnungsregel

$$a^m . a^n = a^{m+n},$$

sondern es war andererseits

$$x^m . y^m = (xy)^m;$$

und ferner ist $f = ax$ eine analytische Function, welche der zweiten Functionalgleichung genügt, denn es ist

$$ax + ay = a(x+y).$$

Suchen wir zunächst die allgemeinste Function, welche der zweiten Gleichung entspringt, so haben wir anzusetzen, dafs einmal

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

ist. Doch weil $f(0) = 0$ sein mufs, existirt auch eine Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

und nun gibt die Substitution in die Functionalgleichung die Identität:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x+y)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu y^\nu.$$

Da die hier nothwendigen Beziehungen

$$c_\nu + c_{\nu+1} \binom{\nu+1}{1} x + a_{\nu+2} \binom{\nu+2}{2} x^2 + \cdots = c_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

lehren, dafs nur $c_1$ von Null verschieden sein kann, haben wir bereits die allgemeinste Function der verlangten Art in $f(x) = ax$ angegeben.

Für die der ersten Functionalgleichung genügende Function ergeben sich zunächst die folgenden Eigenschaften:

$$f(x) . f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)},$$

$$f(x_1 . x_2 \ldots x_n) = f(x_1) . f(x_2) \ldots f(x_n),$$

$$(f(x))^n = f(x^n), \qquad \frac{1}{f(x)^n} = f\left(\frac{1}{x^n}\right) = f(x^{-n}) = (f(x))^{-n},$$

wo $n$ ganzzahlig ist.

Setzt man

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

und bildet

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) . f\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$$

$$= f(x_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_0^\nu \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^\nu,$$

so wird für $x = x_0$ $a_0 = 1$, und wenn man wie früher $a_\nu x_0^\nu = c_\nu$ und für $\frac{x - a_0}{x_0}$ $x$ setzt, wird

$$f(1 + x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x - 1)^\nu.$$

Weil endlich

$$f(1 + x + y) = f(1 + x) . f\left(1 + \frac{y}{1 + x}\right)$$

ist, besteht die Beziehung:

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x + y)^\nu = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu\right) \cdot \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{y^\nu}{(1 + x)^\nu}\right)$$

und hierin ist der Coefficient von $y^\nu$ linkerseits

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\nu+\mu} \binom{\nu + \mu}{\mu} x^\mu,$$

rechterseits hingegen

$$c_\nu \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu\right) \cdot \left(1 + \binom{-\nu}{1} x + \binom{-\nu}{2} x^2 + \cdots\right)$$

oder bis auf den Factor $c_\nu$

$$1 + \left(c_1 - \frac{\nu}{1}\right) x + \left(c_2 - c_1 \frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu + 1)}{1 . 2}\right) x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \left(c^\mu - c_{\mu-1} \frac{\nu}{1} + c_{\mu-2} \frac{\nu(\nu+1)}{1 . 2} - \cdots + (-1)^\mu \frac{\nu(\nu+1) \ldots (\nu + \mu - 1)}{1 . 2 \ldots \mu}\right) x^\mu + \cdots$$

Darnach wird

$$c_{\nu+1}\binom{\nu+1}{1} = c_\nu\left(c_1 - \frac{\nu}{1}\right)$$

$$c_{\nu+2}\binom{\nu+2}{2} = c_\nu\left(c_2 - c_1\frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}\right)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c_{\nu+\mu}\binom{\nu+\mu}{\mu} = c_\nu\left(c_\mu - c_{\mu-1}\frac{\nu}{1} + c_{\mu-2}\frac{\nu(\nu+1)}{1.2} - \cdots + (-1)^\mu \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\mu-1)}{1.2\ldots\mu}\right)$$

Schreibt man wieder anstatt $c_1$ $c$, so geben diese Beziehungen für $\nu = 1$ der Reihe nach die Formeln:

$$c_2 = \frac{c(c-1)}{1.2}, \quad c_3 = \frac{c(c-1)(c-2)}{1.2.3} \ldots$$

$$c_\mu = \frac{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Diese Ausdrücke, welche wieder aus $c$ so zusammengesetzt sind wie die Binomialcoefficienten, auf dafs wir

$$c_\mu = \binom{c}{\mu}$$

setzen können, erfüllen die früheren Gleichungen mit einem beliebigen Werthe $\nu$ identisch, d. h. die Coefficienten sind bereits allen Forderungen gemäfs bestimmt. —

Das verlangte Functionenelement lautet nunmehr:

$$f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{c}{\nu}(x-1)^\nu$$

und es ist auch:

$$f(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{c}{\nu}x^\nu$$

und in der Umgebung einer Stelle $x_0$ besitzt $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = f(x_0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{c}{\nu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^\nu.$$

wo nun $\binom{c}{0}$ für 1 gesetzt ist.

Weil $f(1+x)$ für ganze positive und negative und auch für gebrochene Zahlengröfsen $c$ gerade mit $(1+x)^c$ übereinstimmt, bezeichnet man die hier definirte Function allgemein mit

$$f(1+x) = (1+x)^c \quad \text{und} \quad f(x) = x^c$$

und nennt sie die *allgemeine Potenz*. In diesem Zeichen lautet die Functionalgleichung

$$x^c . y^c = (xy)^c.$$

Zur näheren Untersuchung der allgemeinen Potenz bringen wir dieselbe mit dem Logarithmus in nahe Verbindung.

Indem man die Gleichung

$$f(x).f(y) = f(x.y)$$

logarithmirt, d. h.

$$\log (f(x).f(y)) = \log f(x) + \log f(y) = \log f(xy)$$

bildet, — was functionentheoretisch keiner Erläuterung mehr bedarf, da man in einer convergenten Potenzreihe die unabhängige Variable durch eine Potenzreihe in einer neuen Variabeln ersetzen darf, — so erscheint $\log f(x)$ als eine Function, welche der Fundamentaleigenschaft des Logarithmus theilhaftig ist. Man kann deshalb

$$\log f(x) = \varphi(x) = c \log x$$

und

$$f(x) = e^{c \log x}$$

setzen, wo unter $\log x$ zunächst der Hauptwerth des Logarithmus von $x$ zu verstehen ist. Die Function $f(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{c}{x} f(x),$$

wobei $x = 1$ und $f(x) = 1$ zusammengehörige Werthe sind. Diese Differentialgleichung kann man durch die beiden nachstehenden ersetzen:

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = cy$$

und dann hat man $t = 0$ $x = 1$, $y = 1$ zuzuordnen.

Für ganzzahlige Werthe von $c$ gilt

$$f(x) = e^{m \log x} = (e^{\log x})^m = x^m$$

d. h. $f(x)$ wird eine ganze rationale und eindeutige Function. Gibt man $\log x$ irgend einen seiner Werthe

$$\operatorname{Log} x + 2n\pi i,$$

so bleibt $e^{m \log x}$ immer ungeändert, weil $e^{2mn\pi i} = 1$ ist.

In dem allgemeinen Falle schreiben wir $f(x)$ auch als eine Potenz

$$f(x) = x^c,$$

deren Ableitung

$$\frac{dx^c}{dx} = cx^{c-1}$$

ist, und verstehen unter $x^c$ umgekehrt diejenige Function, welche in der Umgebung der Stelle $x_0$ die Darstellung zuläſst:

$$x^c = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^\nu}{\nu!} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^\mu \right\}^\nu.$$

Ordnet man diese Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$, so findet man wieder die frühere Potenzreihe

$$x^c = x_0^c \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{c}{\mu} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^\mu$$

und diese wird gewifs so lange convergiren, als

$$|x - x_0| < |x_0|.$$

Die allgemeine Potenz hat demnach auch die singuläre Stelle $x=0$. Ist $c$ eine ganze negative Zahl $-m$, so wird $x^{-m}$ die aufserwesentlich singuläre Stelle $x = 0$ besitzen, aber sonst überall regulären Verhaltens sein. Ist $c$ eine rationale gebrochene Zahlengröfse $\frac{m}{n}$, die auf keine kleinere Benennung zu bringen ist, so wird

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log x}$$

$n$deutig, denn wenn man für $\log x$ der Reihe nach alle Werthe setzt, so kann man neben dem Hauptwerthe der Potenz: $e^{\frac{m}{n}\log \operatorname{nat} x} = x^{\frac{m}{n}}$ nur die weiteren $(n-1)$ verschiedenen Werthe:

$$e^{\frac{m}{n}2k\pi i}\, x^{\frac{m}{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

auffinden, indem

$$e^{\frac{m}{n}2(k+n)\pi i} = e^{\frac{m}{n}2k\pi i}$$

ist. Der Functionalgleichung zufolge ist

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m$$

und darum ist $x^{\frac{m}{n}}$ auch als die durch die algebraische Gleichung

$$y^n - x^m = 0$$

definirte algebraische Function $y$ mit der $(n-1)$fachen Verzweigungsstelle $x = 0$ aufzufassen.

Haben in dieser Gleichung $m$ und $n$ den gemeinsamen Theiler $k$ und ist $n = \nu k$, $m = \mu k$, so hat die algebraische Function wohl $n$ Werthe, aber die $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{te}}$ Potenz von $x$ nur $\nu$ Werthe, man darf daher — wie wir schon früher sahen — die $n^{\text{te}}$ Wurzel aus der $m^{\text{ten}}$ Potenz von $x$ nicht ausnahmslos als gebrochene Potenz hinstellen.

Wir geben hier gelegentlich die $n$ Lösungen der Gleichung

$$y^n = 1$$

oder die $n$ Wurzeln aus der Einheit an. Sie lauten offenbar

$$1,\; e^{\frac{2\pi i}{n}},\; e^{\frac{4\pi i}{n}}, \ldots e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

oder

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

und sie sind als Potenzen einer einzigen $e_\varkappa = e^{\frac{2\varkappa\pi i}{n}}$ darzustellen, wo $\varkappa$ und $n$ relativ prim sind, indem

$$\varepsilon_\varkappa, \; \varepsilon_\varkappa^2, \ldots \varepsilon_\varkappa^{n-1}, \quad \varepsilon_\varkappa^n = \varepsilon_\varkappa^0 = 1$$

verschieden ausfallen und die $n^{\text{ten}}$ Potenzen dieser Gröfsen offenbar den Werth Eins annehmen. Wäre nämlich

$$\varepsilon_\varkappa^{\nu_1+\nu_2} = \varepsilon_\varkappa^{\nu_2},$$

und hierin $\nu_2$ und $\nu_1 + \nu_2$ kleiner als $n$, so müfste $\varepsilon_\varkappa^{\nu_1} = 1$ sein, und das ist nach den über $\varkappa$ und $\nu_1$ gemachten Festsetzungen unmöglich. Man nennt eine solche Wurzel $\varepsilon_\varkappa$ eine *primitive $n^{te}$ Einheitswurzel.*

Ist endlich in der Potenz $x^c$ $c$ eine irrationale oder complexe Zahlengröfse, so wird die Potenz unendlich vieldeutig, denn den zwei zu einem Werthe von $x$ gehörigen Werthen des Logarithmus von $x$:

$$\log x + 2m\pi i \quad \text{und} \quad \log x + 2n\pi i$$

entsprechen verschiedene Werthe

$$e^{c(\log x + 2m\pi i)}, \quad e^{c(\log x + 2n\pi i)},$$

indem in

$$e^{2c(m-n)\pi i}$$

$c(m-n)$ keine reelle ganze Zahl sein kann.

Ist $c$ eine beliebige Gröfse, deren absoluter Betrag gröfser wird als irgend eine vorgegebene Gröfse, und bildet man

$$\left(1+\frac{x}{c}\right)^c = e^{c\log\left(1+\frac{x}{c}\right)} = e^{c\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\frac{x}{c}\right)^\mu}$$

$$= e^{x - \sum\limits_{\mu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu}\frac{x^\mu}{c^{\mu-1}}},$$

so ist in dem Giltigkeitsbereiche dieser Identität der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu}\left(\frac{x}{c}\right)^\mu c$$

für unendlich grofse $c$ kleiner als jede beliebig kleine vorgegebene Gröfse und daher kann man setzen:

$$\left(\left(1+\frac{x}{c}\right)^c\right)_{|c|=\infty} = e^x.$$

Wenn wir bei jedem Werthe von $m$

$$e^{m\log a} = \left(e^{\log a}\right)^m = a^m$$

setzen können, wollen wir auch die Exponentialfunction $e^{cx}$ auf die Form einer Potenz $a^x$ bringen. Indem wir $c = \log a$ setzen, wird

$$e^{\log a . x} = a^x$$

und die diese Function definirende Reihe lautet:

$$1 + \frac{x\log a}{1} + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \cdots$$

und die Ableitung ist:

$$\frac{d\,a^x}{dx} = \log a . a^x = c e^{cx}.$$

Für den Logarithmus von $a$ darf man jeden beliebigen Werth seiner Werthe wählen, daher wird die Exponentialfunction $a^x$ erst bestimmt sein, wenn $\log a$ festgesetzt ist.

Werfen wir noch einen Blick auf die Umkehrungsfunctionen der Functionen $y = \sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, die als rationale Functionen der Exponentialfunction eingeführt waren, so ist klar, dafs jene als Logarithmen algebraischer Functionen von $y$ erscheinen müssen.

Es war z. B.

$$y = \operatorname{tg} x = i\frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}},$$

und weil nun

$$e^{2ix} = \frac{1 + iy}{1 - iy}$$

ist, wird

$$x = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{1-iy}{1+iy}\right).$$

Bemerkt man, dafs neben

$$\log(1 + z) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} z^\mu$$

die Darstellungen

$$\log(1 - z) = -\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^\mu}{\mu} \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{z^{2\mu+1}}{2\mu+1}$$

gelten, so folgt für die Umkehrungsfunction der Tangente von $x$ in der Umgebung der Stelle $y = 0$ die Darstellung:

$$x = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots$$

Die durch dieses Element definirte Function, die *Arcustangente* von $y$ heifst, ist unendlich vieldeutig und zwar gehen alle Werthe aus einem ersten hervor, indem man diesen um ganze Vielfache von $\pi$ vermehrt. Da $\operatorname{arctg} y$ der Differentialgleichung genügt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2},$$

wobei $y = 0$ und $x = 0$ zugeordnete Werthe sind, wird diese Function überall regulären Verhaltens sein aufser an den Unendlichkeitsstellen von $(1 + y^2)^{-1}$, d. h. an den Stellen $y = \pm i$. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Bemerkung, dafs

$$\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2} i \log\left(\frac{1-iy}{1+iy}\right)$$

an denjenigen Stellen nicht regulär ist, für welche das Argument des Logarithmus verschwindet oder unendlich ist.

Für arctg $y$ mufs sich deshalb in der Umgebung der Stelle $y=\infty$ eine Entwicklung angeben lassen, die nur positive ganze Potenzen von $\left(\frac{1}{y}\right)$ enthält. Das ist wirklich der Fall, denn wenn man

$$\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2} i \log\left(\frac{-\frac{i}{y}-1}{-\frac{1}{y}+1}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} i \log\left(\frac{1+\frac{i}{y}}{1-\frac{i}{y}}\right)$$

setzt, wo $\frac{\pi}{2}$ der dem $(-1)^{\text{ten}}$ Zweige angehörige Werth von $\frac{i}{2}\log(-1)$ ist, so führt die Anwendung der früheren Formel für $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ zu der Darstellung:

$$\operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\frac{1}{3} + \frac{1}{y^5}\frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Zieht man nun die Umkehrungsfunction von

$$y = \operatorname{cotg} x = i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1},$$

die *Arcuscotangente* von $y$, in Betracht, so findet man mit Hilfe der Gleichung

$$e^{2ix} = \frac{iy-1}{iy+1}$$

$$\operatorname{arc\,cotg} y = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{iy-1}{iy+1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\log\left(\frac{1-iy}{1+iy}\right),$$

wo $\frac{\pi}{2}$ den Hauptwerth von $\frac{1}{2i}\log(-1)$ bezeichnet. Jetzt folgt die Beziehung

$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{arc\,cotg} y = \frac{\pi}{2},$$

deren entsprechende für die Umkehrungsfunctionen des Sinus und Cosinus schon oben abgeleitet wurde.

Wegen dieser Relationen, denen die Gleichungen

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

zugehören, haben wir nur nöthig die Umkehrungsfunction je einer der Functionen sin und cos oder tg und cotg zu untersuchen, die unter dem Namen der *trigonometrischen Functionen* zusammengefafst werden.

Für die Function arctg $y$ sind die Stellen $y=+i$, $-i$ Verzweigungsstellen, und in dem durch diese Ausnahmsstellen begrenzten Continuum ist die Function durchaus stetig, nur der einzelne Zweig wird aufser diesen Stellen längs einer von $+i$ nach $-i$ führenden Linie, welche nicht zwei oder mehrere Continua vollständig begrenzt, unstetig sein, derart, dafs der Functionalwerth des Zweiges bei Überschreiten dieser Linie um die Gröfse $\pi$ wächst oder abnimmt.

Bei der hier genannten Linie, welche der von der Stelle Null nach $-\infty$ führenden Unstetigkeitslinie des Zweiges des Logarithmus entspricht, haben wir einer grofsen Willkür Raum gelassen, da man — wie früher hervorgehoben wurde — auch die Unstetigkeitslinie des Logarithmus verschiedenartig wählen kann.

Die Umkehrungsfunction von

$$y = \sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi}),$$

für die wir schon ein Element aufgestellt haben, läfst sich wegen der Gleichung

$$e^{2ix} - 2iy\, e^{xi} - 1 = 0$$

durch die Formel

$$x = \operatorname{arc\,sin} y = -i \log (iy \pm \sqrt{1-y^2})$$

definiren.

Da wir die algebraische Function $iy \pm \sqrt{1-y^2}$ und den Logarithmus vollständig kennen gelernt haben, sind wir auch im Stande, die neue Function $\operatorname{arc\,sin} y$ zu untersuchen. Wir stehen davon ab und verweisen auf eine ausführliche Darlegung ihrer Eigenschaften in Thomae's Functionentheorie auf Seite 102 ff.

## § 49. Der Cosinus und Sinus ganzzahliger Vielfacher des Argumentes.

Wir wollen an die Untersuchung der allgemeinen Potenz die Ableitung einiger späterhin nothwendiger Ausdrücke für

$$\cos nx \quad \text{und} \quad \sin nx$$

anschliefsen.

Da

$$e^{nxi} = \cos nx + i \sin x = (e^{xi})^n = (\cos x + i \sin x)^n$$
$$e^{-nxi} = \cos nx - i \sin x = (e^{-xi})^n = (\cos x - i \sin x)^n$$

ist, wird

$$\cos nx = \frac{1}{2}((\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}((\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n).$$

Bezeichnet $n$ irgend eine endliche Zahlengröfse, so kann man $\frac{\cos nx}{\cos^n x}$ und $\frac{\sin nx}{\cos^n x}$ in dem durch die Bedingung $|\operatorname{tg} x| < 1$ definirten Bereiche um die Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe nach Potenzen von $\operatorname{tg} x$ entwickeln, denn daselbst wird man die in den Ausdrücken:

$$\cos nx = \frac{1}{2} \cos^n x((1 + i \operatorname{tg} x)^n + (1 - i \operatorname{tg} x)^n)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2} \cos^n x((1 + i \operatorname{tg} x)^n - (1 - i \operatorname{tg} x)^n)$$

auftretenden $n^{\text{ten}}$ Potenzen der Binome $1 \pm i \operatorname{tg} x$ in der genannten Weise darstellen können. Weil $\operatorname{tg} x = 1$ ist, sobald

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

wird, so sieht man, dafs $x = \pm \frac{\pi}{4}$ die der Stelle $x = 0$ nächstliegenden Stellen sind, für die die in Rede stehende Darstellung zu existiren aufhört.

Setzt man voraus, dafs $n$ nur eine ganze Zahl sei, so werden $\cos nx$ und $\sin nx$ als rationale Functionen von $\cos x$ und $\sin nx$ auszudrücken sein, und zwar gilt:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots + \begin{cases} \pm \sin^n x \\ \pm \binom{n}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x \end{cases}$$

$$\sin nx = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \cdots + \begin{cases} \mp \binom{n}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x \\ \pm \sin^n x, \end{cases}$$

je nachdem $n \equiv 0, 2, 1, 3 \pmod 4$ ist.

Ersetzt man $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so erhalten diese Formeln die Gestalt:

$$\cos nx = \cos 2\nu x = (1 - \sin^2 x)^\nu - \binom{n}{2} (1 - \sin^2 x)^{\nu-1} \sin^2 x + \\ + \binom{n}{4} (1 - \sin^2 x)^{\nu-2} \sin^4 x - \cdots + (-1)^\nu \sin^n x$$

$$\cos nx = \cos(2\nu+1)x = \cos x \Big[ (1 - \sin^2 x)^\nu \quad \binom{n}{2} (1 - \sin^2 x)^{\nu-1} \sin^2 x + \\ + \binom{n}{4} (1 - \sin^2 x)^{\nu-2} \sin^4 x - \cdots + (-1)^\nu \binom{n}{n-1} \sin^{n-1} x \Big]$$

$$\sin nx = \sin 2\nu x = \cos x \Big[ \binom{n}{1} (1 - \sin^2 x)^{\nu-1} \sin x - \\ - \binom{n}{3} (1 - \sin^2 x)^{\nu-2} \sin^3 x + \cdots + (-1)^{\nu-1} \binom{n}{n-1} \sin^{n-1} x \Big]$$

$$\sin nx = \sin(2\nu+1)x = \binom{n}{1} (1 - \sin^2 x)^\nu \sin x - \binom{n}{3} (1 - \sin^2 x)^{\nu-1} \sin^3 x + \\ \cdots + (-1)^\nu \sin^n x.$$

Entwickelt man die rechten Seiten nach steigenden Potenzen von $\sin x$, ersetzt aber den Binomialcoefficienten

$$\binom{\nu - \varkappa}{\mu} \quad \text{durch} \quad \binom{\frac{n-2\varkappa}{2}}{\mu},$$

so kann man den Coefficienten von $(-1)^\mu \sin^{2\mu} x$ in dem Ausdrucke für $\cos 2\nu x$ auf die folgende Form bringen:

$$\frac{n(n-2)\dots(n-2\mu+2)}{1.3\dots 2\mu-1}\left[\frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 3.1}{2.4\dots(2\mu-2)\,2\mu} + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 3}{2.4\dots(2\mu-2)}\,\frac{n-1}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 5}{2.4\dots(2\mu-4)}\,\frac{(n-1)(n-3)}{2.4} + \dots + \frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2\mu+1)}{2.4\dots 2\mu}\right]$$

und wenn man in der Klammergröfse für $(2\mu-1)$ $a$ und für $(n-1)$ $b$ schreibt, erscheint diese in der übersichtlichen Gestalt:

$$\frac{a(a-2)\dots(a-2\mu+2)}{2.4\dots 2\mu} + \frac{a(a-2)\dots(a-2\mu+4)}{2.4\dots(2\mu-2)}\,\frac{b}{2} + \frac{a(a-2)\dots(a-2\mu+6)}{2.4\dots(2\mu-4)}\,\frac{b(b-2)}{2.4}$$
$$+ \dots + \frac{a}{2}\,\frac{b(b-2)\dots(b-2\mu+4)}{2.4\dots(2\mu-2)} + \frac{b(b-2)\dots(b-2\mu+2)}{2.4\dots 2\mu} =$$
$$= \frac{(a+b)(a+b-2)\dots(a+b-2\mu+2)}{2.4\dots 2\mu}.$$

Die Anwendung dieser von Cauchy benützten Hilfsformel*), die man leicht bestätigen kann, führt auf die Darstellungen:

$$\cos nx = \cos 2\nu x = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 x$$
$$+ \dots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n^2(n^2-2^2)\dots(n^2-(n-2)^2)}{n!}\sin^n x$$

$$\cos nx = \cos(2\nu+1)x = \cos x\left[1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 x - \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-(n-2)^2)}{(n-1)!}\sin^{n-1} x\right]$$

$$\sin nx = \sin 2\nu x = \cos x\left[\frac{n}{1}\sin x - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 x\right.$$
$$\left. - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots(n^2-(n-2)^2)}{(n-1)!}\sin^{n-1} x\right]$$

$$\sin nx = \sin(2\nu+1)x = \frac{n}{1}\sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 x -$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-(n-2)^2)}{n!}\sin^n x.$$

Setzt man an Stelle des Argumentes $x$ $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ein und bemerkt, dafs

---

*) Siehe Algebraische Analysis (deutsche Ausgabe von C. Itzigsohn) Cap. 4 § 3.

$$\cos 2\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^\nu \cos 2\nu x,$$

$$\cos(2\nu+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^\nu \sin(2\nu+1)x,$$

$$\sin 2\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^{\nu+1} \sin 2\nu x,$$

$$\sin(2\nu+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^\nu \cos(2\nu+1)x$$

ist, so erhält man noch die Formeln:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cos nx = (-1)^\nu \cos 2\nu x = 1 - \frac{n^2}{2!}\cos^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 x - \\ - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 x + \cdots$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos nx = (-1)^\nu \cos(2\nu+1)x \\ = \sin x\left[1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 x + \frac{(n^2-1^2)(x^2-3^2)}{4!}\cos^4 x - \cdots\right]$$

$$(-1)^{\frac{n+2}{2}} \sin nx = (-1)^{\nu+1} \sin 2\nu x \\ = \sin x\left[\frac{n}{1}\cos x - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\cos^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 x - \cdots\right]$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin nx = (-1)^\nu \sin(2\nu+1)x \\ = \frac{n}{1}\cos x - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\cos^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 x - \cdots$$

Man sieht also, dafs $\cos 2\nu x$ und $\sin(2\nu+1)x$ als rationale Functionen von $\cos x$ oder $\sin x$ allein darzustellen sind. Das Umgekehrte findet nicht statt, vielmehr ergibt sich $\cos x$ und $\sin x$ aus den Gleichungen als die Wurzel einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades, die wir später angeben werden.

## Anhang.

In diesem Capitel sei nur noch einer wichtigen Reihe Erwähnung gethan, welche eine analytische Function definirt, die alle durch unsere Functionalgleichungen bestimmten transcendenten Functionen: die Exponentialfunction, den Logarithmus und die allgemeine Potenz umfafst. Diese Reihe lautet:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \\ + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

wo die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Bedingung genügen müssen, dafs die Gröfsen

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| = \left|\frac{\gamma+(\gamma+1)\nu+\nu^2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)\nu+\nu^2}\right| \quad (\nu = 0, 1, 2\ldots)$$

nicht unter jede angebbare Gröſse herabsinken, denn andernfalls hätte die Potenzreihe keinen Convergenzbereich.

Bezeichnet man die durch das angegebene Element definirte analytische Function mit

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

so wird zunächst bei unendlich groſsem $|\beta|$

$$e^x = F\left(1, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right),$$

denn der Coefficient von $\frac{x^\nu}{\nu!}$, nämlich $(\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)\beta^{-\nu})$ wird Eins. Ferner ist

$$\log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x)$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

$$(1+x)^a = F(-a, \beta, \beta, -x)$$

usw. Die Frage nach Functionen bestimmter Art, die in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten sind, z. B. den algebraischen Functionen, und eine solche ist ja bereits bei geeignetem $a$ in $(1+x)^a$ angeführt, stellt man passend dort, wo $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch eine übersichtliche Functionalgleichung definirt ist, in die vielleicht auch die Ableitungen von $y$ nach $x$ eintreten. Man wird also zur Untersuchung der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ besser daran thun, wenn man an der Hand des Elementes zunächst die Differentialgleichung aufsucht, welcher dieselbe genügt.

Bildet man die Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\frac{\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = \alpha\frac{\beta}{\gamma}F_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha+1)\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x) = \alpha(\alpha+1)\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}F_2$$

und allgemein:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

so findet man leicht die von Gauſs angegebene Beziehung zwischen $F$, $F_1$ und $F_2$ bestätigt:

$$\gamma(\gamma+1)F-(\gamma+1)(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)F_1-(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)F_2=0$$

und wegen dieser Identität besteht für $y$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0,$$

die nach der Substitution $\frac{dy}{dx} = y_1$ durch das canonische System zu ersetzen ist:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x), \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y_1 - \alpha\beta y,$$

dem man nun leicht die singulären Stellen für jede particuläre Integralfunction, die von der Zuordnung der Anfangswerthe von $x$, $y$, $y_1$ zu $t = 0$ abhängt, entnehmen kann. Man sieht, dafs $y$ als Function von $x$ überall regulären Verhaltens sein wird, ausgenommen an den Stellen $x = 0, 1, \infty$, wenngleich daselbst für besondere Integralfunctionen $y$ auch convergente Potenzreihen:

$$x^{\alpha_1}\mathfrak{P}(x), \quad (x-1)^{\alpha_2}\mathfrak{P}(x-1), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha_3}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

existiren können, wobei die Gröfsen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ nur specielle Werthe haben dürfen.*)

*) Es ist hier nicht der Raum, diese wichtige Differentialgleichung zu untersuchen, ich verweise deshalb den Leser auf die Originalabhandlungen von:

Gaufs: Disquisitiones generales circa seriem infinitam.

Riemann: Beiträge zur Theorie der durch die Gaufsische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen (ges. Werke).

Schwarz: Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe (Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 75).

## Sechstes Capitel.

# Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen.

---

### § 50. **Einleitung.**

**Darstellung der ganzen transcendenten Function durch Producte. Darstellung jeder Function mit einer wesentlich singulären Stelle.**

Eine eindeutige analytische Function einer Veränderlichen mit blos aufserwesentlich singulären Stellen war stets als Quotient ganzer rationaler Functionen darstellbar; eine eindeutige Function, die im Endlichen überall regulären Verhaltens ist und die einzige (wesentlich) singuläre Stelle $\infty$ hat, konnte man durch eine beständig convergente Potenzreihe definiren usw.

Darnach liegt die Frage nahe, ob man auch die arithmetische Abhängigkeit des Werthes einer eindeutigen Function von dem Werthe der Variabeln angeben kann, wenn für die Function singuläre Stellen in beliebiger Anzahl vorgelegt sind.

Diese Frage ist für die neuere Functionentheorie charakteristisch, indem sie zwischen dem Euler'schen Functionenbegriff, der mit dem Begriff des arithmetischen Ausdruckes zusammenfällt, und dem von Cauchy auf die Stetigkeit gestützten Begriff einer Function vermittelnd eintritt; sie definirt die analytische Function durch ein System ineinander fortsetzbarer Potenzreihen und lehrt hinterher, wie man den arithmetischen Ausdruck einer solchen Function einheitlich bestimmt, wenn ihre Unstetigkeitsstellen gegeben sind.

Die Grundlage für die Beantwortung der betreffs der eindeutigen Function einer Variabeln gestellten Aufgabe bietet die Darstellung der ganzen Function mit unenendlich vielen Nullstellen als Product von Factoren, die nur an einer Stelle verschwinden und die Darstellung einer Function mit unendlich vielen singulären Stellen, die eine Grenzstelle $c$ haben, als Summe von Functionen, deren jede aufser an der hier auftretenden wesentlich singulären Stelle $c$ nur an einer der gegebenen Stellen irregulären Verhaltens ist. —

Bevor wir aber die Bestimmung einer ganzen rationalen Function mit vorgeschriebenen Nullstellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und einem bestimmten Werthe $A$ an einer von den $a_\nu$ verschiedenen Stellen $x_0$ in der Form

$$G(x) = A \cdot \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x - a_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x_0 - a_\nu)}$$

auf den Fall einer ganzen transcendenten Function ausdehnen, für die unendlich viele Nullstellen vorgegeben sind, müssen wir einige Bemerkungen über unendliche Producte analytischer Functionen $f_\nu(x)$ vorausschicken.

Angenommen, dafs jede der Functionen $f_\nu(x)$ auf die Form gebracht sei:

$$1 + \varphi_\nu(x),$$

so wissen wir, dafs

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \varphi_\nu(x))$$

nur dann an einer Stelle $x_0$ convergirt, wenn auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x_0)$$

endlich ist. Damit also das Product eine Bedeutung habe, ist nothwendig, dafs die Functionen $\varphi_\nu(x)$ einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x)$ wenigstens in einem Theile dieses Bereiches convergirt. Wir sind aber nicht im Stande zu zeigen, dafs das Product eine analytische Function darstellt, wenn wir nicht auch annehmen, dafs diese Summe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x)$ in einem Bereiche $(A)$ gleichmäfsig convergirt. Dann aber convergirt das Product gleichmäfsig, ist daselbst stetig und definirt eine analytische Function; d. h. man kann dann nach Annahme einer Gröfse $\varepsilon$ eine solche ganze Zahl $n$ finden, dafs der absolute Betrag des Productes

$$\prod_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(x) \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(x)$$

für jedes $m'$ und ein $m > n$ und jede Stelle des Bereiches $(A)$ von Eins um weniger abweicht als $\varepsilon$ anzeigt, und ferner wird $F(x)$ in gewisser Nähe jeder in dem Bereiche $(A)$ liegenden Stelle $a$ der Bedingung

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon$$

genügen und endlich durch eine Potenzreihe darstellbar sein.

Obwohl die gleichmäfsige Convergenz einer Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)$ noch nicht die der unbedingten Convergenz nach sich zieht, womit nicht behauptet ist, dafs wirklich gleichmäfsig convergente Reihen existiren, die nicht auch unbedingt convergent sind, setzen wir bei dem Beweise voraus, dafs diese Reihe gleichmäfsig und unbedingt convergire.

Dann kann man ein $n$ so angeben, dafs nicht allein für jedes $m > n$

$$\left|\sum_{\nu=m}^{\infty} \varphi_\nu(x)\right| < \delta, \text{ sondern auch} \sum_{\nu=m}^{\infty} |\varphi_\nu(x)| < \delta$$

wird. Bezeichnet man hierauf

$$\prod_{\nu=m}^{\infty}(1+\varphi_\nu(x)) = 1 + S_m \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=m}^{\infty}(1+|\varphi_\nu(x)|) = 1 + S'_m$$

(wo die $|\varphi_\nu(x)| < 1$ seien), so wird

$$\left|\prod_{\nu=m}^{\infty}(1+\varphi_\nu(x))\right| = |1+S_m| \leq 1 + |S_m| < 1 + S'_m =$$

$$= \prod_{\nu=m}^{\infty}(1+|\varphi_\nu(x)|) < \frac{1}{1-\sum\limits_{\nu=m}^{\infty}|\varphi_\nu(x)|}$$

und man sieht, dafs unser Product wirklich unbedingt und gleichmäfsig convergirt. Dasselbe definirt aber auch eine analytische Function, denn wenn man

$$1+\varphi_\nu(x) \quad \text{durch} \quad e^{\varphi_\nu(x) - \frac{1}{2}\varphi_\nu^2(x) + \frac{1}{3}\varphi_\nu^3(x) - \cdots} =$$
$$= e^{\varphi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(x)} = e^{\mathrm{Log}(1+\varphi_\nu(x))}$$

ersetzt und beachtet, dafs keine der Functionen $\psi_\nu(x)$ in dem Bereiche $(A)$ einen gewissen angebbaren Betrag $g$ überschreitet, so ist

$$\left|\sum_{\nu=m}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(x)\right| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(x)| < g\sum_{\nu=m}^{\infty} |\varphi_\nu(x)|,$$

und weil $\sum \varphi_\nu(x)$ eine analytische Function darstellt, mufs auch $\sum \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(x)$ und

$$e^{\sum \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(x)} = \prod(1+\varphi_\nu(x))$$

eine analytische Function definiren und darstellen.

Nach diesen Vorbemerkungen denken wir eine ganze transcendente Function gegeben, die unendlich viele Nullstellen besitzt (wie z. B. $\sin x$ oder $\cos x$).

Innerhalb eines endlichen Bereiches kann nur eine endliche Anzahl von Nullstellen liegen, — wobei wir eine Nullstelle als $n$ fach

zählen, wenn die Function nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen daselbst verschwindet, — denn andernfalls gäbe es eine Grenzstelle, in deren Umgebungen unendlich viele Nullstellen enthalten wären und die ganze Function müſste identisch Null sein.

Ebensowenig wird irgend eine eindeutige Function in einem endlichen Bereiche, der keine wesentliche singuläre Stelle umfaſst, an unendlich vielen Stellen denselben Werth $A$ annehmen. Damit leuchtet ein, daſs man die Nullstellen einer ganzen Function $G(x)$

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_\nu\ \ldots$$

stets den Bedingungen gemäſs ordnen kann:

$$|a_{\nu+1}| \geqq |a_\nu|, \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty.$$

Ist nun eine solche Reihe von Stellen gegeben, so fragen wir, ob es stets eine ganze transcendente Function gibt, welche an diesen Stellen verschwindet.

Diese Frage wird man unbedingt bejahen müssen, aber es wird sich herausstellen, daſs die ganze transcendente nicht so wie die ganze rationale Function blos bis auf eine Constante, sondern bis auf eine im Endlichen nirgends verschwindende ganze Function bestimmt ist.

Wir wollen zunächst an einem Beispiel ersehen, um was es sich bei Construction einer Function mit vorgegebenen Nullstellen überhaupt handelt und zwar an demjenigen, welches Herrn Weierstraſs den Schlüssel zur Lösung gegeben zu haben scheint. Die Reihe der Nullstellen sei

$$-1,\ -2,\ \ldots .\ -\nu,\ \ldots$$

dann kann das Product

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)$$

nicht convergent sein, weil $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ divergirt. Bildet man aber nach Gauss' Vorgang das Product:

$$\frac{1}{n^x}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{x}{\nu}\right) = \Psi(n,\,x)$$

$$=\frac{\left(1+\frac{x}{1}\right)}{2^x}\,\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{2^x}}{3^x}\cdots\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^x}}{(n+1)^x}\cdot\frac{(n+1)^x}{n}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{x}{1}\right)}{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x}\,\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^x}\cdots\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^x,$$

und stellt man den einzelnen Factor in der Umgebung der Stelle $x = 0$ durch die Potenzreihe dar:

$$\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}+\frac{x(x+1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{\nu^2}-\cdots\right)=\left(1-\frac{x(x+1)}{1\,.\,2}\,\frac{1+X_\nu}{\nu^2}\right),$$

wo $|X_\nu|$ bei hinlänglich grofsen Werthen von $\nu$ beliebig klein zu machen ist, so wird

$$\lim_{\nu=\infty}\Psi(n,\,x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-x},$$

und nach der Substitution:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-x}=e^{-x\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}$$

wird

$$\lim_{n=\infty}\Psi(n,\,x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\cdot e^{-x\operatorname{Log}\frac{\nu+1}{\nu}}.$$

Dieses Product convergirt in einem endlichen Bereiche um die Stelle $x = 0$ unbedigt und gleichmäfsig, denn die Summe

$$\sum_{\nu=m}^{\infty}\left|\frac{1+X_\nu}{\nu^2}\right|$$

kann kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Gröfse $\delta$.

Bringt man noch die Summe

$$\sum_{\nu=m}^{n}\operatorname{Log}\frac{\nu+1}{\nu}$$

mit den ersten $n$ Gliedern der *harmonischen Reihe* in Vergleich und setzt

$$c_n=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu}-\operatorname{Log}\frac{\nu+1}{\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{\nu}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{\nu^2}-\cdots\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\delta_\nu}{\nu^2},$$

wo $\delta_\nu$ eine positive Gröfse kleiner als Eins ist, auf dafs

$$c=\lim_{n=\infty}c_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\delta_\nu}{\nu^2}\quad\text{zugleich mit}\quad\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$

convergirt, so kann man auch bei unendlich grofsem $n$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{Log}\frac{\nu+1}{\nu}=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}+c_n,$$

und hierauf

$$\lim_{n=\infty}\Psi(n,\,x)=e^{cx}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\cdot e^{-\frac{x}{\nu}}$$

setzen.

Dieses Product ist beständig convergent und definirt eine ganze Function mit den vorgegebenen Nullstellen $-\nu$; sie heifst *Factorielle* von $x$ und wird mit $Fc(x)$ bezeichnet.

Die Constante $c$ besitzt den angenäherten Werth:

$$0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ \ldots$$

und führt den Namen der Mascheroni'schen Constanten.

An diesem Beispiele bemerken wir, dafs das Product ganzer transcendenter Functionen

$$\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\cdot e^{-\frac{x}{\nu}},$$

deren jede nur eine im Endlichen gelegene Nullstelle und im Unendlichen eine wesentlich singuläre Stelle besitzt, die verlangte ganze transcendente Function liefert, und damit ist man zu der Vermuthung geführt, dafs die ganze Function mit unendlich vielen Nullstellen $a_\nu$ der oben besagten Beschaffenheit als beständig convergentes unendliches Product ganzer transcendenter Functionen darzustellen sei, die nur je eine der Nullstellen besitzen.*) Diese Functionen

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{g_\nu(x)},$$

wo $g_\nu(x)$ eine ganze Function bezeichnet, heifsen *Primfunctionen*, weil sie den Primfactoren der ganzen rationalen Function entsprechen.

Bildet man eine Reihe von Primfunctionen:

$$E(x,0)=1-x,\quad E(x,1)=(1-x)\cdot e^x,\quad E(x,2)=(1-x)\cdot e^{x+\frac{x^2}{2}},$$

$$\ldots E(x,m)=(1-x)\cdot e^{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{m}x^m},$$

und stellt mit Hilfe der in dem Einheitskreise giltigen Entwicklung

$$\log(1-x)=-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x^\mu}{\mu}+2n\pi i$$

und

$$1-x=e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{x^\mu}{\mu}}$$

$E(x,m)$ für alle der Bedingung $|x|<1$ genügenden $x$-Werthe in der Form

$$E(x,m)=e^{-\sum\limits_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{x^\mu}{\mu}}=e^{-\sum\limits_{\mu+1}^{\infty}\frac{x^{m+\mu}}{m+\mu}}$$

dar und wählt für die dieser Primfunction entsprechende Function mit der von Null verschiedenen Nullstelle $a_\nu$:

*) Siehe Weierstrafs, Functionenlehre p. 16 u. s. f.

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu},$$

wo $m_\nu$ eine ganze Zahl bezeichnet, innerhalb des Bereiches, wo

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$$

ist, die Darstellung

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{m_\nu+\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}},$$

so läfst sich leicht beurtheilen, wenn das unendliche Product

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

eine ganze transcendente Function mit den $n_\nu$fachen Nullstellen $a_\nu$ definirt.

Gibt man $x$ einen Werth, dessen absoluter Betrag kleiner ist als $|a_{n+1}|$, so ist zunächst nachzusehen, ob in dem Producte

$$\prod_{\nu=1}^{n} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

der zweite Factor, der innerhalb des Bereiches $\left|\frac{x}{a_{n+1}}\right| < 1$ die Darstellung

$$e^{-\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{m_\nu+\mu} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{m_\nu+\mu}}$$

gestattet, unbedingt und gleichmäfsig convergiren kann. Dazu ist nothwendig, dafs die unendliche Summe

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{m_{\nu+\mu}} \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+\mu}$$

convergirt, und das wird der Fall sein, wenn die Reihe von gröfserer Summe

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} n_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+\mu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{n_\nu}{1 - \left|\frac{x}{a_\nu}\right|} \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

oder wenn gar die Reihe:

$$N\left|\frac{x}{k}\right| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

endlich ist, wo $k$ den kleinsten der Werthe $1 - \left|\frac{x}{a_\nu}\right|$ $\nu = 1, n+2, \ldots)$ und $N$ die gröfste der ganzen Zahlen $n_\nu$ bezeichnet.

Wählt man deshalb die ganzen Zahlen $m_\nu$ so, dafs die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{m_\nu}}{a_\nu^{m_\nu+1}}\right|$$

beständig convergirt — und das ist zweifellos möglich, denn die durch die besondere Festsetzung $m_\nu = \nu - 1$ entstehende Summe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\nu-1}\right|$$

ist endlich —, so wird das Product

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

für alle Stellen des Bereiches $\left|\frac{x}{a_{n+1}}\right| < 1$ unbedingt aber auch gleichmäfsig convergiren, denn nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\delta$ kann man ein $\nu = n$ so angeben, dafs jedes Product

$$\prod_{\nu=n'}^{\infty} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \quad (n' > n)$$

in demjenigen Bereiche um die Stelle Null, wo $|x| = \xi$ kleiner ist als ein beliebig grofser Betrag $r$, von der Einheit um eine Gröfse $q_{n'}$ abweicht, deren Betrag wieder kleiner ist als $\delta$.

Ist nämlich $|a_{n+1}| < r$, so wird in dem Bereiche $|x| \leqq r$

$$E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{n_\nu}{m_\nu+\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}},$$

sobald nur $\nu > n$ ist, und das Product $\prod\limits_{\nu=n'} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ erfüllt dann die genannte Forderung, indem bei wachsendem $n$ die Summe

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{r}\frac{n_\nu}{m_\nu+\mu}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+\mu}$$

zugleich mit

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

unendlich klein d. h. auch kleiner als $\delta$ wird.

Das unendliche Product läfst sich aber auch durch eine äquivalente beständig convergente Potenzreihe ersetzen.

Stellt man die innerhalb des Bereiches $|x| < |a_{n+1}|$ unbedingt und gleichmäfsig convergente Doppelsumme

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{n_\nu}{m_\nu+\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}$$

durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x, n+1)$$

dar, indem man die gleichnamigen Glieder zusammenzieht, so werden in dem Bereiche $|x| < |a_1|$ gewifs alle Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x, \nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1, \ldots)$$

convergiren, und zwar gilt daselbst die Beziehung:

$$\mathfrak{P}(x, 1) - \mathfrak{P}(x, n+1) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{m_\nu + \mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu + \mu},$$

doch weil die Primfunction $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ durch die Reihe

$$e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{m_\nu+\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}}$$

dargestellt wird, kann man

$$e^{-\mathfrak{P}(x, 1) + \mathfrak{P}(x, n+1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

oder

$$e^{-\mathfrak{P}(x, 1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-\mathfrak{P}(x, n+1)}$$

setzen. Da man hierin jede Function $E$ als ganze Function in eine beständig convergente Reihe $\mathfrak{P}_\nu(x)$ entwickeln kann und der Factor $e^{-\mathfrak{P}(x, n+1)}$ in dem Bereiche $\left|\frac{x}{a_{n+1}}\right| < 1$ durch eine convergente Reihe $\mathfrak{P}'(x, n+1)$ zu ersetzen ist, so wird die ganze rechte Seite in eine innerhalb dieses Bereiches convergente Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x, n+1)$ zu transformiren sein. Der Ausdruck $e^{-\mathfrak{P}(x, 1)}$ ist zunächst nur durch eine in dem Bereiche $\left|\frac{x}{a_1}\right| < 1$ convergente Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x, 1)$ zu ersetzen; doch weil diese Reihe daselbst mit der Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x, n+1)$ übereinstimmt, mufs sie jedenfalls in der Umgebung der Stelle Null, wo $|x| < |a_{n+1}|$ ist, convergiren. Da wir endlich $n$ so grofs annehmen können als wir nur immer wollen, so wird die Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x, 1)$ für jeden noch so grofsen Werth von $x$ convergiren und eine ganze Function $G(x)$ definiren. Diese Function besitzt zufolge der Gleichung:

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{P}(x, n+1)}$$

die Eigenschaft, an der Stelle $a_\nu$ mit der vorgeschriebenen Ordnungszahl $n_\nu$ zu verschwinden, den das Product enthält den Factor:

$$\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu}.$$

Wir bemerken noch, dafs

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{P}(x, n+1) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{\mu + m_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}$$

gleich Null zu setzen ist, und sagen: Die gegebene Reihe von Stellen

$$a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

ist die Reihe von Nullstellen derjenigen ganzen Function, welche durch Entwicklung des Ausdruckes

$$e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{m_\nu+\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

in eine Potenzreihe nach $x$ entsteht, oder durch das unendliche Product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

dargestellt wird. Multiplicirt man $G(x)$ noch mit $x^{n_0}$, so geht eine ganze Function hervor, die aufser den Nullstellen $a_\nu$ noch an der Stelle Null $n_0$ mal verschwindet.

*Man kann also stets eine ganze Function mit vorgeschriebenen Nullstellen angeben*, aber schon darum, weil die ganzen Zahlen $m_\nu$ gewissermafsen willkürlich geblieben sind, ist die Function nicht eindeutig bestimmt, und ferner ist das Product einer ersten ganzen Function $G_0(x)$ der verlangten Art und einer im Endlichen nicht verschwindenden ganzen Function

$$e^{g_0(x)}$$

— wo $g_0(x)$ selbst eine ganze Function bezeichnet — eine Function derselben Art.

Aber umgekehrt ist jede ganze Function mit den gegebenen Nullstellen in der Form

$$G(x) = G(x)\, e^{g_0(x)} = e^{g_0(x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

darstellbar, denn der Quotient zweier ganzer Functionen mit denselben $n_\nu$fachen Nullstellen ist eine im Endlichen nirgends verschwindende und durchaus endliche, also ganze Function

$$\frac{G(x)}{G_0(x)} = G_1(x),$$

die stets auf die Form $e^{g_0(x)}$ gebracht werden kann.

In der That: bildet man die sogenannte logarithmische Ableitung von $G_1(x)$, d. i.

$$\frac{d \log G_1(x)}{dx} = \frac{1}{G_1} \frac{dG_1}{dx},$$

so ist diese wieder eine ganze Function $g_1(x)$, und wenn man der Stelle $x = 0$ den Anfangswerth $G_1(0)$ zuordnet, wird

$$G_1(x) = e^{g_0(x)}.$$

Darnach sind alle ganzen Functionen $G(x)$ mit den Nullstellen der *einfachen Function* $G_0(x)$ wirklich in der Formel

$$G_0(x) . e^{g_0(x)}$$

enthalten, in der $e^{g_0(x)}$ der *äuſsere Factor* von $G(x)$ heiſsen möge.

Eine ganze Function ist somit in einer der drei Formen darstellbar:

$$e^{g(x)}, \quad x^{n_0}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{g(x)}, \quad x^{n_0}\prod_{\nu=1}^{\infty}E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)e^{g(x)},$$

je nachdem sie keine, oder eine endliche oder unendliche Anzahl von Nullstellen besitzt. Wenn man die ganze Function

$$g(x) - g(0)$$

in eine unbedingt und gleichmäſsig convergente Summe ganzer rationaler Functionen $\gamma_\nu(x)$ zerlegt, die für $x = 0$ verschwinden, und

$$n_\nu \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu + \gamma_\nu(x) \text{ mit } g_\nu(x),$$

$$e^{g(0)} \text{ mit } C$$

bezeichnet, so wird das beständig unbedingt und gleichmäſsig convergente Product in das Product der Primfunctionen

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{g_\nu(x)}$$

und eines Factors $C . x^{n_0}$ übergehen.

Die Willkürlichkeit, die bei der Construction einer ganzen Function mit vorgegebenen Nullstellen übrig bleibt, liegt in der Wahl der Constanten $C$ und gewissermaſsen in der der rationalen Functionen $g_\nu(x)$. —

Eine eindeutige Function, welche überall mit Ausnahme der Stelle $c$ regulären Verhaltens ist, muſs eine ganze Function von $\frac{1}{x-c}$ $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ sein, und diese kann nur unendlich viele Nullstellen

$$a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

besitzen, wenn die Grenzstelle der $a_\nu$ die Stelle $c$ ist, oder was dasselbe sagt, wenn man die Reihe der $a_\nu$ so ordnen kann, daſs

$$|a_\nu - c| \leqq |a_{\nu-1} - c| \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu - c| = 0$$

wird.

Ist umgekehrt eine derartige Reihe von Stellen gegeben und nennt man jetzt Primfunction eine ganze Function von $\left(\frac{1}{x-c}\right)$, die nur an

einer Stelle $a_\nu$ verschwindet, so gibt es wiederum eine durch ein Product solcher Primfactoren darstellbare ganze Function $G_0\left(\frac{1}{x-c}\right)$ mit den vorgegebenen Nullstellen.

Nimmt man zunächst an, dafs keine der Nullstellen $a_\nu$ Null oder unendlich ist, und bildet die Primfunctionen

$$E_\nu(x) = \left(1 - \frac{a_\nu - c}{x-c}\right)^{n_\nu} c^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - c}{x-c}\right)^\mu},$$

entwickelt sie innerhalb des Bereiches

$$\left|\frac{a_\nu - c}{x-c}\right| < 1$$

in der Form

$$c^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{m_\nu + \mu}\left(\frac{a_\nu - c}{x-c}\right)^\mu}$$

und wählt die ganzen Zahlen $m_\nu$ derart, dafs

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|(a_\nu - c)\left(\frac{a_\nu - c}{x-c}\right)^{m_\nu}\right|$$

für alle endlichen Werthe von $\frac{1}{x-c}$ endlich ist, dann ist das unendliche Product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu^{n_\nu}(x)$$

die ganze Function $G_0\left(\frac{1}{x-c}\right)$ der verlangten Art.

Soll diese noch die $n_0$fache Nullstelle $x = 0$ haben, so tritt der Factor

$$\left(1 + \frac{c}{x-c}\right)^{n_0}$$

hinzu, und ist die Stelle $\infty$ $n_0$fache Nullstelle, so erscheint auch der Factor

$$\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}\right)^{n_0},$$

der für $c = \infty$ durch $\left(\frac{1}{x}\right)^{n_0}$ zu ersetzen ist.

Die hier besprochene Erweiterung bietet also gar keine Schwierigkeiten und man kann unmittelbar jede ganze Function $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ als Product von Primfunctionen

$$\left(1 - \frac{a_\nu - c}{x-c}\right)^{n_\nu} e^{g_\nu\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

darstellen, die nur eine Nullstelle $a_\nu$ und eine wesentlich singuläre Stelle $c$ besitzen.

In der Umgebung jeder Stelle $x_0$, die nicht Nullstelle von $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ ist, wird die ganze Function durch eine innerhalb des Bereiches $\left|\frac{x-x_0}{c-x_0}\right| < 1$ convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ und in der durch die Bedingung $\left|\frac{1}{x}\right| < \left|\frac{1}{c}\right|$ definirten Umgebung der regulären Stelle $x = \infty$ durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ darstellbar sein. In derjenigen Umgebung von $x = x_0$, welche keine Nullstelle von $G\left(\frac{1}{x}\right)$ enthält, kann man die ganze Function fernerhin auch durch eine Formel

$$e^{\mathfrak{P}(x-x_0)}$$

darstellen, indem daselbst

$$\frac{1}{G}\,\frac{dG}{dx}$$

in eine Potenzreihe zu entwickeln ist. Aber in der Umgebung einer Nullstelle $a_\nu$ wird man den Quotienten

$$\frac{G\left(\frac{1}{x-c}\right)}{E_\nu^{n_\nu}(x)}$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}'(x-a_\nu)$ entwickeln können, und darum wird $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ daselbst durch eine Formel

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

definirt werden, indem die Primfunction $E_\nu(x)$ in der Umgebung ihrer Nullstelle $a_\nu$ durch eine Reihe derselben Gestalt

$$(x-a_\nu)\,.\,e^{\mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)}$$

darstellbar ist. —

Aus den voranstehenden Sätzen kann man einen Schlufs auf die *Darstellungsform jeder eindeutigen Function* ziehen, *die* in dem Bereiche der unbeschränkten variablen Gröfse $x$ *nur eine wesentlich singuläre Stelle* $c$ *besitzt.*

Hat die eindeutige Function keine von $c$ verschiedene singuläre Stelle, so ist sie eine ganze Function des Argumentes $\frac{1}{x-c}$. Besitzt sie aber beliebig viele (eine endliche oder unendliche Anzahl) aufserwesentlich singulärer Stellen

$$b_1,\ b_2,\ldots b_\nu,\ldots$$

welche jedenfalls den Bedingungen:

$$|b_{\nu-1}-c| \geqq |b_\nu - c|, \qquad \lim |b_\nu - c| = 0$$

gemäfs zu ordnen sind, so gibt es eine ganze Function $G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)$, die an diesen Stellen in derselben Ordnung verschwindet, als die in Rede

stehende Function $F(x)$ dort unendlich wird. Das Product von $F(x)$ und $G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)$ wird dann eine mit Ausnahme der Stelle $c$ überall endliche und eindeutige Function $G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$ und darum nimmt $F(x)$ selbst die Gestalt an:

$$F(x) = \frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)} = e^{g(x)} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E^{n_\nu}(x, m_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E^{n'_\nu}(x, m'_\nu)}$$

d. h. die eindeutige Function mit der wesentlich singulären Stelle $c$ ist durch den Quotienten zweier ganzer Functionen des Argumentes $\frac{1}{x-c}$ auszudrücken, von denen eine gewifs transcendent ist. Die Function $G_2$ mufs dann transcendent sein, wenn $F(x)$ unendlich viele aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt.

Umgekehrt ist der Quotient zweier ganzer Functionen desselben Argumentes $\frac{1}{x-c}$, von denen beide oder blos eine transcendent sei, eine eindeutige Function mit der wesentlich singulären Stelle $c$, denn wäre sie in der Umgebung von $c$ durch ein Product:

$$\frac{1}{(x-c)^m} \mathfrak{P}(x-c)$$

darzustellen, so könnte weder $G_1$ noch $G_2$ transcendent sein.

Man kann aus der Darstellungsform von $F(x)$ entnehmen, dafs diese Function in unendlich kleiner Umgebung ihrer wesentlich singulären Stelle $c$ jedem Werthe beliebig nahe kommen kann.

Man bemerke zunächst, dafs $|F(x)|$ für beliebig kleine Werthe von $|x-c|$ gröfser gemacht werden kann als eine beliebig vorgelegte Gröfse $K$. Wenn $G_2$ eine transcendente Function ist, so liegen in beliebiger Nähe von $c$ Nullstellen dieser Function, an denen $F(x)$ unendlich grofs wird. Ist aber $G_2$ eine ganze rationale Function, so bringe man den Quotienten auf die Form

$$\frac{G_1^{(1)} + G_2 G_1^{(2)}}{G_2},$$

wo auch $G_1^{(1)}$ eine ganze rationale Function, aber niedrigeren Grades als $G_2$ ist und $G_1^{(2)}$ eine ganze transcendente Function bedeutet. Dann wird $\frac{G_1^{(1)}}{G_2}$ für unendlich grofse Werthe des Argumentes $\frac{1}{x-c}$ unendlich klein und $|F(x)|$ in unendlich kleiner Umgebung von $c$ unendlich grofs.

Da endlich die eindeutigen Functionen

$$\frac{1}{F(x)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{F(x)-C}$$

dieselbe wesentlich singuläre Stelle besitzen, so existiren in dem genannten Bereiche um $c$ auch Stellen, wo

$$|F(x)| < \frac{1}{K} \quad \text{und} \quad |F(x) - C| < \frac{1}{K}$$

wird, womit die Behauptung erwiesen ist.

### § 51. Fortsetzung. Darstellung der trigonometrischen Functionen.

Wir kehren wieder zu unserer Function

$$G_0(x) = x^{n_0} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

zurück und wollen sie — wie das bei der gleichmäſsigen und unbedingten Convergenz des Productes erlaubt ist — ebenso wie das Product einer endlichen Anzahl von Factoren differentiiren. Es ist

$$\frac{1}{G_0}\frac{dG_0}{dx} = \frac{d\log G_0}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \left(\frac{1}{x - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) + \cdots + \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\nu}{a_\nu}\right)^{m_\nu - 1}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{d\log(x - a_\nu)^\nu}{dx} + \frac{n_\nu}{a_\nu}\left(1 + \frac{x}{a_\nu} + \cdots + \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\mu_\nu - 1}\right)\right]$$

und wir wissen, daſs $\frac{d\log G_0}{dx}$ in der Umgebung jeder von den Nullstellen $a_\nu$ und der unendlich fernen Stelle verschiedenen Stelle regulären Verhaltens sein muſs.*)

---

*) Man bemerkt, daſs

$$\frac{G_0(x)\dfrac{dE\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)}{dx}}{E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)}$$

für $x = a_\nu$ gleich $\left(\frac{dG_0}{dx}\right)_{x=a_\nu} = G_0'(a_\nu)$ und für $x = a_{\nu'}$ Null wird. Deshalb stellt die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \frac{G_0(x)}{G_0'(a_\nu)} \frac{\dfrac{dE\left(\frac{x}{a_\nu}; m_\nu\right)}{dx}}{E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)} e^{g_\nu(x) - g_\nu(a_\nu)}$$

eine ganze Function $G(x)$ dar, die an den unendlich vielen Nullstellen $a_1, a_2 \ldots$ die festgesetzten Werthe $\eta_1, \eta_2, \ldots$ annimmt.

Wann diese Summe beständig convergirt, wollen wir nicht untersuchen, denn es ist uns nur darum zu thun, die Erweiterung der Lagrange'schen Interpolationsformel anzudeuten.

Ist die Häufungsstelle der unendlich vielen Stellen, an denen eine ganze Function vorgegebene Werthe hat, nicht $x = \infty$, sondern $x = c$, so muſs die Stelle $c$ eine wesentlich singuläre Stelle der gesuchten Function sein, denn in

Setzen wir innerhalb des Bereiches $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$

$$\frac{n_\nu}{x-a_\nu} = -\frac{n_\nu}{a_\nu}\left(1 - \frac{x}{a_\nu} + \cdots + \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu - 1}\right) + \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\frac{n_\nu}{x-a_\nu},$$

so wird die logarithmische Ableitung von $G_0$ auch durch die innerhalb des Bereiches $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$ zweifellos convergente unendliche Summe rationaler Functionen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\frac{n_\nu}{x-a_\nu} \tag{$\alpha$}$$

definirt sein.

Sind $a_1, a_2, \ldots$ unendlich viele Stellen, von denen in einem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl liegt, auf dafs also

$$|a_{n+1}| > |a_n| \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty}|a_\nu| = \infty$$

ist, bezeichnen ferner $n_\nu$ endliche ganze Zahlen und $m_\nu$ derartige ganze Zahlen, dafs die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

beständig convergirt, dann kann man für die voranstehende Summe ($\alpha$) die gleichmäfsige Convergenz in demjenigen Bereiche beweisen, der durch die Bedingungen charakterisirt wird:

$$|x| < R, \quad |a_{n+1}| > R > |a_n|, \quad |x - a_\nu| > \varrho_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo $R$ eine beliebig grofse aber endliche Gröfse ist und $\varrho_\nu$ beliebig klein sind.*)

Der genannte Bereich wird durch eine Kreisfläche um die Stelle $x=0$ gebildet, auf deren Grenze keine der Stellen $a_\nu$ liegt, aus deren Innerem aber beliebig kleine um die daselbst befindlichen Stellen $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ sich erstreckende Kreisflächen ausgeschlossen sind.

Wenn nach Annahme einer endlichen Gröfse $R$ ein endliches $\nu = n$ gefunden ist, so dafs

$$|a_n| < R < |a_{n+1}|,$$

so wird die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\frac{n_\nu}{x-a_\nu}$$

innerhalb unseres Bereiches gewifs gleichmäfsig convergiren und von der Summe

---

beliebig kleiner Umgebung der Häufungsstelle hat sie unendlich viele Werthe, unter denen beliebig kleine und beliebig grofse sein können.

*) Vergl. Cesaro, Giornale di matematiche 1885.

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\frac{n_\nu}{x-a_\nu}$$

werden wir das auch behaupten können, wenn die Summe der absoluten Beträge der Summanden endlich ist.

Da aber

$$|x|<|a_{n+\nu}|, \quad |a_{n+\nu}-x| \overline{\gtrless} |a_{n+\nu}|-|x|>0$$

ist, so wird

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu}\frac{n_\nu}{|a_\nu-x|}<\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu}\frac{n_\nu}{|a_\nu|-|x|}=\sum_{\nu=\nu+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|\frac{n_\nu}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}.$$

Heifst $N$ wieder die gröfste der ganzen Zahlen $n_{n+\nu}$ und ist die kleinste der Gröfsen $1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|$ $K$, so wird die letzte Summe kleiner als

$$\frac{N}{K}\sum_\nu\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

und damit ist die Behauptung der Voraussetzung zufolge bewiesen.

Es ist auch zu sehen, dafs in eben demselben Bereiche gleichzeitig die neuen Summen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\frac{n_\nu}{(x-a_\nu)^k}$$

gleichzeitig convergiren, wenn $k$ eine ganze Zahl bezeichnet. Denn nennt man die kleinste der Gröfsen $\varrho_\nu$ $\varrho$, so ist an jeder Stelle unseres Bereiches

$$|a_\nu-x|>\varrho$$

und deshalb

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu}\frac{n_\nu}{|a_\nu-x|^k}<\frac{1}{\varrho^{k-1}}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu}\frac{n_\nu}{|a_\nu-x|},$$

womit der Satz einleuchtet.

Läfst sich den von Null verschiedenen Nullstellen $a_\nu$ unserer ganzen Function $G_0(x)$ eine ganze Zahl $m+1$ so zuordnen, dafs

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$$

endlich ist, so kann man offenbar allen Zahlen $m_\nu$ den Werth $m$ beilegen, denn

$$\sum_\nu\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|=|x^m|\sum_\nu\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$$

wird für jeden endlichen Werth von $x$ endlich bleiben. Dann convergiren aber auch die Summen

$$\sum_\nu\frac{n_\nu}{a_\nu^m(x-a_\nu)} \quad \text{und} \quad \sum_\nu\frac{n_\nu}{a_\nu^m(x-a_\nu)^k}$$

in dem früher genannten Bereiche gleichmäfsig.

Nehmen wir von vornherein an, daſs keine der den Nullstellen $a_\nu$ zugeordneten ganzen Zahlen $m_\nu$ eine endliche angebbare Zahl $m$ übertrifft, so kommt man leicht zu dem Schlusse, es muſs dann $\sum\limits_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$ endlich sein. In der That führt die $m$malige Differentiation der Gleichung:

$$\frac{d \log G_0}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{d \log (x-a_\nu)^{n_\nu}}{dx} + \frac{n_\nu}{a_\nu}\left(1+\frac{x}{a_\nu}+\cdots+\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu-1}\right)\right]$$

auf eine Summe:

$$\frac{d^{m+1} \log G_0}{dx^{m+1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d^{m+1} \log (x-a_\nu)^{n_\nu}}{dx^{m+1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\, m!\, n_\nu}{(x-a_\nu)^{m+1}},$$

die in der Umgebung der nicht singulären Stelle $x = 0$ endlich sein soll, aber nicht endlich sein kann, wenn $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$ nicht convergirt.

L a g u e r r e nennt *eine ganze transcendente Function* $G_0(x)$ *vom Range* $m$, wenn für die Reihe ihrer Nullstellen $m$ die kleinste ganze Zahl ist, für die $\sum\limits_\nu\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$ endlich ist. Darnach sind die Functionen

$$Fc(x), \quad \sin \pi x, \quad \cos \pi x$$

ganze Functionen ersten Ranges. Die Reihe der Nullstellen von $\sin \pi x$ und $\cos \pi x$ sind

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{beziehungsweise} \quad \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

und weil die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \quad \text{und umsomehr} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(2\nu+1)^2}$$

convergirt, kann man diese Functionen in der Form darstellen:

$$x \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu}} \cdot e^{g(x)}$$

$$\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{2x}{2\nu+1}\right) e^{\frac{2x}{2\nu+1}} e^{\gamma(x)}.$$

Doch müssen hier die *äuſseren Factoren* $e^{g(x)}$, $e^{\gamma(x)}$ noch passend bestimmt werden, damit die Producte gerade $\sin \pi x$ und $\cos \pi x$ und nicht blos Functionen mit denselben Nullstellen definiren.

Zur Bestimmung dieses Factors dienen folgende allgemeine Betrachtungen.

Ist $0, a_1, a_2, \ldots$ die Reihe der Nullstellen einer ganzen Function des $m^{\text{ten}}$ Ranges und läſst man $x$ unendlich zunehmen, ohne dabei den Bereich der gleichmäſsigen Convergenz der Summe

$$\sum_{\nu} \frac{1}{a_\nu^m} \frac{n_\nu}{(x - a_\nu)}$$

zu verlassen, so kann das stets in solcher Weise geschehen, dafs diese Summe und auch die der absoluten Beträge der Summanden nach Null convergirt.

Wir haben nur nöthig, die zweite Behauptung zu erweisen. Man kann stets ein $\nu = n$ so angeben, dafs

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{n_\nu}{|a_\nu^m|\,|a_\nu - x|}$$

kleiner wird als eine beliebig kleine Gröfse $\delta$, und weil man in der somit bestehenden Ungleichung:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{n_\nu}{|a_\nu^m|\,|a_\nu - x|} < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n_\nu}{|a_\nu^m|\,|a_\nu - x|} + \delta$$

für die Summe der endlichen Anzahl von Gliedern nach Annahme einer kleinen Gröfse $\varepsilon$ eine positive Gröfse $\xi$ so bestimmen kann, dafs für jedes $x$ von gröfserem Betrage als $\xi$ die Summe kleiner wird als $\varepsilon$, so convergirt die genannte Summe für unendlich wachsende Werthe von $x$ unseres Bereiches nach Null.

Daraus folgt, dafs die logarithmische Ableitung von $G_0(x)$ nach Multiplication mit $x^{-m}$

$$\frac{1}{x^m} \frac{d \log G_0}{dx} = \frac{n_0}{x^{m+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{a_\nu^m (x - a_\nu)}$$

mit unendlich wachsendem $x$ nach Null convergirt.

Dasselbe gilt auch, wenn die ganze Function $m^{\text{ten}}$ Ranges einen äufseren Factor $e^{g(x)}$ besitzt, in welchem die ganze rationale Function $g(x)$ den $m^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt.

Zur Charakterisirung der Convergenz der in Rede stehenden Summe nach Null, wenn $x$ ohne eine singuläre Stelle $a_\nu$ zu überschreiten, nach $\infty$ übergeht, mag hervorgehoben werden, dafs das Product

$$x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{a_\nu^m (x - a_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{a_\nu^m \left(1 - \frac{a_\nu}{x}\right)}$$

unter gleichen Umständen divergirt, indem nämlich die Summe:

$$\sum_{\nu} \frac{n_\nu}{|a_\nu^m| \left|1 + \frac{a_\nu}{x}\right|}$$

und umsomehr die Summe der absoluten Beträge $\dfrac{n_\nu}{|a_\nu^m| \left|1 - \frac{a_\nu}{x}\right|}$ mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^m$ unendlich wird.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen läfst sich zeigen, dafs die Summen

$$\sum_\nu \frac{x^k}{a_\nu^m (x - a_\nu)^{k+1}}$$

mit wachsendem $x$ nach Null, aber

$$\sum_\nu \frac{x^k}{a_\nu^m (x - a_\nu)^k}$$

nach Unendlich convergiren, und dann kann man sich überzeugen, dafs gleichzeitig mit $x^{-m} \frac{d \log G_0}{dx}$ auch die Quotienten

$$\frac{G_0^{(\mu+1)}(x)}{x^m G_0^{(\mu)}(x)}$$

nach Null convergiren, wo $G_0^{(\mu)}(x)$ die $\mu^{\text{te}}$ Ableitung von $G_0(x)$ bezeichnet. Nun ist jede Ableitung einer ganzen Function wieder eine solche, und wenn man daher zeigen kann, dafs eine an die Eigenschaften

$$\lim_{x=\infty} \left( \frac{G'(x)}{x^m G(x)} \right) = 0, \quad \lim_{x=\infty} \left( \frac{G'(x)}{x^{m-1} G(x)} \right) = \infty$$

geknüpfte ganze Function vom $m^{\text{ten}}$ Range sein mufs, hat man auch gezeigt, dafs jede Ableitung einer ganzen Function des $m^{\text{ten}}$ Ranges von demselben Range $m$ ist.

Man sieht aber leicht, dafs der Rang $m'$ einer ganzen Function $G(x)$, welche die genannten Eigenschaften besitzt und deren zugeordnete Zahlen $m_\nu$ höchstens den Werth $m$ erhalten, nicht gröfser oder kleiner sein kann als $m$, weil im ersten Falle

$$x^{m'-m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n_\nu}{a_\nu^m (x - a_\nu)}$$

nicht nach Null convergiren und in dem zweiten Falle die zweite der oben genannten Bedingungen verletzt werden würde.

Da die Zahlen $m_\nu$ aber auch nicht in's Unendliche zunehmen können, wie z. B. im allgemeinen Falle, wo wir $m_\nu = \nu - 1$ setzten, ist wirklich $G(x)$ vom $m^{\text{ten}}$ Range. In dem äufseren Factor kann $G(x)$ natürlich den Grad $m$ nicht übersteigen.

Sollten wir nunmehr bemerken, dafs

$$\frac{1}{x} \frac{d \log \sin \pi x}{dx} = \frac{\pi}{x} \operatorname{cotg} \pi x = \frac{g'(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\nu (x - \nu)}$$

für $x = \infty$ nach Null convergirt, so mufs der äufsere Factor in dem Producte für $\sin \pi x$ die Form

$$e^{ax+b}$$

besitzen. Nun ist

$$\frac{\pi}{x} \operatorname{cotg} \pi x = \frac{i\pi}{x} \frac{e^{2\pi x i}+1}{e^{2\pi x i}-1}$$

und wenn wir hier $x = \xi + i\eta$ nach Unendlich convergiren lassen, ohne die auf der reellen Axe liegenden Nullstellen von $\sin \pi x$ zu überschreiten, also z. B. dadurch, dafs wir nur $\eta$ nach $\pm\infty$ gehen lassen, so wird

$$\operatorname{cotg} \pi(\xi + i\eta) \text{ nach } \pm i \text{ und } \frac{\pi}{x} \operatorname{cotg} \pi x \text{ nach Null}$$

convergiren. — Wir setzen deshalb

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = a + \frac{1}{x} + \sum_{\nu}{}' \frac{x}{\nu(x-\nu)}$$

und weil

$$-\pi \operatorname{cotg} \pi x = a - \frac{1}{x} - \sum_{\nu}{}' \frac{x}{\nu(x-\nu)}$$

ist, folgt, dafs $a = 0$ ist. Vergleicht man schliefslich die Entwicklungen von

$$\sin \pi x \quad \text{und} \quad e^b x \prod_{\nu}{}' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu}}$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$, so erkennt man, dafs $e^b = \pi$ zu setzen ist und damit wird:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu}}$$

und entsprechend

$$\cos \pi x = \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{2x}{2\nu+1}\right) \cdot e^{\frac{2x}{2\nu+1}}.$$

Daneben ist:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right), \quad \cos \pi x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2}\right)$$

und

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x}{\nu(x-\nu)}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-\nu^2} = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu}\right)$$

$$-\pi \operatorname{tg} \pi x = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2\nu+1}{2}} + \frac{1}{\frac{2\nu+1}{2}}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{4x}{(2\nu+1)(2x-(2\nu+1))}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \left(\frac{2\nu-1}{2}\right)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2\nu-1}{2}} + \frac{1}{x + \frac{2\nu-1}{2}}\right),$$

wobei aber in den an vierter Stelle stehenden Summen die Gröſsen $\frac{1}{x-\nu}$ und $\frac{1}{x+\nu}$ nicht von einander zu trennen sind. Die Differentiation dieser Gleichungen führt auf die Formeln:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\nu)^2}, \quad \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi x} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{2\nu+1}{2}\right)^2}.$$

Setzt man in dem ersten Ausdruck für $\sin \pi x$ an Stelle $x$ $(x-a)$, wo $a$ keine ganze Zahl bedeuten soll und dividirt $\sin \pi(x-a)$ durch $\sin(-\pi a)$ so entsteht die Gleichung

$$\frac{\sin \pi(x-a)}{\sin(-\pi a)} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \prod_{\nu}{}' \left(1 - \frac{x}{\nu+a}\right) e^{\frac{x}{\nu}}.$$

Will man rechterhand die Primfunctionen $\left(1 - \frac{x}{\nu+a}\right) e^{\frac{x}{\nu+a}}$ auftreten lassen, so beachte man, daſs man

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\prod_{\nu}{}'\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu}}$$

$$= \left(1-\frac{x}{a}\right)\prod{}'\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)\cdot e^{\frac{x}{\nu+a}} \prod{}' e^{x\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)}$$

setzen darf, indem das Product

$$\prod_{\nu}{}' e^{x\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)} = e^{x\sum_{\nu}' \left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)} = e^{x\left(\frac{1}{a}+\pi \operatorname{cotg}(-\pi a)\right)}$$

beständig gleichmäſsig convergirt, wie das nach der allgemeinen Theorie nothwendig ist.

Nun entsteht die später zu benutzende Formel

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot e^{\frac{x}{a}} \prod_{\nu}{}' \left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)\cdot e^{\frac{x}{\nu+a}} = \frac{\sin \pi(x-a)}{\sin(-\pi a)}\, e^{\pi x \operatorname{cotg} \pi a},$$

der die nachstehende leicht zuzugesellen ist:

$$\prod_{\nu}\left(1-\frac{x}{\frac{2\nu+1}{2}+a}\right)\cdot e^{\frac{x}{\frac{2\nu+1}{2}+a}} = \frac{\cos \pi(x-a)}{\cos(-\pi a)}\, e^{\pi x \operatorname{tg} \pi a},$$

wo $a$ aber keine der Zahlen $\frac{2\mu+1}{2}$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sein darf.

Zunächst kann man diese Formeln dazu benutzen, um die Functionen

$$\frac{\cos \pi x + \cos \pi a}{1 + \cos \pi a} = \frac{\cos \pi \left(\frac{x+a}{2}\right) \cos \pi \left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos^2 \pi \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\cos \pi x - \cos \pi a}{1 - \cos \pi a} = - \frac{\sin \pi \left(\frac{x+a}{2}\right) \sin \pi \left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin^2 \pi \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\sin \pi x + \sin \pi a}{\sin \pi a} = \frac{\sin \pi \left(\frac{x+a}{2}\right) \cos \pi \left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin \pi \frac{a}{2} \cos \pi \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\sin \pi x - \sin \pi a}{\sin \pi a} = \frac{\cos \pi \left(\frac{x+a}{2}\right) \sin \pi \left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos \pi \frac{a}{2} \sin \pi \frac{a}{2}}$$

durch Producte darzustellen, die als Functionen von $x$ beständig convergiren, auf deren Bildung Euler weitläufig eingegangen ist.

Setzt man in den obigen Formeln $x = a + \frac{1}{2}$ respective $x = a$, so erhält man die Gleichungen:

$$- \operatorname{cosec} \pi a = \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\nu - 1}{2\nu + 2a}\right) e^{\frac{2a+1}{2\nu+2a}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}(2a+1) \operatorname{cotg} \pi a}$$

$$\sec \pi a = \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\nu + 1}{2\nu + 1 + 2a}\right) e^{\frac{2a}{2\nu+1+2a}} \cdot e^{-\pi a \operatorname{tg} \pi a},$$

in denen die rechten Seiten als Functionen von $a$ in der Umgebung der Stelle $a = 0$ höchstens in den Bereichen

$$|a| < 1 \qquad |a| < \frac{1}{2}$$

eine Bedeutung haben. (Vergleiche die Producte in § 186 der Introductio in analysin infinitorum von Euler.)

Da unseren allgemeinen Betrachtungen zufolge die Functionen $\sin \pi x$ und $\cos \pi x$ auch durch

$$\pi x \, e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu+1} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\mu+1}} \quad \text{beziehungsweise} \quad e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu+1} \left(\frac{2x}{2\nu+1}\right)^{\mu+1}}$$

darzustellen sind (siehe pag. 312) und die Entwicklung dieser Ausdrücke nach Potenzen von $x$ der Form nach andere Coefficienten enthält als die schon bekannten Potenzreihen

$$\sin \pi x = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos \pi x = 1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + \frac{(\pi x)^4}{4!} - \cdots,$$

so kann man durch Vergleich der beiden Entwicklungen eine Reihe interessanter Ausdrücke für die ganzzahligen Potenzen von $\pi$ aufstellen. Es wird

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{2!}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{4!}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}=\frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{6!}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}=\frac{1}{30}\,\frac{2^7\pi^8}{8!}$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\cdots=\frac{\pi^{10}}{93555}=\frac{5}{66}\,\frac{2^9\pi^{10}}{10!}$$

u. s. w. Die numerischen Factoren $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \ldots$ heifsen die Bernoulli'schen Zahlen, die wir mit

$$B_1,\ B_3,\ B_5,\ldots$$

bezeichnen.

Der Vergleich der beiden Reihen für $\cos \pi x$ gibt uns Ausdrücke für die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^{2\mu}}\quad(\mu=1,\,2,\,3\ldots),$$

die sich aber bereits aus der Summe der $(-2\mu)^{\text{ten}}$ Potenzen aller ganzen Zahlen in folgender Weise bestimmen lassen: Nennt man die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2\mu}}=S_{2\mu},$$

so ist

$$\frac{S_{2\mu}}{2^{2\mu}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu)^{2\mu}}\ \text{und}\ S_{2\mu}-\frac{S_{2\mu}}{2^{2\mu}}=\frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu}}\,S_{2\mu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^{2\mu}}$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{(2\nu-1)^{2\mu}}=B_{2\mu-1}\,\frac{2^{2\mu}-1}{2}\,\frac{\pi^{2\mu}}{(2\mu)!}$$

und ferner ist auch

$$S_{2\mu}-\frac{2S_{2\mu}}{2^{2\mu}}=\frac{2^{2\mu-1}-1}{2^{2\mu-1}}\,S_{2\mu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{2\mu}}=B_{2\mu-1}\,\frac{2^{2\mu-1}-1}{(2\mu)!}\,\pi^{2\mu}.$$

Mit Hilfe der Formeln:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2x}{(x^2-\nu^2\pi^2)},\quad \operatorname{tg} x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2x}{\left(\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)^2\pi^2-x^2\right)}$$

kann man cotg $x$ und tg $x$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$ durch Potenzreihen nach $x$ darstellen, indem man die einzelnen der Summanden nach Potenzen von $x$ entwickelt. Es wird dann:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2\mu}}{\pi^{2\mu}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\mu+2}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - \left( B_1 \frac{2^2 x}{2!} + B_3 \frac{2^4 x^3}{4!} + B_5 \frac{2^6 x^5}{6!} + \cdots \right)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2^3 x}{\pi^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^{2\mu+2}} \right)$$

$$= B_1 2^2 (2^2 - 1) \frac{x}{2!} + B_3 2^4 (2^4 - 1) \frac{x^3}{4!} + B_5 2^6 (2^6 - 1) \frac{x^5}{6!} + \cdots.$$

Da die Coefficienten der Potenzreihe für tg $x$:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu-1} \frac{x^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}$$

der Recursionsformel genügten:

$$c_{2n-1} - \binom{2n-1}{2} c_{2n-3} + \binom{2n-1}{4} c_{2n-5} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{2n-2} c_1 = (-1)^{n-1},$$

wird man die Bernoulli'schen Zahlen nach und nach aus den Gleichungen

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} - \binom{2n-1}{2} \cdot \frac{2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)}{2n-2} B_{2n-3} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-2} \binom{2n-1}{2n-4} \frac{2^4(2^4-1)}{4} B_3 + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{2n-2} \frac{2^2(2^2-1)}{2} B_1 = (-1)^{n-1}$$
$$(n = 2, 3 \ldots)$$

bestimmen können.

Beachtet man, dafs

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x,$$

$$\operatorname{cotg} \pi x + \operatorname{tg} \pi \frac{x}{2} = \operatorname{cosec} \pi x$$

ist, so ergibt sich für die Function Cosecante erstens die Reihenentwicklung

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \frac{2^{2n-1}-1}{n} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

und durch Addition der Gleichungen:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x}{\nu(x-\nu)}$$

$$\pi \operatorname{tg} \pi \frac{x}{2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(2\nu+1)(2\nu+1-x)}$$

die Darstellung:

$$\pi \operatorname{cosec} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^\nu x}{\nu(x-\nu)} = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^\nu \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 2x}{x^2-\nu^2} = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu}\right).$$

Um den Cyclus der Darstellungen der trigonometrischen Functionen durch Potenzreihen, unendliche Producte oder unendliche Summen rationaler Functionen voll zu machen, hat man noch $\pi \sec \pi x$ durch eine Summe und $\sec x$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$ durch eine convergente Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$ darzustellen. Wir werden diese Aufgabe alsbald lösen und bemerken hier nur, dafs $c_0 = 1$ und alle Coefficienten $c_{2\mu-1}$ Null sein müssen, weil

$$\sec 0 = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^{2\mu-1} \sec x}{dx^{2\mu-1}}\right)_{x=0} = 0$$

ist. —

Um eine andere Anwendung der früheren Sätze über die ganzen Functionen mit gegebenen Nullstellen vorzubringen, wollen wir den *Sinus und Cosinus ganzzahliger Vielfache des Argumentes $x$ als Product einer endlichen Anzahl von Sinus und Cosinus-Functionen neuer Argumente* darstellen.

Da die Function $\sin mx$ offenbar dieselben Nullstellen besitzt wie all die Functionen

$$\sin x, \ \sin\left(\frac{\pi}{m} - x\right), \ \sin\left(\frac{2\pi}{m} - x\right), \ldots \ \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m} - x\right)$$

oder

$$\sin x, \ \sin\left(x + \frac{\pi}{m}\right), \ \sin\left(x + \frac{2\pi}{m}\right), \ldots \ \sin\left(x + \frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

und keine weiteren, so kann man

$$\sin mx = e^{g(x)} \sin x \prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{m}\right) = e^{g(x)} \sin x \prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m} - x\right)$$

setzen, und der Vergleich der beiden Seiten dieser Gleichung zugehörigen Darstellungen durch ein Product von Primfunctionen lehrt, wie die ganze Function $g(x)$ beschaffen sein mufs.

Ist $m$ eine ungerade Zahl $2\mu + 1$, so schreibe man statt der Factoren $\sin\left(x + \frac{k\pi}{m}\right)$ $(k = \mu + 1, \mu + 2, \ldots 2\mu)$ $\sin\left(\frac{(m-k)\pi}{m} - x\right)$ und wenn $m = 2\mu$ ist, setze man an Stelle von $\sin\left(x + \frac{\mu\pi}{m}\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ und für

$$\sin\left(x + \frac{(\mu+\nu)\pi}{m}\right) = \sin\left(\frac{\mu-\nu}{m}\pi - x\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots \mu - 1),$$

dann geht die obige Gleichung in die folgenden über:

$$\sin mx = \sin(2\mu + 1)x = e^{g_1(x)} \sin x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} + x\right),$$

$$\sin mx = \sin 2\mu x = e^{g_2(x)} \sin x \cos x \prod_{\lambda=1}^{\mu-1} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} + x\right).$$

Wenn man ferner die leicht zu verificirende Beziehung:

$$\sin(u + v) \cdot \sin(u - v) = \sin^2 u - \sin^2 v$$

verwendet, erhält man die nachstehenden Darstellungen:

$$\sin mx = \sin(2\mu + 1)x = e^{g_1(x)} \cdot \sin x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \left(\sin^2 \frac{\pi\lambda}{m} - \sin^2 x\right)$$

$$\sin mx = \sin 2\mu x = e^{g_2(x)} \sin x \cos x \prod_{\lambda=1}^{\mu-1} \left(\sin^2 \frac{\pi\lambda}{m} - \sin^2 x\right),$$

aus denen mit Hilfe der Reihenentwicklung für $\sin mx$ und $\sin x$ abzulesen ist, dafs $e^{g_1(x)}$ und $e^{g_2(x)}$ nur Constante $C_1$ und $C_2$

$$C_1 = \frac{2\mu + 1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu} \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2\mu + 1}}, \quad C_2 = \frac{2\mu}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu-1} \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2\mu}}$$

sein können.

Ebenso findet man die Gleichungen:

$$\cos mx = \cos(2\mu + 1)x = C \cos x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} + x\right)$$

$$= C \cos x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} - \sin^2 x\right)$$

$$\cos mx = \cos 2\mu x = C \prod_{\lambda=1}^{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} + x\right)$$

$$= C \prod_{\lambda=1}^{\mu} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2}\frac{2\lambda - 1}{m} - \sin^2 x\right)$$

und die Constante $C$ ist das Reciproke des Productes $\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\lambda - 1}{m}$.

Da

$$2(\sin^2 u - \sin^2 v) = (\cos^2 v - \sin^2 v) - (\cos^2 u - \sin^2 u) = \cos 2v - \cos 2u$$

ist, bestehen auch die folgenden Formeln:

$$\sin mx = \sin(2\mu+1)x = \frac{2\mu+1}{2^\mu}\frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi\lambda}{m}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\prod_{\lambda=1}^{\mu}\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi\lambda}{m}\right)$$

$$\sin mx = \sin 2\mu x = \frac{2\mu}{2^{\mu-1}}\frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu-1}\sin^2\frac{\pi\lambda}{m}}\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\prod_{\lambda=1}^{\mu-1}\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi\lambda}{m}\right)$$

$$\cos mx = \cos(2\mu+1)x = \frac{1}{2^\mu\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda-1}{m}}\cos x\prod_{\lambda=1}^{\mu}\left(\cos 2x - \cos\pi\frac{2\lambda-1}{m}\right)$$

$$\cos mx = \cos 2\mu x = \frac{1}{2^\mu\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda-1}{m}}\prod_{\lambda=1}^{\mu}\left(\cos 2x - \cos\pi\frac{2\lambda-1}{m}\right).$$

Vergleicht man die obigen Formeln mit den auf Seite 298 angeschriebenen Darstellungen von $\sin mx$ und $\cos mx$ als rationale Functionen von $\sin x$ und $\cos x$, so erhält man durch Gleichsetzen der Coefficienten der höchsten Potenzen von $\sin x$ die Beziehungen:

$$(-1)^\mu C_1 = \frac{(-1)^\mu(2\mu+1)}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi\lambda}{2\mu+1}} = (-1)^\mu\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{m!} = (-1)^\mu 2^{m-1}$$

oder

$$2^{2\mu}\prod_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi\lambda}{2\mu+1} = 2\mu+1, \quad C_1 = 2^{m-1},$$

und ebenso

$$2^{2\mu-1}\prod_{\lambda=1}^{\mu-1}\sin^2\frac{\pi\lambda}{2\mu} = 2\mu, \quad C_2 = 2^{m-1},$$

$$2^{2\mu}\prod_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda-1}{2\mu+1} = 1, \quad 2^{2\mu-1}\prod_{\lambda=1}^{\mu}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{2\lambda-1}{2\mu} = 1, \quad C = 2^{m-1}.$$

Setzt man $\sin x = u$ und $m = 2\mu+1$, so besteht die Gleichung:

$$1 - \frac{m}{1!}\frac{u}{\sin mx} + \frac{m(m^2-1^2)}{3!}\frac{u^3}{\sin mx} - \cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}}2^{m-1}\frac{u^m}{\sin mx} = 0,$$

deren $m$ Wurzeln $u$ wir angeben wollen. Das Product derselben ist

$$\frac{(-1)^\mu}{2^{m-1}} \sin mx \text{ oder } (-1)^\mu \sin x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} + x\right)$$

und weil — wie man sich leicht überzeugt —

$$\sin x \prod_{\lambda=1}^{\mu} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} - x\right) \sin\left(\frac{\pi\lambda}{m} + x\right) = (-1)^\mu \prod_{k=0}^{m-1} \sin\left(x + \frac{2k\pi}{m}\right)$$

ist, heifsen die $m$ Wurzeln:

$$\sin x,\ \sin\left(x + \frac{2\pi}{m}\right),\ \sin\left(x + \frac{4\pi}{m}\right), \ldots \sin\left(x + \frac{2(m-1)\pi}{m}\right)$$

oder

$$\sin x,\ \pm \sin\left(\frac{\lambda\pi}{m} + x\right),\ \mp \sin\left(\frac{\lambda\pi}{m} - x\right)\ (\lambda = 1, 2 \ldots \mu),$$

und zwar gelten hier die oberen oder unteren Zeichen, je nachdem $\lambda$ gerade oder ungerade ist.

Da unsere Gleichung das Glied in $u^{m-1}$ nicht enthält, ist

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(x + \frac{2k\pi}{m}\right) = 0$$

und der Coefficient von $-u \dfrac{m}{\sin mx}$ mufs gleich

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sin\left(x + \dfrac{2k\pi}{m}\right)}$$

sein.

Bei geradem $m = 2\mu$ besteht die Gleichung:

$$\sin^2 mx - u^2(1-u^2)\left(\frac{n}{1} - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}u^2 + \cdots + (-1)^{\mu-1} 2^{2\mu-1} u^{2\mu-2}\right)^2 = 0.$$

Das Product ihrer Wurzeln ist

$$\frac{\sin^2 mx}{2^{2m-2}} = \sin^2 x \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \prod_{\lambda=1}^{\mu-1} \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{m} - x\right) \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{m} + x\right)$$

und die positiv und negativ genommenen Factoren der rechten Seite sind die Wurzeln selbst. Die positiven allein genügen der Gleichung:

$$\sin mx = +\sqrt{1-u^2}\left(\frac{n}{1}u - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}u^2 + \cdots + (-1)^{\mu-1} 2^{2\mu-1} u^{2\mu-2}\right).$$

In entsprechender Weise hat man vorzugehen, um die Wurzeln der Gleichungen

$$\cos mx = \cos(2\mu+1)x = +\sqrt{1-u^2}\left(1 - \frac{(n^2-1^2)}{2!}u^2 + \cdots + (-1)^\mu 2^{m-1} u^{m-1}\right)$$

$$\cos mx = \cos 2\mu x = 1 - \frac{n^2}{2!}u^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}u^4 - \cdots + (-1)^\mu 2^{m-1} u^m$$

zu finden.

## § 52. Die Weierstrafs'sche $\sigma$-Function.

Wir wollen noch eine ganze Function $G_0(x)$ herstellen, welche die unendlich vielen Nullstellen

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \quad (\mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty)$$

besitzt, wo $\omega$ und $\omega'$ solche Gröfsen sein müssen, dafs in einem endlichen Bereich der Variablen $x$ nicht unendlich viele Nullstellen $w$ liegen, denn andernfalls gäbe es keine ganze Function der verlangten Art.*)

Es kann zunächst keine der Gröfsen $\omega$ und $\omega'$ unendlich klein sein; sie können aber auch nicht in reellem Verhältnis stehen, denn wäre in

$$w = 2\omega\left(\mu + \mu'\frac{\omega'}{\omega}\right)$$

die Klammergröfse reell und zunächst $\frac{\omega'}{\omega}$ eine rationale Zahlengröfse, so könnte man unendlich viele ganze Zahlen $\mu$ und $\mu'$ angeben, für die $\mu + \mu'\frac{\omega'}{\omega}$ gleich Eins würde und dann wäre die Nullstelle $x = 2\omega$ von unendlich hoher Ordnung, was nicht zulässig ist. Wäre aber $\frac{\omega'}{\omega}$ eine irrationale Zahlengröfse, so liefsen sich stets ganze Zahlen $\mu_\nu$ und $\mu'_\nu$ finden, für die

$$|2\mu_\nu\omega - 2\mu'_\nu\omega'|$$

kleiner würde als eine beliebig kleine positive Gröfse $\delta$ und dann wäre $x = 0$ eine Häufungsstelle von Nullstellen. In der That: entwickelt man das reelle Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ in einen unendlichen Kettenbruch, ein endlicher kann sich nicht ergeben, weil sonst $\frac{\omega'}{\omega}$ rational wäre, und bildet die Differenz von $\frac{2\omega'}{2\omega}$ und dem $\nu^{\text{ten}}$ Näherungsbruche $\frac{\mu_\nu}{\mu'_\nu}$, so wird deren absoluter Betrag kleiner als $\left(\frac{1}{\mu'_\nu}\right)^2$ und

$$2\mu_\nu\omega - 2\mu'_\nu\omega' = \pm\frac{2\omega\varepsilon}{\mu'_\nu},$$

wo $\varepsilon$ positiv und kleiner als 1 ist. Weil aber Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruches fortwährend zunehmen, so kann man auch ein $\nu$ so angeben, dafs $\left|\frac{2\omega\varepsilon}{\mu_\nu}\right| < \delta$ wird, w. z. b. w.

---

*) Vergleiche Weierstrafs, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen (herausgegeben von H. A. Schwarz) und andrerseits Kiepert, ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen (Borchardt's Journal, Bd. 76).

Soll demnach eine ganze Function existiren, welche die Nullstellen $w$ besitzt, so mufs das Verhältnis

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau$$

complex oder der reelle Theil von $\frac{\omega'}{i\omega}$ $\Re\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right)$ von Null verschieden sein, aber dann gibt es in einem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Stellen $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$.

Zum Beweise beachte man, dafs sich bei nicht reellem Verhältnis der Gröfsen $2\omega = \alpha + i\beta$ und $2\omega' = \alpha' + i\beta'$, wo $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$ von Null verschieden ist, jede Gröfse $2a = a_1 + ia_2$ in der Form $2\xi_1\omega + 2\xi_2\omega'$ darstellen läfst, wobei $\xi_1$ und $\xi_2$ reelle Gröfsen bleiben. Man hat $\xi_1$ und $\xi_2$ nur aus den zwei Gleichungen $a_1 = \alpha\xi_1 + \alpha'\xi_2$ und $a_2 = \beta\xi_1 + \beta'\xi_2$ zu entnehmen. Darauf läfst sich jeder endliche Bereich durch die Gesammtheit der Stellen $2\xi_1\omega + 2\xi_2\omega'$ definiren, für welche $\xi_1$ und $\xi_2$ zwischen endlichen Grenzen gelegen sind, und man sieht, dafs $\xi_1$ und $\xi_2$ innerhalb des Bereiches nur eine endliche Anzahl Male ganze Zahlen sein können.

Man nennt zwei Gröfsenpaare $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\varpi, 2\varpi')$ von nicht reellem Verhältnis *äquivalent*, wenn die Gesammtheit der Werthe

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

mit der Gesammtheit der Werthe

$$w = 2\nu\varpi + 2\nu'\varpi' \quad (\nu, \nu' = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

übereinstimmt. Man sieht, dafs die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Gröfsenpaare in der Existenz zweier Gleichungen liegt:

$$\varpi = p\omega + q\omega', \quad \varpi' = p'\omega + q'\omega',$$

in welchen die positiven oder negativen ganzen Zahlen wieder der Bedingung

$$pq' - p'q = \pm 1$$

genügen, denn unter diesen Umständen kann man stets zwei ganze Zahlen $\nu$ und $\nu'$ so bestimmen, dafs

$$2\mu\omega + 2\mu'\omega' = 2\nu\varpi + 2\nu'\varpi' = 2(\nu p + \nu' p')\varpi + 2(\nu q + \nu' q')\omega'$$

wird, und umgekehrt müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein, wenn jeder Stelle $w$ eine Stelle $\widetilde{\omega}$ und umgekehrt entspricht.

Wir können jetzt festsetzen, dafs $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ sei, denn andernfalls wähle man nur ein $(2\omega, 2\omega')$ äquivalentes Gröfsenpaar $(2\varpi, 2\varpi')$, für welches

$$\Re\left(\frac{\varpi'}{\varpi i}\right) = \Re\left(\frac{p'\omega + q'\omega'}{p\omega + q\omega'} \frac{1}{i}\right)$$

gröfser als Null ist und dazu mufs nur $pq' - q'p = -1$ sein.

Jetzt handelt es sich noch darum, in den Primfunctionen

$$E\left(\frac{x}{w}, m_{\mu,\mu'}\right)$$

die ganzen Zahlen $m_{\mu,\mu'}$ passend zu wählen, denn wenn wir auch schon wissen, dafs das Product

$$x\prod{}'\left(1-\frac{x}{w_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{w_\nu}\right)^\mu}$$

eine ganze Function der verlangten Art definirt, sofern die Nullstellen

$$w_1,\ w_2,\ \ldots w_\nu,\ \ldots$$

der Bedingung

$$|w_\nu| \leqq |w_{\nu+1}|$$

gemäfs geordnet sind, so braucht dies durchaus nicht die einfachste Function zu sein. Wir sehen darum nach, ob es etwa eine ganze Zahl $m$ derart gibt, dafs

$$\sum_{\mu,\mu'}{}'\left|\frac{1}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}\right|^{m+1}$$

endlich wird, denn dann existirt eine ganze Function $m^{\text{ten}}$ Ranges, welche die Nullstellen $w$ besitzt.

Bemerkt man, dafs man $2n+1$ Gröfsen $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ angeben kann, bei denen $\mu$ oder $\mu'$ gleich $\pm n$ ist, so finden sich im Ganzen

$$4(2n+1)-4 = 8n$$

Nullstellen, bei denen eine der Gröfsen $\mu$, $\mu'$ den Werth $+n$ oder $-n$ besitzt. Stellt man alle diese Gröfsen $w$ in der Form $n\delta_n$ dar, so kann $|\delta_n|$ niemals kleiner werden als eine endliche Gröfse $|\delta_0|$ und man sieht, dafs in der Ungleichung:

$$\sum_{\mu,\mu'}{}'\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} < \frac{8}{|\delta_0|^{m+1}}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{n}{n^{m+1}} = \frac{8}{|\delta_0|^{m+1}}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^m}$$

die rechte Seite schon für $m=2$ endlich ist und umsomehr

$$\sum_{\mu,\mu'}{}'\left|\frac{1}{w^3}\right|$$

convergirt.

Deshalb wird bereits das Product

$$x\prod_{(\mu,\mu')}{}'\left(1-\frac{x}{w}\right)e^{\frac{x}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2}$$

beständig convergiren. Diese ganze Function bezeichnen wir mit $\sigma(x)$.

Die logarithmische Ableitung derselben:

$$\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{\mu,\mu'}{}'\left(\frac{1}{x-w}+\frac{1}{w}+\frac{x}{w^2}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{\mu,\mu'}{}'\frac{x^2}{w^2(x-w)},$$

ferner

$$-\frac{d^2 \log \sigma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\mu,\mu'}{}' \left(\frac{1}{(x-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

und

$$-\frac{d^3 \log \sigma(x)}{dx^3} = -2\sum_{\mu,\mu'} \frac{1}{(x-w)^3}$$

stellen analytische Functionen dar, die im Endlichen die ein-, zwei- oder dreifachen aufserwesentlich singulären Stellen $x = w$ besitzen, deren Häufungsstelle $x = \infty$ ist.

Die dritte der genannten Functionen bleibt ungeändert, wenn man $x$ um irgend eine der aus $2\omega$ und $2\omega'$ durch Addition oder Subtraction zusammengesetzten Gröfsen $w$ vermehrt. Da aber zufolge des nicht reellen Verhältnisses $\frac{\omega'}{\omega}$ keine homogene ganzzahlige lineare Relation zwischen $2\omega$ und $2\omega'$ besteht, ist die Function $-\frac{d^3 \log \sigma(x)}{dx^3}$ *doppeltperiodisch.*

Bezeichnet man

$$-\frac{d^2 \log \sigma(x)}{dx^2} = p(x),$$

so ist

$$p'(x+2\omega) = p'(x+2\omega') = p'(x+w) = p'(x).$$

Weil aber

$$\sigma(-x) = -\sigma(x), \quad \sigma'(-x) = \sigma'(x), \quad \frac{\sigma'(-x)}{\sigma(-x)} = -\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

$$p(-x) = p(x) \quad \text{und} \quad p'(-x) = -p'(x)$$

ist, wird

$$p'(\omega) = 0, \quad p'(\omega') = 0, \quad p'(\omega+\omega') = 0$$

und

$$p(\omega) = p(-\omega), \quad p(\omega') = p(-\omega').$$

Nach dieser Zusammenstellung der Werthe von $p(x)$ und $p'(x)$ an zwei Stellen entnehmen wir den Gleichungen:

$$\frac{dp(x+2\omega)}{dx} = \frac{dp(x)}{dx}, \quad \frac{dp(x+2\omega')}{dx} = \frac{dp(x)}{dx}$$

die Beziehungen

$$p(x+2\omega) = p(x), \quad p(x+2\omega') = p(x)$$

d. h. auch $p(x)$ hat die beiden Perioden $2\omega$ und $2\omega'$ und die aus diesen ganzzahlig zusammengesetzten Perioden $w$.

Die doppeltperiodische Function $p(x)$ wird an jeder Nullstelle der Function $\sigma(x)$ so unendlich, dafs erst

$$(x-w)^2 p(x)$$

in der Umgebung derselben regulären Verhaltens ist und wird an allen übrigen Stellen regulär; sie mufs daher als Quotient zweier ganzen Functionen darstellbar sein.

Die Function $\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$ ist nicht mehr doppeltperiodisch, es entstehen vielmehr durch Integration der letzten Gleichungen die Beziehungen

$$\frac{\sigma'(x+2\omega)}{\sigma(x+2\omega)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} + 2\eta$$

$$\frac{\sigma'(x+2\omega')}{\sigma(x+2\omega)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} + 2\eta'$$

und hier sind die Constanten $2\eta$ und $2\eta'$ so zu bestimmen, daſs für $x = -\omega$ die richtigen Gleichungen

$$\frac{\sigma'(-\omega)}{\sigma(-\omega)} = -\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \frac{\sigma'(-\omega')}{\sigma(-\omega')} = -\frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

hervorgehen. Man erhält

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\varpi)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Eine abermalige Integration führt unter Rücksicht auf die Gleichungen

$$\sigma(-\omega) = -\sigma(\omega); \quad \sigma(-\omega') = -\sigma(\omega')$$

zu den Relationen

$$\sigma(x+2\omega) = -e^{2\eta(x+\omega)}\sigma(x), \quad \sigma(x+2\omega') = -e^{2\eta'(x+\omega')}\sigma(x).$$

Bildet man aus jeder dieser Gleichungen $\sigma(x+2\omega+2\omega')$, so müssen nothwendig die Exponenten in den Factoren bei $\sigma(x)$

$$2\eta(x+\omega+2\omega') + 2\eta'(x+\omega')$$

und

$$2\eta'(x+\omega'+2\omega') + 2\eta(x+\omega)$$

bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ gleich sein. Es wird also

$$(2\eta+2\eta')x + 2\eta\omega + 2\eta'\omega' + 4\eta\omega' - ((2\eta'+2\eta)x + 2\eta\omega + 2\eta'\omega' + 4\eta'\omega) = \pm 2m\pi i$$

oder

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{m}{2}\pi i.$$

Ferner folgt aber bei der Änderung des Argumentes $x$ um eine beliebige Periode $w$ der Function $p(x)$ die Gleichung:

$$\sigma(x+2\mu\omega+2\mu'\omega') = \sigma(x+2\widetilde{\varpi}) = (-1)^{\mu\mu'+\mu+\mu'}e^{2(\mu\eta+\mu'\eta')(x+\widetilde{\omega})}\sigma(x),$$

wo wir fernerhin für $\mu\eta + \mu'\eta' = \widetilde{\eta}$ schreiben.

Es ist dann

$$\frac{\sigma'(x+2\varpi)}{\sigma(x+2\varpi)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} + 2\widetilde{\eta}, \quad \widetilde{\eta} = \frac{\sigma'(\varpi)}{\sigma(\varpi)}$$

und wenn man $\omega+\omega' = \omega''$, $\eta+\eta' = \eta''$ setzt, speciell $\eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')}$.

*An dieser Stelle soll noch die Function* $\sigma(x)$ *durch ein einfach unendliches Product dargestellt werden*, in dem also nur ein Index unendlich viele Werthe annehmen kann.

Man bemerkt leicht, daſs die Nullstellen von $\sigma(x)$ mit den Nullstellen der unendlich vielen Functionen

$$\sin\frac{\pi}{2\omega}x,\quad \sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega'-x),\quad \sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega'+x)\quad (n=1,2,\ldots\infty)$$

zusammenfallen, und es fragt sich, ob man $\sigma(x)$ als Product dieser Functionen darstellen kann.

In dem Producte für $\sigma(x)$ darf man alle Factoren zusammennehmen, in denen $\mu'=0$ ist, denn das Product

$$x\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{x}{2\mu\omega}\right)e^{\frac{x}{2\mu\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\mu\omega}\right)^2}$$

ist gleichmäfsig convergent, da ja

$$\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\mu\omega}\right)^2}=e^{\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}}=e^{\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2}$$

und

$$x\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{2\mu\omega}\right)e^{\frac{x}{2\mu\omega}}=\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2\omega}$$

ist. Fafst man dann alle Factoren zusammen, welche dasselbe $\mu'$ haben, so kann man deren Product gleich

$$\left\{\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}\right)e^{\frac{x}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}}\right\}e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}\right)^2}$$

setzen, denn die hier vorkommende Summe oder

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mu+\mu'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2$$

ist nach der Formel

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\nu-x)^2}$$

gleich

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\left(\pi\frac{\mu'\omega'}{\omega}\right)}.$$

Wenn $\mu'$ somit alle Werthe durchläuft, tritt gewifs der Factor

$$\frac{2\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)e^{\left(\frac{\pi^2}{2\omega}\right)\left\{\frac{1}{6}+\sum\limits_{\mu'=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\pi\frac{\mu'\omega'}{\omega}\right)}\right\}\frac{x^2}{2\omega}}=\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2\omega}\cdot e^{\frac{\eta x^2}{2\omega}}$$

auf und es bleiben nur mehr die Producte

$$\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}\right)e^{\frac{x}{2\mu\omega+2\mu'\omega'}}\quad(\mu'=\pm1,\pm2,\ldots\pm\infty)$$

zu untersuchen. Schreibt man sie in der Form

$$e^{\frac{\frac{x}{2\omega}}{\frac{\mu'\omega'}{\omega}}}\left(1-\frac{\frac{x}{2\omega}}{\frac{\mu'\omega'}{\omega}}\right)\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{\frac{x}{2\omega}}{\mu+\mu'\frac{\omega'}{\omega}}\right)e^{\frac{\frac{x}{2\omega}}{\mu+\mu'\frac{\omega'}{\omega}}},$$

so hat man auch schon gefunden, dafs dieselben gleich

$$\frac{\sin\pi\left(\mu'\frac{\omega'}{\omega}-\frac{x}{2\omega}\right)}{\sin\pi\mu'\frac{\omega'}{\omega}}\,e^{\frac{\pi x}{2\omega}\operatorname{cotg}\,\mu'\frac{\omega'}{\omega}}$$

zu setzen sind. Das Product aller Factoren von $\sigma(x)$ kann man daher in der Form des einfach unendlichen Productes schreiben:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \frac{2\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta x^2}{2\omega}}\prod_{\mu'=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(2\mu'\omega'-x)\sin\frac{\pi}{2\omega}(2\mu'\omega'+x)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\omega}2\mu'\omega'\right)}\\ &= \frac{2\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta x^2}{2\omega}}\prod_{\mu'=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{\mu'\omega'}{\omega}\right)}\right).\end{aligned}$$

Die hierin auftretende Constante

$$\eta=\frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6}+\sum_{\mu'=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\pi\frac{\mu'\omega'}{\omega}\right)}\right)$$

ist nichts Anderes als $\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$. Denn wenn man in den letzten Formeln $x$ um $2\omega$ vermehrt, so bleibt unter den Productzeichen Alles ungeändert, aber $\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)$ geht in $-\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)$ und die Exponentialfunction in

$$e^{\eta\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2}\cdot e^{2\eta(x+\omega)}$$

über, so dafs auch hier die Gleichung

$$\sigma(x+2\omega) = -e^{2\eta(x+\omega)}\sigma(x)$$

hervorgeht.

Differentiirt man den vorletzten Ausdruck für $\sigma(x)$ logarithmisch, so erhält man nach Multiplication mit $\omega$:

$$\omega\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}=\eta x+\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)+\frac{\pi}{2}\sum_{\mu'=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\mu'\omega'}{\omega}+\frac{x}{2\omega}\right)-\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\mu'\omega'}{\omega}+\frac{x}{2\omega}\right)\right)$$

und diese Formel führt nach der Substitution $x=\omega'$ zu einem Ausdruck für

$$\omega\eta'-\eta\omega'=\mp m\frac{\pi i}{2}.$$

Dieser lautet:

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)+\frac{\pi}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\pi\frac{(2\mu'+1)\omega'}{\omega}-\operatorname{cotg}\pi\frac{(2\mu'-1)\omega'}{\omega}\right)$$
$$=\lim_{\mu'=\infty}\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\pi\frac{(2\mu'+1)\omega'}{\omega}.$$

Doch weil $\operatorname{cotg}(u+iv)$ nach $\pm i$ convergirt, je nachdem $v=\mp\infty$ wird, so wird

$$\omega\eta'-\eta\omega'=\pm\frac{\pi i}{2},$$

je nachdem in dem nicht reellen Quotienten $\frac{\omega'}{\omega}=\alpha+i\beta$ $\beta\lesseqgtr 0$ oder

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\lesseqgtr 0$$

ist. Man übersieht nun auch, daſs die Function $\sigma(x)$ ungeändert bleibt, wenn man $2\omega$ und $2\omega'$ durch ein äquivalentes Gröſsenpaar

$$2\varpi=2p\omega+2q\omega',\quad 2\varpi'=2p'\omega+2q'\omega'\quad(pq'-p'q=\pm 1)$$

ersetzt, dem

$$2\tilde{\eta}=2p\eta+2q\eta',\quad 2\tilde{\eta}'=2p'\eta+2q'\eta'$$

zuzuordnen ist, und daſs bei positivem Werthe der Determinante $pq'-qp'$ auch

$$\varpi\tilde{\eta}'-\tilde{\eta}\varpi'=\pm\frac{\pi i}{2}$$

wird, wenn $\Re\left(\frac{\varpi'}{\varpi i}\right)\lesseqgtr 0$ ist.

Die Ähnlichkeit der Darstellungen von

$$\sin\frac{x\pi}{2\omega}=\frac{x\pi}{2\omega}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{x\pi}{2\omega}\right)^2}{\nu^2\pi^2}\right)$$

und von $\sigma(x)$ durch Sinusfunctionen springt in die Augen und führt auf die Vermuthung, daſs $\sin\frac{x\pi}{2\omega}$ aus $\sigma(x)$ abgeleitet werden kann, wenn man $\omega'$ einen ausgezeichneten Werth beilegt. In der That: läſst man den positiven reellen Bestandtheil $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ über alle Grenzen wachsen (ohne $\omega$ unendlich klein werden zu lassen), so wird

$$\sin\left(\pi\frac{\mu'\omega'}{\omega}\right)=\frac{e^{-\mu\pi\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right)}-e^{\mu'\pi\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{\mu'\pi(\alpha i-\beta)}-e^{-\mu'\pi(\alpha i-\beta)}\right)=\infty$$

und weil dann

$$\eta=\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{2\omega}$$

ist, gilt die Gleichung

$$\sigma(x)=e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)^2}\frac{2\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)$$

und

$$\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}=\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)+\frac{\pi^2}{12}\frac{x}{\omega^2}.$$

## § 53. Der Laurent'sche Satz.

Wir wenden uns wieder zu allgemein functionentheoretischen Fragen und vor Allem zu dem Laurent'schen Satze, der aussagt, dafs man eine eindeutige analytische Function $f(x)$, die in der Umgebung jeder Stelle $x_0$ eines um einen Punkt $x = c$ gelegenen ringförmigen Gebietes, wo

$$R_1 < |x - c| < R_2$$

ist, regulären Verhaltens bleibt, daselbst einheitlich durch eine nach positiven und negativen Potenzen von $(x - c)$ fortschreitende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x - c) + \frac{1}{x-c}\,\mathfrak{P}_2\Big(\frac{1}{x-c}\Big)$$

darstellbar ist.

Bei dem Beweise*) dieses Satzes kann man voraussetzen, dafs $c = 0$ und $f(x)$ eine ungerade Function sei, die bei der Vertauschung von $-x$ mit $x$ ihr Zeichen wechselt, weil jede Function $F(x)$ als Summe einer geraden und ungeraden Function

$$\frac{1}{2}\big(F(x) + F(-x)\big), \quad \frac{1}{2}\big(F(x) - F(-x)\big)$$

und somit auch als Summe

$$f_1(x) + x f_2(x)$$

darzustellen ist, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ungerade Functionen bezeichnen. Sobald der Laurent'sche Satz für ungerade Functionen $f(x)$ bewiesen ist, gilt er allgemein.

Wenn wir aufserdem $f(x)$ auf die Form bringen

$$\frac{1}{2}\Big(f(x) + f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)$$

und für die Functionen $f(x) + f\Big(\frac{1}{x}\Big)$ und $f(x) - f\Big(\frac{1}{x}\Big)$ die verlangte Entwicklung beweisen, haben wir wieder alles Nothwendige geleistet.

Wir setzen ferner fest, dafs die Radien $R_1$ und $R_2$ des Ringgebietes, an dessen Stellen sich $f(x)$ regulär verhält, der Bedingung genügen

$$R_1 R_2 = 1,$$

denn andernfalls führt die Substitution $x = \sqrt{R_1 R_2}\, y$ zu einer Function von $y$, die in einem durch Radien $r_1$ und $r_2$ definirten Gebiete regulär ist, für welches $r_1 r_2 = 1$ gilt.

Sollte $R_1$ Null oder der gröfsere Radius $R_2$ unendlich sein, so beschränke man das Gebiet zunächst auf ein anderes mit den Radien $R_1'$ und $R_2'$ und gehe von diesem zu einem neuen, wo $r_1' r_2' = 1$ ist.

*) Entnommen aus Schaeffer's Abhandlung: Acta mathemat. Bd. 4, p. 375.

Unter den ringförmigen Bereichen um die Stelle Null mit zwei Radien $R_1$, $R_2$ $(R_1 R_2 = 1)$ wähle man ferner eines, bei dem der gröſsere Radius

$$R_2 > 1 + \sqrt{2},$$

d. h. gröſser als die positive Wurzel der Gleichung $a - \frac{1}{a} = 2$. Dann ist

$$R_1 < \sqrt{2} - 1, \quad \frac{R_2}{R_1} > \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad R_2 - \frac{1}{R_2} > 2.$$

Beschränkt man hierauf die Gröſse

$$z = x + \frac{1}{x}$$

auf den Bereich, wo $|z| < R_2 - \frac{1}{R_2}$, so wird

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

daselbst eine eindeutige Function von $z$ sein, denn jedem Werthe $z_0$ innerhalb des Kreises $R_2 - \frac{1}{R_2}$ um die Stelle $z = 0$ entsprechen nur $x$ Werthe $x_0$ und $x_0' = \frac{1}{x_0}$, in deren Umgebung $f(x)$ der Voraussetzung zufolge regulären Verhaltens ist. Es läſst sich deshalb

$$\varphi(z) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

in der Umgebung jeder Stelle $z_0$ des genannten Bereiches nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln.

In der That kann man ja $x - x_0$ und $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$ und dann auch $f(x)$ und $f\left(\frac{1}{x}\right)$ in der Umgebung jeder von $z = \pm 2$ verschiedenen Stelle durch Potenzreihen nach $z - z_0$ ausdrücken. Und wenngleich die Entwicklung der Differenzen $(x - x_0)$ und $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$ in der Umgebung der Nullstellen der Discriminante unserer Gleichung zwischen $x$ und $z$:

$$x^2 - xz + 1 = 0$$

d. h. in der Umgebung von $z = \pm 2$, dem $x_0 = x_0' = \pm 1$ entspricht, nicht möglich ist, so ist $\varphi(z)$ daselbst trotzdem regulär, weil die Vereinigung der aus den Reihen

$$f(x) = \mathfrak{P}_1(x - 1) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

und

$$f(x) = \mathfrak{P}_2(x + 1) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

entstammenden Glieder

$$a_\nu^{(1)}(x - 1)^\nu \quad \text{und} \quad a_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^\nu$$

beziehungsweise

$$a_\nu^{(2)}(x - 1)^\nu \quad \text{und} \quad a_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^\nu \cdot$$

eine ganze rationale Function von $z-2$ oder $z+2$ wird. Man kann nämlich eine Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} A_\mu \left(x^\mu + \frac{1}{x^\mu}\right)$$

als rationale Function von $z$ ausdrücken, da

$$x^\mu + \frac{1}{x^\mu} = z\left(x^{\mu-1} + \frac{1}{x^{\mu-1}}\right) - \left(x^{\mu-2} + \frac{1}{x^{\mu-2}}\right)$$

ist.

Darnach läſst sich $\varphi(z)$ innerhalb des Kreises $|z| = R_2 - \frac{1}{R_2}$ durch eine einzige Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ und $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ in dem Bereiche, wo

$$|x| + \left|\frac{1}{x}\right| < R_2 - \frac{1}{R_2},$$

durch die Reihe

$$\mathfrak{P}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

darstellen. Diese nach positiven und negativen Potenzen von $x$ zu ordnende Reihe convergirt aber für alle Stellen des durch zwei Radien $\varrho$ und $\frac{1}{\varrho}$ definirten Kreisringes, wo $\varrho$ durch die wegen der Bedingung $R_2 > \sqrt{2} + 1$ stets vorkommende positive Wurzel der Gleichung

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = R_2 - \frac{1}{R_2}$$

bestimmt ist.

Wenn nun $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ in dem Bereiche $\frac{1}{\varrho} < |x| < \varrho$ die verlangte Darstellung findet, so wird die Gleichung

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_\mu x^\mu$$

nach dem Princip der Fortsetzung auch in dem Gebiete

$$\frac{1}{R_2} < |x| < R_2$$

gelten.

Setzt man andrerseits
$$x - \frac{1}{x} = \zeta,$$

so kann man die innerhalb des Kreises $|\zeta| = R_2 - \frac{1}{R_2}$ eindeutige Function von $\zeta$

$$\psi(\zeta) = f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(\zeta)$ und darnach $f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right)$ in unserem Kreisringe durch eine Reihe

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} b_\mu x^\mu$$

darstellen.

Dasselbe gilt für die Function

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right)\right).$$

Sind die zwei ursprünglichen Radien $R_1$ und $R_2$ $(R_1 R_2 = 1)$ an die neuen Ungleichungen geknüpft:

$$1 < \frac{R_1}{R_2} < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

so kann man den neuen Fall auf den früheren zurückführen, indem man $f(x)$ durch eindeutige Functionen einer Variabeln $y$ ausdrückt, für die das zugehörige Ringgebiet, in welchem sie regulären Verhaltens sind, die frühere Bedingung erfüllt.

Ist die $n^{\text{te}}$ Potenz von $\frac{R_2}{R_1}$ gröfser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, so setze man $x^n = y$. Bezeichnet dann $\alpha$ eine $n^{\text{te}}$ primitive Einheitswurzel und führt man die $n$ Functionen

$$f_\mu(x) = \frac{1}{n}\left(x^\mu f(x) + (\alpha x)^\mu f(\alpha x) + \cdots + (\alpha^{n-1}x)^\mu f(\alpha^{n-1}x)\right)$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$$

ein, durch welche $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{f_\mu(x)}{x^\mu}$$

auszudrücken ist, so sind die $n$ Functionen $f_\mu$ in einem dem Kreisringe von $f(x)$ entsprechenden Bereiche der verlangten Beschaffenheit eindeutige Functionen von $y$, denn einem Werthe $y_0$ aus diesem Bereiche gehören $n$ Werthe von $x$ zu, die in dem regulären Gebiete von $f(x)$ liegen.

Da ferner jeder Bestandtheil $(\alpha^\nu x)^\mu f(\alpha^\nu x)$ von $f_\mu$ nach ganzen Potenzen von $x - x_0$ und $x - x_0$ nach ganzen Potenzen von $y - y_0$ zu entwickeln ist, so kann man jede der Functionen $f_\mu$ nach positiven Potenzen von $y - y_0$ nach positiven und negativen Potenzen von $y$ darstellen. Setzt man wieder $y = x^n$, so ergeben sich für die $n$ Functionen $f_\mu$ nach positiven und negativen Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen, und demgemäfs wird $f(x)$ in dem Bereiche $R_1 < |x| < R_2$ in der Form

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{f_\mu(x)}{x^\mu} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu x^\mu$$

zu entwickeln sein. Damit ist der Laurent'sche Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{-\mu}\left(\frac{1}{x}\right)^\mu$$

convergirt für alle Stellen der Umgebung $R_1$ des Punktes $\infty$, und wenn $R_1$ kleiner ist als jede beliebig kleine Gröfse, so stellt diese Reihe offenbar eine beständig convergente d. h. ganze Function des Argumentes $\frac{1}{x}$ dar, die für $\frac{1}{x}=0$ verschwindet. Damit ist klar, dafs eine eindeutige Function in der Umgebung jeder isolirten singulären Stelle $c$ in der Form

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}(x-c)$$

darstellbar ist, wo $G$ eine mit dem Argument verschwindende ganze rationale oder transcendente Function bezeichnet, je nachdem die Stelle $c$ eine aufserwesentlich oder wesentlich singuläre ist. Sobald $c$ aber eine reguläre Stelle ist, mufs $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ identisch verschwinden.

## § 54. Das Mittag-Leffler'sche Theorem.

Wir gehen nun zur Lösung der zweiten der zu Eingang dieses Capitels gestellten Aufgaben, *eine eindeutige analytische Function mit unendlich vielen vorgegebenen singulären Stellen, die eine Grenzstelle haben, als Summe solcher Functionen darzustellen, deren jede aufser an einer Häufungsstelle nur an einer der gegebenen Stellen irregulären Verhaltens ist.**)

Wir zeigen zunächst, indem wir denselben Gang wie bei den ganzen Functionen einschlagen, dafs man stets eine eindeutige analytische Function bilden kann, welche überall regulären Verhaltens ist, ausgenommen in der Umgebung der von einander verschiedenen Stellen

$$a_1,\ a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

mit der einzigen Häufungsstelle $x=b$, und welche in der Umgebung einer Stelle $a_\nu$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+\mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

darstellbar ist, wo $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ eine vorgegebene ganze rationale oder transcendente Function des Argumentes $\frac{1}{x-a_\nu}$ bedeutet, die mit $\frac{1}{x-a_\nu}$ verschwindet.

Ist die Reihe singulärer Stellen $a_\nu$ endlich, so gibt es keine Grenzstelle $b$ und

$$F(x)=C+\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{a-x_\nu}\right)$$

---

*) Siehe Weierstrafs, Functionenlehre S. 53, und Mittag-Leffler, Acta mathematica Bd. 4.

ist eine analytische Function der verlangten Art. Umgekehrt ist jede eindeutige analytische Function mit den singulären Stellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch einen Ausdruck der genannten Art darstellbar, denn die eindeutige Function $F(x)$ verhält sich in der Umgebung der isolirten singulären Stelle $a_\nu$ wie ein Ausdruck

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu),$$

wo $G_\nu$ eine ganze rationale oder transcendente Function bezeichnet, je nachdem $a_\nu$ eine aufserwesentlich oder wesentlich singuläre Stelle ist. Die Differenz

$$F(x) - \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$$

verhält sich dann überall regulär und kann daher nur eine Constante sein.

Der obige allgemeine Satz von Mittag-Leffler wird dadurch abgeleitet, dafs man aus den gegebenen Functionen $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ eine Reihe anderer Functionen $F_\nu(x)$ dergestalt ableitet, dafs jede Differenz

$$F_\nu(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$$

eine Function mit den zwei singulären Stellen $a_\nu$ und $b$ oder eine Constante wird und gleichzeitig die Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ in jedem Bereiche, der keine der Stellen $a$ und $b$ enthält, unbedingt und gleichmäfsig convergirt. Dann ist nämlich diese Summe die verlangte Function und jede andere entsteht durch Addition einer ganzen Function $G\left(\frac{1}{x-b}\right)$. Weierstrafs nimmt eine unendliche Reihe positiver Gröfsen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3, \ldots$ von endlicher Summe auf und eine positive Gröfse $\varepsilon < 1$, setzt dann, wenn $a_\nu = 0$ oder $\infty$ ist, $F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$, entwickelt aber in jedem andern Falle die gegebene Function

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \frac{c^{(\nu)}_{-1}}{(x-a_\nu)} + \frac{c^{(\nu)}_{-2}}{(x-a_\nu)^2} + \frac{c^{(\nu)}_{-3}}{(x-a_\nu)^3} + \cdots$$

in eine innerhalb des Bereiches $\left|\frac{a_\nu - b}{x-b}\right| < 1$ convergente Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(\nu)}_\mu \left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\mu,$$

die für $b = \infty$ die Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(\nu)}_\mu \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

erhält und convergirt, solange $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$.

Im ersten Falle ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^\varkappa} \left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\varkappa \frac{1}{\left(1 - \frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\varkappa} =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^\varkappa} \left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\varkappa \left\{1 + \frac{\varkappa}{1}\left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right) + \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{1.2}\left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{1.2.3}\left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^3 + \cdots \right\}$$

und die Coefficienten $A_\mu^{(\nu)}$ werden der Reihe nach

$$A_0^{(\nu)} = 0$$

$$A_1^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b}$$

$$A_2^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^2}$$

$$A_3^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b} + \frac{2}{1!}\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^2} + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^3}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$A_\mu^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b} + \frac{\mu-1}{1!}\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!}\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-(r-1))}{(r-1)!}\frac{c_{-r}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^r} + \cdots + \frac{c_{-\mu}^{(\nu)}}{(a_\nu - b)^\mu}$$

usw. Im zweiten Falle hingegen wird

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa} =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\varkappa c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa} \left\{1 + \frac{\varkappa}{1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) + \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \frac{\varkappa(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^3 + \cdots \right\}$$

und nun gibt der Vergleich der Coefficienten

$$A_0^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa}, \quad A_1^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{\varkappa}{1!}\frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa},$$

$$A_2^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2!}\frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa}, \ldots$$

$$\ldots A_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{\varkappa(\varkappa+1)\ldots(\varkappa+\mu-1)}{1.2\ldots\mu}\frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\varkappa-1)}{1.2\ldots(\varkappa-1)}\frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu^\varkappa}, \ldots$$

Ist dann $b$ nicht unendlich, so kann man eine positive ganze Zahl $m_\nu$ so bestimmen, dafs der absolute Betrag der Reihe

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\mu = \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b}{x-b}\right)^\mu$$

an jeder Stelle des durch die Bedingung:

$$\left|\frac{a_\nu - b}{x-b}\right| \leqq \varepsilon < 1$$

definirten Bereiches kleiner wird als $\varepsilon_\nu$, und ist $b = \infty$, so läfst sich $m_\nu$ derart angeben, dafs

$$|F_\nu(x)| = \left|G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right| = \left|\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right|$$

an jeder Stelle des Bereiches $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon < 1$ kleiner wird als $\varepsilon_\nu$, und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

ist die gesuchte Function.

Um zunächst ganze Zahlen $m_\nu$ der geforderten Beschaffenheit zu finden, beachte man, dafs $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ für jeden endlichen Werth des Argumentes unbedingt convergirt. Wenn man dann den Werth der Summe:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{|c_{-\varkappa}^{(\nu)}|}{\xi_\nu^\varkappa}$$

für einen positiven endlichen Werth von $\xi_\nu = |x - a_\nu|$ mit $g_\xi^{(\nu)}$ bezeichnet, so werden die Coefficienten $c_{-\varkappa}^{(\nu)}$ den Ungleichungen genügen:

$$|c_{-\varkappa}^{(\nu)}| \leqq g_\xi^{(\nu)} \xi_\nu^\varkappa$$

und je nachdem $b$ unendlich oder endlich ist, wird:

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq g_\xi^{(\nu)} \frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} \left(1 - \frac{\xi_\nu}{|a_\nu|}\right)^{-(\mu+1)}$$

oder

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq g_\xi^{(\nu)} \frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b|} \left(1 + \frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b|}\right)^{\mu-1}.$$

Wählt man in dem Falle $b = \infty$ eine positive Gröfse $\beta$ den Bedingungen gemäfs

$$\beta < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{1-\beta} < 1$$

und die Gröfse $\xi_\nu$ so, dafs

$$\frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} < \beta,$$

und versteht unter $\varepsilon_0$ eine positive Gröfse, die kleiner als 1, aber

gröfser als $\frac{\varepsilon}{1-\beta}$ ist, so wird in dem Bereiche $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < \varepsilon$

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty}\left|A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right| < \frac{g_\xi^{(\nu)}\beta}{1-\beta}\,\frac{\varepsilon_0^{m_\nu+1}}{1-\varepsilon_0},$$

denn es ist schon

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty}\left|A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right| \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)}\beta}{1-\beta}\left(\frac{\varepsilon}{1-\beta}\right)^{m_\nu+1}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1-\beta}}$$

und man sieht, dafs man $m_\nu$ nur der Bedingung

$$\frac{g_\xi^{(\nu)}\beta}{1-\beta}\,\frac{\varepsilon_0^{m_\nu+1}}{1-\varepsilon_0} < \varepsilon_\nu$$

zu unterwerfen hat, um in der zugehörigen Function $F_\nu(x)$ eine der gesuchten Art zu besitzen.

Ist $b$ endlich, so wähle man eine positive Gröfse $\alpha$ derart, dafs

$$\frac{1}{1+\alpha} > \varepsilon \quad \text{und} \quad |x-a_\nu| = \xi_\nu < |a_\nu - b|\alpha$$

ist, dann wird für jeden Werth des Bereiches $\left|\frac{a_\nu-b}{x-b}\right| < \varepsilon$

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty}\left|A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu-b}{x-b}\right)^\mu\right| \leqq g_\xi^{(\nu)}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{((1+\alpha)\varepsilon)^{m_\nu+1}}{1-(1+\alpha)\varepsilon}$$

und umsomehr

$$\leqq g_\xi^{(\nu)}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\varepsilon_0^{m_\nu+1}}{1-\varepsilon_0},$$

wenn nur $\varepsilon_0$ eine positive Gröfse kleiner als 1 und gröfser als $(1+\alpha)\varepsilon$ bezeichnet. Die Zahl $m_\nu$ suche man daher aus der Ungleichung:

$$g_\xi^{(\nu)}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\varepsilon_0^{m_\nu+1}}{1-\varepsilon_0} < \varepsilon_\nu.$$

Ist hierauf $x_0$ eine von den gegebenen Stellen $a_1, a_2, \ldots$ und $b$ verschiedene Stelle, so gibt es auch einen endlichen Bereich $|x-x_0| \leqq \varrho$, der keine dieser Stellen enthält. Bezeichnet dann $\delta$ eine beliebig kleine positive Gröfse, so wird man schliefslich eine ganze Zahl $n$ so bestimmen können, dafs für jeden Werth des Bereiches $|x-x_0| \leqq \varrho$

$$\left|\frac{a_{n+\nu}-b}{x-b}\right| < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wird, denn es war ja $\lim |a_\nu - b| = 0$ und $x-b$ sinkt nicht unter jeden Grad der Kleinheit herab. Weil daselbst auch

$$|F_{n+\nu}(x)| < \varepsilon_{n+\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

so leuchtet ein, dafs man $n$ gemäfs der für die gleichmäfsige Conver-

genz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ nothwendigen Bedingungen wählen kann; d. h. entsprechend der Ungleichung:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{n+\nu}(x)\right| < \delta.$$

Deshalb aber convergirt auch die um eine endliche Anzahl von Gliedern $F_\nu(x)$ vermehrte Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

in einer Umgebung der Stelle $x_0$ gleichmäſsig und läſst sich dort in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x|x_0)$$

entwickeln und definirt somit wirklich eine analytische Function $F(x)$.

Ist keine der Stellen $a_\nu$ und auch $b$ nicht unendlich, so kann man diese Function $F(x)$ in der Umgebung $x = \infty$ durch eine Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ darstellen; aber in einem Bereiche:

$$|x - a_\mu| < \varrho_\mu,$$

der auſser $a_\mu$ keine andere Stelle $a_\mu$ enthält, wird die Differenz

$$F(x) - F_\mu(x)$$

durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a_\lambda)$ zu definiren sein, d. h. man hat daselbst

$$\begin{aligned} F(x) &= G_\lambda\left(\frac{1}{x - a_\lambda}\right) + \mathfrak{P}(x|a_\lambda) - \sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\lambda - b}{x - b}\right)^\mu \\ &= G_\lambda\left(\frac{1}{x - a_\lambda}\right) + \mathfrak{P}_1(x|a_\lambda), \end{aligned}$$

und falls $a_\lambda = \infty$ ist,

$$F(x) = G_\lambda(x) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Darnach besitzt die Function $F(x)$ in der That das genannte Verhalten und definirt eine eindeutige analytische Function mit den unendlich vielen singulären Stellen $a_\nu$ und $b$, von denen $a_\nu$ je nach der Beschaffenheit der ganzen Functionen $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ eine auſserwesentlich oder wesentlich singuläre Stelle sein wird.*)

Bei der Construction von $F(x)$ blieben noch unendlich viele Gröſsen gewissermaſsen willkürlich, darum gibt es auch unendlich viele Functionen der verlangten Art. Die Addition einer überall auſser in

---

*) Vergl. auch Casorati, Aggiunte a recenti lavori dei Signori Weierstraſs e Mittag-Leffler (Annali di matematica pura ed applicata serie IIª, tomo X.

$b$ regulären Function zu $F(x)$ — und das mufs eine ganze Function $G\left(\frac{1}{x-b}\right)$ sein — gibt wieder eine Function derselben Beschaffenheit. Indem man $G\left(\frac{1}{x-b}\right)$ noch in eine gleichmäfsig convergente Summe ganzer Functionen $g_\nu\left(\frac{1}{x-b}\right)$ zerlegt und $F_\nu(x)+g_\nu$ mit $\Phi_\nu(x)$ bezeichnet, erscheint auch die neue Function als Summe unendlich vieler Functionen, deren jede aufser $b$ nur eine singuläre Stelle $a_\nu$ besitzt.

Ist umgekehrt eine eindeutige analytische Function $F(x)$ gegeben, deren Stetigkeitsbereich durch die Stellen

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

und die Häufungsstelle $b$ begrenzt ist, und die ferner in der Umgebung der isolirten singulären Stelle $a_\nu$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+\mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

darstellbar ist, wo $G_\nu$ eine mit dem Argument $\frac{1}{x-a_\nu}$ verschwindende ganze rationale oder transcendente Function bezeichnet, je nachdem $a_\nu$ aufserwesentlich oder wesentlich singulär ist, so leite man aus den Functionen $G_\nu$ in der angegebenen Weise die Functionen $F_\nu(x)$ und dann $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}F_\nu(x)$ ab. Darauf wird

$$F(x)-\sum_{\nu=1}^{\infty}F_\nu(x)$$

nur eine ganze Function $G\left(\frac{1}{x-b}\right)$ sein. Nach der Zerlegung

$$G\left(\frac{1}{x-b}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu\left(\frac{1}{x-b}\right)$$

und der Vereinigung $F_\nu(x)+g_\nu\left(\frac{1}{x-b}\right)=\Phi_\nu(x)$ wird die gegebene Function $F(x)$ durch eine unendliche Summe analytischer Functionen dargestellt, deren jede neben $b$ nur eine einzige singuläre Stelle $a_\nu$ besitzt. Damit ist der zu Beginn dieses Paragraphen verlangte Satz in dem Umfange bewiesen, dafs die Stellen $a_\nu$ auch wesentlich singulär sein können.

Wir machen noch eine Bemerkung über die Ermittlung der ganzen Zahlen $m_\nu$. Die eindeutige Function $F(x)$ besitze die unendlich vielen aufserwesentlich singulären Stellen erster Ordnung

$$a_1,\ a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

unter denen die Null nicht vorkommen soll, und die wesentlich singuläre Stelle $\infty$. Heifsen ferner die den Stellen $a_\nu$ zugeordneten Functionen

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)},$$

so bilde man

$$F_\nu(x) = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{x-a_\nu} - \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu = \frac{c_{-1}^{(\nu)} x^{m_\nu}}{a_\nu^{m_\nu}(x-a_\nu)}.$$

Wir wissen bereits, dafs $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ gleichmäfsig convergirt, wenn $m_\nu$ diejenigen ganzen Zahlen sind, für welche

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right| \tag{$\alpha$}$$

beständig convergirt. Wenn also $a_1, a_2, \ldots$ die Nullstellen einer ganzen Function $m^{\text{ten}}$ Ranges sind, so hat die Function mit den aufserwesentlich singulären Stellen erster Ordnung $(a_1, a_2, \ldots)$ die Gestalt:

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{-1}^{(\nu)} x^m}{a_\nu^m (x-a_\nu)} + G(x),$$

und darin bezeichnet $c_{-1}^{(\nu)}$ den Coefficienten von $(x-a_\nu)^{-1}$ in der Entwicklung der Function $F(x)$ um die Stelle $a_\nu$.

Sind die den singulären Stellen einer gegebenen Function $F(x)$ zugeordneten Functionen

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \frac{c_{-k}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^k}$$

und ist die Bedingung $(\alpha)$ erfüllt, so kann man bei der Bildung von

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m'_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

$m'_\nu = m_\nu - k$ setzen.*)

Man kann jetzt die frühere Function $p(x)$ auch durch die Forderung einführen: es ist eine Function herzustellen, welche an allen Stellen

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega', \quad \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

unendlich wird wie $\frac{1}{(x-w)^2}$. Sie mufs dann die Form haben:

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{\mu,\mu'}{}'\left(\frac{1}{(x-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) + G(x).$$

---

*) Diese Wahl der Gröfsen $m'_\nu$ ist mit der Bemerkung zu begründen, dafs die Function $F(x)$ mit der $(k-1)^{\text{ten}}$ Derivirten der logarithmischen Ableitung von

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\nu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

— abgesehen von den Coefficienten $c_{-\varkappa}^{(\nu)}$ — übereinkommt.

Wenn noch verlangt wird, dafs diese Function doppeltperiodisch ist, kann $G(x)$ — wie wir später sehen werden — nur eine Constante sein, und diese ist Null zu setzen, wenn man z. B. annimmt, dafs

$$\lim_{x=0}\left(p(x)-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

wird.

Eine andere Anwendung bestehe in der Darstellung der Function $\pi \sec \pi x$ als Summe rationaler Functionen.

Weil die Entwicklung von $\cos \pi x$ in der Umgebung der Nullstelle $x=\frac{2\nu+1}{2}$ mit dem Gliede

$$\pi(-1)^{\nu+1}\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)=\left(\frac{d\cos\pi x}{dx}\right)_{x=\frac{2\nu+1}{2}}\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)$$

beginnt, wird die der Unendlichkeitsstelle $x=\frac{2\nu+1}{2}$ von $\pi \sec \pi x$ zugehörige Function:

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-\frac{2\nu+1}{2}}\right)=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)}$$

und somit

$$\pi\sec\pi x=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}x}{\frac{2\nu+1}{2}\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)}+G(x)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\,2x^2}{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2-x^2\right)}+G(x),$$

doch hierin kann $G(x)$ nur eine Constante und zwar $\pi$ sein.

Entwickelt man dann in:

$$\sec x=1+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\,2x^2}{\pi\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2\pi^2-x^2\right)}$$

jedes einzelne Glied nach Potenzen von $x^2$ und summirt alle Potenzreihen, so erhält man

$$\sec x=1+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{2^{2\mu+2}}{\pi}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{2\mu+1}}\right).$$

Die hier auftretenden Summen:

$$\frac{1}{1^{2\mu+1}}-\frac{1}{3^{2\mu+1}}-\frac{1}{5^{2\mu+1}}+\cdots$$

bestimme man dadurch, dafs man den Quotienten

$$\frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}}=\frac{1}{\cos x}$$

in der Umgebung der Stelle $x=0$ in eine Potenzreihe entwickelt und die Coefficienten gleichnamiger Glieder vergleicht.

Dabei wird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} = \frac{\pi^3}{2^5}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^5} = \frac{5}{3}\,\frac{\pi^5}{2^9}, \ldots$$

## § 55. Erweiterung des Mittag-Leffler'schen Theorems.*)

Der obige Mittag-Leffler'sche Satz läſst sich auf den Fall ausdehnen, wo in dem Bereich der unbeschränkten Variabeln $x$ irgend eine isolirte Punktmenge $Q$ gegeben ist:

$$a_1,\ a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

und eine Reihe ganzer rationaler oder transcendenter Functionen

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right),\quad G_2\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right),\quad G_3\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)\cdots,$$

die mit dem Argumente verschwinden. Auch dann gibt es eine in der Umgebung jeder, weder der Menge $Q$, noch deren abgeleiteter Punktmenge $Q'$ angehörigen Stelle $x_0$ reguläre Function $F(x)$, die in der Umgebung jeder isolirten Stelle $a_\nu$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

darstellbar ist.

Enthält $Q'$ nicht wie früher eine einzige Stelle, so kommt es offenbar darauf an, die Menge $Q$ derart abzutheilen, daſs zu jeder Theilmenge $Q_\mu$ oder

$$a_1^{(\mu)},\ a_2^{(\mu)}, \ldots a_\nu^{(\mu)} \ldots$$

eine Häufungsstelle $b_\mu$ gehört und diese Menge der Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \left| a_\nu^{(\mu)} - b_\mu \right| = 0$$

gemäſs geordnet werden kann, oder daſs man nach Annahme einer beliebig kleinen Gröſse $\Theta_\mu$ ein $n$ finden kann, für welches

$$\left| a_{n+\nu}^{(\mu)} - b_\mu \right| < \Theta_\mu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

denn dann läſst sich jede Theilmenge $Q_\mu$ und die Reihe zugeordneter Functionen $G_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{x-a_\nu^{(\mu)}}\right)$ zur Construction einer Function $F^{(\mu)}(x)$ mit den singulären Stellen $a_\nu^{(\mu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $b_\mu$ verwenden und es steht zu vermuthen, daſs

$$\sum_\mu F^{(\mu)}(x)$$

eine Function der verlangten Art sein wird. Wenn $Q'$ nur aus einer

*) Siehe Mittag-Leffler a. a. O.

endlichen Anzahl von Stellen $b_\mu$ besteht, ist die besagte Theilung von $Q$ in Mengen $Q_\mu$ gewifs möglich und die Summe einer endlichen Anzahl von Functionen $F^{(\mu)}(x)$ gibt gewifs eine an jeder nicht in der Punktmenge $Q + Q'$ enthaltenen Stelle reguläre Function.

Besteht aber die Punktmenge $Q'$ aus unendlich vielen Stellen, so ordne man am besten jeder Stelle $a_\nu$ eine von $Q'$ $b_\nu$ derart zu, dafs

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0 \quad \text{oder} \quad |a_\nu - b_\nu| < \Theta \quad (\nu \geqq n)$$

wird. Das ist möglich, denn sind die Stellen von $Q'$ kurzweg $b$ genannt, so gehört zunächst jeder Stelle $a_\nu$ eine untere von Null verschiedene Grenze $\varrho_\nu$ des absoluten Betrages

$$|a_\nu - b|$$

zu. Diese wird erreicht, d. h. es gibt eine Stelle $b_\nu$, wo $|a_\nu - b_\nu| = \varrho_\nu$ ist. Gibt es nämlich unendlich viele Stellen

$$b_1^{(1)},\ b_2^{(2)}, \ldots b_\nu^{(\mu)} \ldots$$

und definiren die absoluten Beträge $|a_\nu - b_\nu^{(\mu)}|$ die Grenze $\varrho_\nu$, so ist die Häufungsstelle der $b_\nu^{(\mu)}$, die als eine der zweiten abgeleiteten Punktmenge von $Q$ angehörige Stelle auch in $Q'$ enthalten ist, die verlangte Stelle $b_\nu$.

Gerade eine solche Stelle $b_\nu$ ordne man $a_\nu$ zu. Dann kann man nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\Theta$ nicht mehr unendlich viele Stellen $a_\nu'$ angeben, für welche die zugehörigen unteren Grenzen $\varrho_\nu' = |a_\nu' - b|$ gleich oder gröfser wären als $\Theta$, denn diese würden eine Grenzstelle $b'$ definiren und $|a_\nu' - b'|$ wäre für unendlich viele $a_\nu'$ kleiner als eine beliebig kleine Gröfse und kleiner als $\Theta$. Darum gibt es in der That auch eine ganze Zahl $n$, sodafs

$$\varrho_\nu = \Theta \quad \text{oder} \quad |a_\nu - b_\nu| < \Theta,$$

sobald $\nu \geqq n$ ist.*)

Nach dieser Bestimmung der Stellen $b_\nu$ entwickle man die Function $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ in eine Reihe:

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_{-\varkappa}^{(\nu)}}{(x - a_\nu)^\varkappa} = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

die in dem Bereiche $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$ convergirt, suche wie früher eine ganze Zahl $m_\nu$ derart, dafs

$$\left| \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right|$$

in dem Bereiche $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon < 1$ kleiner wird als $\varepsilon_\nu$, setze endlich

*) Natürlich kann unendlich vielen Stellen $a_\nu$ dieselbe Stelle $b_\nu$ zugehören.

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

so ist

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

der Ausdruck, welcher in der Umgebung jeder von der Menge $Q+Q'$ verschiedenen Stelle $x_0$ regulären Verhaltens ist und in der Umgebung einer Stelle der isolirten Punktmenge $Q$ durch

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

dargestellt wird. Jeder andere Ausdruck gleicher Art entsteht aus $F(x)$ durch Addition eines neuen analytischen Ausdruckes, der nur an den Stellen von $Q'$ nicht regulären Verhaltens ist.

Zum Beweise zeige man, dafs in einer Umgebung $\varrho$ von $x_0$, die keine Stelle der Menge $Q+Q'$ enthält, $F(x)$ gleichmäfsig convergirt.

Nennt man die untere Grenze aller Werthe $|x-b|$ $l$, wo $x$ jede Stelle des Bereiches $|x-x_0| < \varrho$ bedeutet, so dafs also

$$|x-b_\nu| \geqq l \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

und setzt $\varepsilon l = \Theta$, so wird für alle Werthe $\nu \geqq n$, für die $|a_\nu - b_\nu| < \Theta$ ist,

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\Theta}{l} = \varepsilon.$$

Weil daselbst

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu,$$

so leuchtet ein, dafs bei einer endlichen Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ gleichmäfsig convergiren wird, denn man kann $n$ so wählen, dafs

$$\sum_{\nu=n'}^{\infty} |F_\nu(x)| \quad (n' \geqq n)$$

für alle Stellen der Umgebung $\varrho$ von $x_0$ kleiner wird als eine beliebig kleine vorgegebene Gröfse $\delta$.

Da aber auch die Differenz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$$

in der Umgebung von $a_\lambda$ gleichmäfsig convergirt, besitzt die analytische Function $F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ und endlich $F(x) + \Phi(x)$ die genannten Eigenschaften, wenn $\Phi(x)$ nur mehr an den Stellen $b_\nu$ irregulär ist.

Besteht der Bereich der gleichmäfsigen Convergenz eines der gefundenen Ausdrücke aus einem Continuum, so kann man jedes seiner Elemente $\mathfrak{P}(x|x_0)$ aus jedem anderen ableiten, folglich stellt der Ausdruck innerhalb des Continuums eine monogene Function dar. Bildet die Punktmenge $Q+Q'$ die Begrenzung mehrerer Continua, die wohl gemeinsame Grenzstellen haben können, aber aus deren Innerem kein continuirlicher Übergang in ein nächstes Continuum zu bewerkstelligen ist, so wird der Ausdruck in dem einzelnen Bereiche eine monogene Function vollständig oder blos einen Theil einer solchen darstellen. Liegen z. B. die Stellen der Menge $(Q+Q')$ alle in einem Kreise $|x-a|=r$ und auf dessen Begrenzung, und kann man aus dem Innern desselben nicht nach den aufserhalb liegenden Stellen gelangen, verschwinden ferner die Functionen $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ nicht identisch, so wird $F(x)$ innerhalb des Kreises eine monogene Function vollständig darstellen; ob aber $F(x)$ aufserhalb des Kreises auch eine eindeutige monogene Function darstellt, die nicht in das Innere desselben fortzusetzen ist, das ist noch nicht entschieden.

Angenommen, es sei bewiesen, dafs es stets eine eindeutige analytische Function gebe, die innerhalb eines von einer Punktmenge $Q_1+Q_1'$ vollständig begrenzten Continuums regulär und an jeder Stelle $a_\nu$ der isolirten Menge $Q_1$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+\mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

darstellbar ist, wo $G_\nu$ eine nicht identisch verschwindende ganze Function bedeutet, die für $\frac{1}{x-a_\nu}=0$ Null ist, so kann man zu der früheren Menge $Q+Q'$ zurückkehrend folgende Fälle unterscheiden. Es ist möglich, dafs eine Theilmenge $Q_1+Q_1'$ von $Q+Q'$ für sich ein Continuum $\mathfrak{A}_1$ vollständig begrenzt, dann existirt innerhalb $\mathfrak{A}_1$ eine monogene Function $F_1(x)$, deren singuläre Stellen diejenigen der Menge $Q_1+Q_1'$ sind. Enthält nun $Q+Q'$ eine zweite Theilmenge $Q_2+Q_2'$, die für sich ein anderes Continuum $\mathfrak{A}_2$ vollständig begrenzt, das aber theilweise mit $\mathfrak{A}_1$ zusammenfällt oder $\mathfrak{A}_1$ ganz enthält, so existirt vor Allem eine monogene Function $F_2(x)$ innerhalb $\mathfrak{A}_2$, ferner gibt es innerhalb der Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, die aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ entstehen, wenn man den $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gemeinsamen Bereich $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in Abzug bringt, zwei Functionen $F_3(x)$ und $F_4(x)$, und endlich existirt auch eine monogene Function innerhalb $\mathfrak{C}_1$.

Da kann nun der Fall eintreten, dafs ein einziger Ausdruck $F(x)$, wenn er in $\mathfrak{A}_1$ $F_1(x)$ darstellt, gleichzeitig $F_4(x)$ darstellen mufs oder dafs ein Ausdruck $F_3(x)$, $F_5(x)$, $F_4(x)$, oder innerhalb $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $F_1(x)$, $F_5(x)$, $F_2(x)$ darstellen wird.

Um uns über diese Möglichkeiten zu orientiren, beweisen wir den eben genannten Satz über die Existenz einer monogenen Function $F_1(x)$, deren singuläre Stellen $(Q_1 + Q_1')$ einen Bereich $\mathfrak{A}_1$ vollständig begrenzen, aufserhalb dessen aber noch Stellen existiren, und suchen hinterher Ausdrücke zu bilden, welche in verschiedenen Bereichen ihrer gleichmäfsigen Convergenz analytische Functionen vollständig oder nur theilweise darstellen.

Wenn man beweisen will, dafs innerhalb eines Bereiches $\mathfrak{A}_1$ eine monogene Function $F_1(x)$ existirt, kann man festsetzen, dafs $F_1(x)$ aufserhalb $\mathfrak{A}_1$ nicht regulär sei.

Bezeichnet man mit $b_1, b_2, b_3, \ldots$ aufserhalb $\mathfrak{A}_1 + Q_1$ oder auf der Begrenzung dieses Bereiches liegende Punkte und nennt $b$ die Punkte von $Q_1'$ d. h. die Begrenzungspunkte von $\mathfrak{A}_1 + Q_1$, und heifst die untere Grenze von $|b - b_\nu|$ $\beta_\nu$, so kann man die Stellen $b_\nu$ derart wählen, dafs die obere Grenze $\beta$ der $\beta_\nu$ eine bestimmte endliche Gröfse wird und dafs nach Annahme einer beliebig kleinen Gröfse $\Theta$ auch ein $n$ gefunden werden kann, für welches

$$|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \Theta,$$

sobald $\nu \geqq n$ ist.

Falls die Stellen $b_\nu$ alle der Punktmenge $Q_1'$ angehören, werden wie früher alle $\beta_\nu$ Null zu setzen sein.

Bezeichnet

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

wieder eine Reihe positiver Gröfsen von endlicher Summe und wählt man anstatt der einzigen Gröfse $\varepsilon < 1$ eine unendliche Reihe positiver Gröfsen

$$\varepsilon^{(1)}, \ \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(\nu)}, \ldots,$$

für welche $\lim \varepsilon^{(\nu)} = 1$ ist, so bilde man aus den unseren Stellen $a_\nu$ zugeordneten (nicht identisch verschwindenden) ganzen Functionen $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) F_\nu(x)$ dadurch, dafs man die Zahlen $m_\nu$ nunmehr der Bedingung gemäfs bestimmt: es soll

$$\left| \sum_{\mu = m_\nu + 1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| < \varepsilon_\nu,$$

sobald $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$. Zu diesem Zwecke hat man ebenso wie früher (S. 347 und 348), aber entsprechend den verschiedenen Gröfsen $\varepsilon^{(\nu)}$ verschiedene Hilfsgröfsen $\beta^{(\nu)}$ und $\alpha^{(\nu)}$ einzuführen.

Ist $b_\nu = \infty$, so entnehme man $m_\nu$ der Ungleichung

$$\frac{g_\xi^{(\nu)} \beta^{(\nu)}}{1 - \beta^{(\nu)}} \frac{\left(\varepsilon_0^{(\nu)}\right)^{m_\nu + 1}}{1 - \varepsilon_0^{(\nu)}} < \varepsilon_\nu,$$

und wenn $b_\nu$ endlich ist, der Ungleichung

$$g_\xi^{(\nu)} \frac{\alpha^{(\nu)}}{1+\alpha^{(\nu)}} \frac{(\varepsilon_0^{(\nu)})^{m_\nu+1}}{1-\varepsilon_0^{(\nu)}} < \varepsilon_\nu,$$

wo die Bedeutung und Beschaffenheit der Gröfsen $g_\xi^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$ und $\varepsilon^{(\nu)}$ nicht mehr erklärt zu werden braucht.

Bezeichnet dann $x_0$ eine Stelle von $\mathfrak{A}_1 + Q_1$ und enthält der Bereich $|x - x_0| \leqq \varrho$ keine Stelle von $Q_1 + Q_1'$, aufser etwa $x_0$, so kann man eine ganze Zahl $n$ derart finden, dafs $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right|$ für alle Stellen dieses Bereiches kleiner wird als $\varepsilon^{(\nu)}$, wenn nur $\nu \geqq n$ ist.

In der That: durchläuft $x$ wieder alle Werthe des genannten Bereiches und sucht man die untere Grenze $l$ von

$$|x - b_\nu| - \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2 \ldots),$$

so ist

$$|x - b_\nu| \geqq \beta_\nu + l$$

für alle $x$-Werthe des Bereiches $|x - x_0| \leqq \varrho$. Ist dann $\Theta < l$, so wird

$$|a_\nu - b_\nu| < \beta_\nu + \Theta,$$

wenn $\nu \geqq n_1$ und ebenso

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\Theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu}.$$

Da aber $\frac{\Theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu} \leqq \frac{\Theta + \beta}{l + \beta}$, wo $\beta$ wieder die obere Grenze der $\beta_\nu$ ist, so wird auch

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\Theta + \beta}{l + \beta}.$$

Wenn man nun mit Rücksicht auf den endlichen Werth von $\beta$ und die Ungleichung $\Theta < l$ ein $n_2$ so bestimmt, dafs

$$\frac{\Theta + \beta}{l + \beta} < \varepsilon^{(\nu)} \quad (\nu \geqq n_2),$$

so wird auch

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$$

sein, wenn $\nu$ gröfser oder gleich ist der gröfseren der ganzen Zahlen $n_1$ und $n_2$.

Nunmehr ist die Existenz der innerhalb $\mathfrak{A}_1$ monogenen analytischen Function $F_1(x)$ erwiesen, denn der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

definirt eine Function mit den geforderten Eigenschaften und jede andere geht durch Addition einer blos an den Stellen von $Q_1'$ irregulären Function hervor.

Umgekehrt läfst sich eine eindeutige Function $\overline{F}(x)$ mit den sin-

gulären Stellen $a_1$, $a_2 \ldots$ als Summe eines Ausdruckes $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ und einer Function darstellen, die nur an den Stellen der aus der isolirten Punktmenge $(a_1, a_2, \ldots)$ abgeleiteten Menge $Q'$ nicht regulären Verhaltens ist, denn nach dem Laurent'schen Satze kann man $\overline{F}(x)$ in der Umgebung von $a_\nu$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}_\nu(x-a_\nu)$$

ausdrücken.

## § 56. Arithmetische Ausdrücke, die mehrere Functionen ganz oder theilweise darstellen.

Es soll nunmehr untersucht werden, ob ein und derselbe Ausdruck in verschiedenen Bereichen seiner gleichmäßsigen Convergenz verschiedene Functionen vollständig oder nur theilweise darstellen kann, oder ob er in manchen Bereichen Functionen vollständig und in anderen nur theilweise darstellt.

Diese Frage ist von der oben angeregten verschieden, und wir werden hier nicht erfahren, ob die früher construirte Function $F(x)$ mit den singulären Stellen $(Q+Q')$ in den continuirlichen Bereichen, die man erhält, indem man die Menge $Q+Q'$ aus dem Bereiche der unbeschränkten Variabeln ausschliefst, lauter monogene Functionen darstellt, die über diese Bereiche nicht fortzusetzen sind. Wir werden uns aber mit der Antwort auf die erste Frage begnügen und es als wahrscheinlich hinstellen müssen, dafs $F(x)$ nicht blos monogene Functionen vollständig darstellen wird.

M. Tannery hat eine Reihe gebildet, die in der Umgebung jeder Stelle $x$, für welche $|x| \gtrless 1$ gleichmäfsig convergirt und den Werth $+1$ oder $-1$ besitzt, je nachdem $|x| \lessgtr 1$ ist.

Er geht von der Bemerkung aus, dafs unter der Annahme einer unendlichen Reihe positiver ganzer Zahlen

$$n_0,\; n_1,\; n_2, \ldots n_\nu, \ldots$$

mit der oberen Grenze $\infty$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1+x^{n_\nu}}{1-x^{n_\nu}} = \pm 1$$

ist, je nachdem $|x| \lessgtr 1$ ist. Setzt man dann

$$\frac{1+x^{n_\nu}}{1-x^{n_\nu}} = \frac{1+x^{n_0}}{1-x^{n_0}} + \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\{\frac{1+x^{n_\mu}}{1-x^{n_\mu}} - \frac{1+x^{n_{\mu-1}}}{1-x^{n_{\mu-1}}}\right\},$$

so ist

$$\psi(x) = \frac{1+x^{n_0}}{1-x^{n_0}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1+x^{n_\mu}}{1-x^{n_\mu}} - \frac{1+x^{n_{\mu-1}}}{1-x^{n_{\mu-1}}} \right\}$$

$$= \frac{1+x^{n_0}}{1-x^{n_0}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{2x^{n_{\mu-1}}(x^{n_\mu - n_{\mu-1}} - 1)}{(x^{n_\mu}-1)(x^{n_{\mu-1}}-1)}$$

die verlangte Reihe. Bezeichnet hierauf $x'$ eine rationale Function von $x$, so wird die Gesammtheit der Stellen $x$, für welche der absolute Betrag von $x'$ gleich 1 ist, in dem Bereiche der Variabeln Continua, in denen $|x'|$ kleiner ist als Eins, von continuirlichen Bereichen trennen, wo $|x'| > 1$. Dann aber ist $\psi(x') = \chi(x)$ die Summe unendlich vieler rationaler Functionen, die in den Bereichen, wo $|x'| \gtrless 1$ ist, den Werth $\mp 1$ besitzt; aber dort, wo $|x'| = 1$ ist, convergirt $\chi(x)$ nicht.

Ist $x'$ nur eine lineare Function von $x = \xi + i\eta$:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = f(x),$$

wo die Coefficienten durch Division von $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$ stets so umzuwandeln sind, dafs $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird, so wird die Gleichung eines Kreises um die Stelle $m + in$ in der Form:

$$|x - (m + in)| = r$$

oder

$$A(\xi^2 + \eta^2) - 2mA\xi - 2nA\eta + (m^2 + n^2 - r^2)A = 0$$

oder in der Form zu schreiben sein:

$$Axx_0 + Bx + B_0x_0 + C = 0,$$

wenn $x_0$ und $B_0$ die conjugirten Werthe von $x$ und $B$ und $A$ und $C$ reelle Gröfsen sind. Das aus diesem Kreise durch die Substitution

$$x' = f(x) \quad \text{und} \quad x_0' = \frac{\alpha_0 x_0 + \beta_0}{\gamma_0 x_0 + \delta_0}$$

abzuleitende Gebilde:

$$A(\alpha x + \beta)(\alpha_0 x_0 + \beta_0) + B(\alpha x + \beta)(\gamma_0 x_0 + \delta_0) + B_0(\alpha_0 x_0 + \beta_0)(\gamma x + \delta)$$
$$+ C(\gamma x + \delta)(\gamma_0 x_0 + \delta_0) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} & xx_0(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) \\ & + x\,(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\alpha_0\delta + C\gamma\delta_0) \\ & + x_0(A\alpha_0\beta + B\beta\gamma_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma_0\delta) \\ & + \quad (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0, \end{aligned}$$

wo $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ conjugirten Gröfsen sind, ist offenbar wieder ein Kreis.

Wir theilen die Variabelnebene nun durch beliebige Kreise

$$|x - a_1| = r_1, \quad |x - a_2| = r_2, \ldots |x - a_n| = r_n,$$

von denen niemals zwei einen Bereich gemein haben, in $n+1$ Theile und bestimmen $n$ Functionen.

$$x_\nu = \frac{\alpha_\nu x + \beta_\nu}{\gamma_\nu x + \delta_\nu},$$

so dafs $|x_\nu|$ auf dem Kreise $|x - a_\nu| = r_\nu$ gleich Eins ist. Dann hat $|x_\nu|$ innerhalb des Kreises stets einen Werth $\gtrless 1$ und aufserhalb desselben einen Werth, der $\lesseqgtr 1$ ist.

Ist z. B. $|x_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ in dem Bereiche $|x - a_\nu| < r_\nu$ kleiner als Eins und sind

$$F_0(x),\ F_1(x), \ldots F_n(x)$$

eindeutige Functionen, deren Stetigkeitsbereich blos durch eine unendliche Anzahl aufserwesentlich und eine endliche Anzahl wesentlich singulärer Stellen begrenzt ist, auf dafs sie in einem unendlichen Bereiche regulär sind, so hat der Ausdruck

$$F_0(x) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(1 + \psi(x_\nu))\,(F_\nu(x) - F_0(x))$$

die Eigenschaft, die Function $F_\nu(x)$ so lange darzustellen, als $x$ innerhalb des Kreises $r_\nu$ liegt, und $F_\mu(x)$ darzustellen, so lange $x$ in dem Kreise $r_\mu$ sich befindet, d. h. derselbe Ausdruck stellt in verschiedenen Theilen seines Convergenzbereiches verschiedene Functionen nur theilweise dar. Sollten aber die Functionen $F_1(x), \ldots F_n(x)$ nur innerhalb der Kreise $r_1 \ldots r_n$, und sollte $F_0(x)$ aufserhalb aller Kreise allein existiren, so stellt derselbe Ausdruck verschiedene Functionen vollständig dar.

Sind andrerseits die $n$ Kreise so gewählt, dafs jeder von dem folgenden umschlossen wird, wobei der Bereich der Variabeln $x$ wieder in $n+1$ Theile gesondert ist, so wird der Ausdruck

$$\frac{1}{2}(F_{n+1}(x) + F_1(x)) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(F_{n+1}(x) - F_\nu(x))\,\psi(x_\nu)$$

in dem ersten Kreise $F_1(x)$, in dem daran grenzenden ringförmigen Gebiete $F_2(x)$ usw., endlich aufserhalb des letzten Kreises $F_{n+1}(x)$ darstellen. Wenn die Functionen $F_1(x) \ldots F_{n+1}(x)$ nur eine endliche Anzahl wesentlich singulärer Stellen besitzen, stellt der genannte Ausdruck in den einzelnen Bereichen Theile verschiedener Functionen dar, wenn aber $F_1(x)$ innerhalb des ersten, $F_2(x)$ innerhalb des zweiten usw., $F_{n+1}(x)$ innerhalb des letzten Bereiches allein existirt, repräsentirt derselbe Ausdruck mehrere Functionen vollständig, und wenn endlich $F_1(x)$ innerhalb des ersten Kreises, $F_2(x)$ in dem zweiten Kreise und $F_{n+1}(x)$ innerhalb der ganzen Ebene existirt, so bringt unser Ausdruck eine Function, nämlich $F_1(x)$, vollständig und die übrigen nur theilweise zur Darstellung.

Wir sehen also an diesen einfachen Beispielen, dafs alle der früher genannten Fälle vorkommen.

Das Wesentliche dieser Erörterungen besteht aber in der Erkenntnis, daſs *der Begriff der monogenen Function mit dem Begriff einer durch Gröſsenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit nicht vollkommen zusammenfällt.**) Und wenn man zwei Functionen als identisch erkennt, die in der Umgebung einer Stelle $x_0$ für unendlich viele Werthe mit der Häufungsstelle $x_0$ übereinstimmen, so ist die Identität zweier Ausdrücke, deren Bereich gleichmäſsiger Convergenz aus verschiedenen Continuis besteht, erst dann erwiesen, wenn man die Identität der verschiedenen Functionen, welche sie darstellen, erkannt hat.

### § 57. Darstellung eindeutiger Functionen durch Producte.

Es ist schon früher geglückt, nicht allein die ganze, sondern auch die eindeutige Function mit einer wesentlichen und unendlich vielen auſserwesentlich singulären Stellen durch den Quotienten unendlicher Producte von Primfunctionen darzustellen.

Die Darstellung einer eindeutigen Function durch unendliche Producte soll nunmehr verallgemeinert werden.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine isolirte unendliche Punktmenge $Q$ an, die mit $Q'$ vereinigt ein Continuum $\mathfrak{A}$ vollständig begrenzt, ordnen den Stellen von $Q$

$$a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

positive oder negative ganze Zahlen

$$n_1, n_2, \ldots n_\nu, \ldots$$

zu und beweisen zunächst, daſs es stets eine monogene eindeutige Function $F(x)$ gibt, die in der Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{A}$ regulären Verhaltens ist, an den Stellen $a_\nu$ von der $n_\nu^{\text{ten}}$ Ordnung Null oder unendlich wird, je nachdem $n_\nu$ positiv oder negativ ist und in der Umgebung jeder solchen Stelle auf die Form

$$(x - a_\nu)^{n_\nu}\, e^{\mathfrak{P}_\nu(x - a_\nu)}$$

gebracht werden kann, womit gesagt ist, daſs sie daselbst auſser an der Stelle $a_\nu$ weder verschwindet noch unendlich wird. Die Stellen der Punktmenge $Q'$ sind wesentlich singuläre Stellen von $F(x)$. Umgekehrt wird aber jede Function dieser Eigenschaften in derselben Weise auszudrücken sein wie $F(x)$. —

Man ordne jeder Stelle $a_\nu$ wieder eine auf der Begrenzung von $\mathfrak{A} + Q$ oder auſserhalb dieses Bereiches liegende Stelle $b_\nu$ in der früheren Weise zu und wähle eine Reihe positiver Gröſsen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

von endlicher Summe und eine weitere Reihe positiver Gröſsen

*) Siehe Weierstraſs, Functionenlehre p. 79 u. s. f.

$$\varepsilon^{(1)},\ \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(\nu)}$$

mit der Grenze 1, bilde endlich die Primfunctionen:

$$E_\nu(x) = \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu},$$

so wird bei passender, mit den Gröfsen $\varepsilon_\nu$ und $\varepsilon^{(\nu)}$ zusammenhängender Wahl der positiven ganzen Zahlen $m_\nu$ das Product $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ die verlangte Function $F(x)$ definiren.

Ist $a_\nu$ von Null und Unendlich verschieden, so läfst sich die genannte Primfunction in dem Bereiche

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$$

— an dessen Stelle im Falle $b_\nu = \infty$ der Bereich $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$ tritt — auf die Form

$$e^{-n_\nu \sum\limits_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}$$

bringen. Hier wähle man die ganze Zahl $m_\nu$ derart, dafs

$$\left| n_\nu \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right|$$

in dem Bereiche $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$ kleiner wird als $\varepsilon_\nu$. Da sich hierauf eine ganze Zahl $n$ so angeben läfst, dafs der absolute Betrag von $\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}$ für alle durch eine Bedingung $|x - x_0| \leqq \varrho$ definirten Stellen des Continuums $\mathfrak{A}$ kleiner wird als $\varepsilon^{(\nu)}$, wofern $\nu \geqq n$ ist, so kann man auch eine ganze Zahl $n'$ der Beschaffenheit finden, dafs nach Annahme einer Gröfse $\delta$ für alle die genannten Stellen der Umgebung von $x_0$

$$\sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \left| n_\nu \sum_{\mu=m_\nu+1} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| < \delta,$$

sobald $\varkappa \geqq n$ ist. Dann aber wird auch das Product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1} E_\nu(x) \prod_{\nu=n}^{\infty} E_\nu(x)$$

gleichzeitig convergiren und in der Umgebung jeder dem Continuum $\mathfrak{A}$ angehörigen Stelle $x_0$ durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ darzustellen sein. Weil das Product in eben diesem Bereiche weder Null noch unendlich wird, kann man der letzten Reihe auch die Gestalt

$$e^{\mathfrak{P}(x - x_0)}$$

geben.

In der Umgebung einer der Menge $Q$ angehörigen Stelle $a_\lambda$ ist ein Bereich angebbar, in dem der Quotient

$$\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)}{E_\lambda(x)}$$

regulären Verhaltens ist und nicht verschwindet, und darum läſst sich das Product daselbst in der Form

$$(x - a_\lambda)^{n_\lambda} e^{\mathfrak{P}_\lambda(x - a_\lambda)}$$

ausdrücken.

Die Stellen $a_\lambda$ sind also Null oder auſserwesentlich singuläre Stellen der durch das Product definirten analytischen Function und die in $Q'$ enthaltenen Häufungsstellen sind offenbar wesentlich singuläre Stellen.

Das Product von $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ und einer nur an den Stellen $Q'$ irregulären und innerhalb des Bereiches $\mathfrak{A} + Q$ nicht verschwindenden Function $F_0(x)$ genieſst dieselben Eigenschaften. Bezeichnet man eine eindeutige monogene Function, die im Innern des Continuums $\mathfrak{A} + Q$ regulär ist, mit $f_0(x)$, so hat $F_0(x)$ die Gestalt $e^{f_0(x)}$ und jede Function der ursprünglich genannten Art ist in einem Ausdrucke

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) \,.\, e^{f_0(x)}$$

enthalten.

Heiſsen die Stellen von $Q$, denen positive Zahlen $n_\nu$ zugehören, $a_\nu$, diejenigen, welchen negative zugeordnet sind, $\alpha_\nu$, so kann man

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x,\, a_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x,\, \alpha_\nu)}$$

setzen, wenn unter $E_\nu(x, a_\nu)$ und $E_\nu(x, \alpha_\nu)$ die Primfunctionen mit den Nullstellen $a_\nu$ resp. $\alpha_\nu$ verstanden sind.

Ordnet man diesen Stellen $a_\nu$ und $\alpha_\nu$ nur Punkte der Menge $Q'$ zu, in welchem Falle man die früheren Gröſsen $\varepsilon^{(\nu)}$ auf eine einzige $\varepsilon$ reduciren kann, die kleiner als 1 ist, und heiſsen diese Punkte $b_\nu$ oder $\beta_\nu$, so wird

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_\nu - \beta_\nu}{x - \beta_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m'_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\alpha_\nu - \beta_\nu}{x - \beta_\nu}\right)^\mu}},$$

doch weil man einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Stellen dieselben wesentlich singuläre Stellen der Bedingung $\lim |a_\nu - b_\nu| = 0$ oder $\lim |\alpha_\nu - \beta_\nu| = 0$ gemäſs zuordnen kann, erhält das Product auch die Gestalt:

$$e^{f_0(x)} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-\beta_\nu}\right)},$$

wo $G_\nu$ und $\overline{G}_\nu$ ganze Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

Dafür endlich kann man noch die weitere Form

$$e^{\varphi_0(x)} \frac{\prod G_\nu\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)}{\prod G_\nu\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)}$$

ansetzen, wenn man die denselben singulären Stellen $b_\nu$ zuzuordnenden Null- und Unendlichkeitsstellen $a_\nu$ und $\alpha_\nu$ zusammenfaſst. Gehört einer besonderen Stelle $b_\lambda$ keine Null- oder Unendlichkeitsstelle zu, so wird für diese $G_\nu\left(\frac{1}{x-b_\lambda}\right)$ beziehungsweise $\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)$ durch die Einheit zu ersetzen sein.

Damit ist eine Darstellung einer eindeutigen monogenen Function mit unendlich vielen wesentlich singulären Stellen gewonnen, deren Form der Darstellung einer Function mit einer wesentlich singulären Stelle analog ist. Aber ebenso läſst sich jede monogene eindeutige Function mit vorgegebenen Null- und auſserwesentlichen Unendlichkeitsstellen ausdrücken, denn wenn eine solche Function auf die genannte Art bestimmt ist, so wird der Quotient der gegebenen und dieser Function eine innerhalb $\mathfrak{A} + Q$ reguläre Function $e^{f_0(x)}$. —

Es ist nun auch ersichtlich, daſs wir für diese Functionen bezüglich ihrer Beschaffenheit in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen dieselben Untersuchungen anstellen können, wie über die Function mit einer einzigen wesentlichen Singularität. Zunächst wird eine Function $F(x)$ auſserhalb eines dem Bereiche $\mathfrak{A} + Q$ entnommenen Theilbereiches $\mathfrak{B}$ dem absoluten Betrage nach gewiſs gröſser als irgend eine vorgegebene Gröſse $R$, und $F(x)$ muſs in unendlich kleiner Umgebung der wesentlich singulären Stellen einen unendlich groſsen Werth annehmen. Dann kommt ihr Werth daselbst jeder Gröſse beliebig nahe, da $\frac{1}{F(x) - A}$ dieselben wesentlich singulären Stellen besitzt wie $F(x)$ selbst.

Die eindeutige Function wird aber auch jedem Werthe $A$ auſserhalb eines Bereiches $\mathfrak{B}$ beliebig nahe kommen, und dann gibt es in beliebiger Nähe von $A$ einen Werth $A_1$, den sie auſserhalb $\mathfrak{B}$ wirklich erreicht, z. B. für $x = x_1$.

Einen in der Nähe von $A$ und $A_1$ liegenden Werth $A_2$ erhält $F(x)$ dann für einen in der Umgebung von $x_1$ liegenden Werth $x_2$. Aber ferner gibt es aufserhalb dieser Umgebung Stellen $x_2'$, für welche $F(x)$ beliebig nahe an $A_2$ herankommt und etwa gleich $A_3$ wird. Diesen Werth nimmt $F(x)$ also an zwei Stellen $x_2'$ und $x_2''$ an, wobei $x_2''$ in der Umgebung von $x_1$ und $x_2$ liegt.

Hat man so fortschreitend einen in beliebiger Nähe von $A$ liegenden Werth $A_n$ gefunden, den die Function $F(x)$ für $(n-1)$ Werthe

$$x_n^{(1)},\ x_n^{(2)},\ \ldots\ x_n^{(n-1)}$$

ihres Stetigkeitsbereiches annimmt, so kann man auch einen $A_n$ benachbarten Werth $A_{n+1}$ angeben, den $F(x)$ für $n$ Werthe

$$x_{n+1}^{(1)},\ x_{n+2}^{(2)},\ \ldots\ x_{n+1}^{(n)}$$

erhält, von denen $(n-1)$ in der Nähe der Stellen $x_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ liegen, indefs der $n^{\text{te}}$ aufserhalb dieser Bereiche liegt.

Fixirt man also einen Werth $A$, dem $F(x)$ beliebig nahe kommt, so kann man in beliebig kleiner Umgebung von $A$ Werthe angeben, die $F(x)$ an beliebig vielen Stellen ihres Stetigkeitsbereiches annimmt.*)

Mit diesem Satze brechen wir die Untersuchungen über die allgemeinen eindeutigen analytischen Functionen ab und verweisen im Übrigen auf die schon citirten Originalabhandlungen.

---

*) Siehe Phragmen, Acta mathem. Bd. 7, p. 40.

# Siebentes Capitel.

## I. Abschnitt.

## Doppeltperiodische Functionen.

### § 58. Allgemeine Eigenschaften der doppeltperiodischen Functionen, die im Endlichen den Charakter rationaler Functionen besitzen.*)

Wir wenden uns wieder zu der Aufgabe, analytische Functionen zu ermitteln, welche besondere Eigenschaften geniefsen.

Eine analytische Function $f(x)$ hiefs *periodisch*, wenn bei beliebigem Werthe ihres Argumentes für gewisse constante Gröfsen $w$ die Gleichung

$$f(x+w)=f(x)$$

besteht. Jede solche Constante $w$ nannten wir eine Periode und jedes ganzzahlige Vielfache derselben ist wieder eine Periode.

Man kann zunächst zeigen, dafs eine eindeutige oder endlich vieldeutige analytische Function $f(x)$ keine unendlich kleine Perioden besitzen könne.

Andernfalls hätte nämlich $f(x)$ in der Umgebung einer regulären Stelle $x_0$, wo die Darstellung

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

gilt, unendlich oft den Werth $f(x_0)$ oder es gäbe in jeder Nähe von $x_0$ unendlich viele Stellen, an denen

$$f'(x_0)\frac{x-x_0}{1}+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

verschwände und das ist mit der nothwendigen Voraussetzung, dafs $f(x)-f(x_0)$ nicht identisch Null ist, unvereinbar.

Es gibt daher in einem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Stellen $x+w$, an denen $f(x+w)=f(x)$ ist oder nur eine endliche Anzahl von Perioden, deren absoluter Betrag eine endliche Grenze nicht überschreitet.

---

*) Vergleiche die Formeln und Lehrsätze von Schwarz und Kiepert's schon genannte Abhandlung.

Unter den Stellen $x = |x| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, wo $\varphi$ constant ist, sei

$$2\varpi = |2\varpi| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

diejenige Periode mit dem kleinsten absoluten Betrage, dann sind alle übrigen derselben Form

$$2\omega = |2\omega| \cos\varphi + i \sin\varphi)$$

ganzzahlige Vielfache von $2\varpi$: $2\omega = 2n\varpi$. Wäre auch $2m\varpi$ eine Periode, wenn $m$ keine ganze Zahl bedeutet, so müfste nach der Zerlegung $m = n + \nu$ $|\nu| < 1$ zugleich mit $2m\varpi = 2n\varpi + 2\nu\varpi$ auch $2\nu\varpi$ eine Periode sein und deren absoluter Betrag wäre kleiner als $|2\varpi|$.

Gibt es aufser den Stellen

$$2n\varpi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

keine weiteren Perioden, so ist die Function *einfach periodisch*. Existiren aber noch andere Perioden $2n\varpi'$, so kann das Verhältnis $\frac{\varpi'}{\varpi}$ vor Allem nicht reell sein, sonst wäre ja mit

$$2n\varpi' = 2n_1\varpi + 2\nu_1\varpi,$$

wo $n_1$ wieder eine ganze Zahl und $|\nu_1| < 1$ ist, auch $2\nu_1\omega$ eine Periode.

Bezeichnen $2\omega^{(1)}$ und $2\omega^{(2)}$ Perioden von nicht reellem Verhältnis, so sind alle übrigen in der Formel

$$2\xi_1\omega^{(1)} + 2\xi_2\omega^{(2)}$$

enthalten, wo $\xi_1$ und $\xi_2$ reelle Gröfsen bedeuten.

Unter der Voraussetzung einer blos endlichen Anzahl von *Periodenpunkten* in einem endlichen Bereiche kann man zeigen, dafs es ein Periodenpaar $(2\varpi^{(1)}, 2\varpi^{(2)})$ gibt, aus dem alle übrigen ganzzahlig zusammenzusetzen sind.*)

Wählt man nämlich eine Periode, in welcher $\xi_2 = 0$ ist und $\xi_1$ den kleinsten in dem Intervalle:

$$0 < \xi_1 \leqq 1$$

befindlichen Werth annimmt, und dann eine zweite, wo $\xi_1$ und $\xi_2$ die kleinsten innerhalb der reellen Bereiche

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 < \xi_2 \leqq 1$$

liegenden Werthe besitzen und nennt diese unter unserer Voraussetzung jedenfalls existirenden Perioden von nicht reellem Verhältnis:

$$2\varpi^{(1)} = 2\xi_1^{(1)}\omega^{(1)}, \quad 2\varpi^{(2)} = 2\xi_1^{(2)}\omega^{(1)} + 2\xi_2^{(2)}\omega^{(2)},$$

so erhält jede Periode $2\xi_1\omega^{(1)} + 2\xi_2\omega^{(2)}$ die Form

$$2\nu_1\varpi^{(1)} + 2\nu_2\varpi^{(2)} + 2\eta_1\omega^{(1)} + 2\eta_2\omega^{(2)},$$

wo $\eta_1$ und $\eta_2$ die Bedingungen

*) Siehe Weierstrafs, Monatsberichte der Berliner Akad. 1876.

$$0 \leqq \eta_1 < \xi_1^{(1)}, \quad 0 \leqq \eta_2 < \xi_2^{(2)}$$

erfüllen und $\nu_1$ und $\nu_2$ ganze Zahlen werden, denn man kann

$$\xi_1 = \nu_1 \xi_1^{(1)} + \nu_2 \xi_1^{(2)} + \eta_1, \quad \xi_2 = \nu_2 \xi_2^{(2)} + \eta_2$$

setzen. Nun mufs aber

$$2\eta_1 \omega^{(1)} + 2\eta_2 \omega^{(2)}$$

eine Periode sein, und weil das zufolge der Festsetzungen über die Beschaffenheit von $2\varpi^{(1)}$ und $2\varpi^{(2)}$ nur angeht, wenn $\eta_2$ und $\eta_1$ verschwinden, so haben wir in $2\varpi^{(1)}$ und $2\varpi^{(2)}$ wirklich Perioden, durch die jede andere ganzzahlig auszudrücken ist:

$$2\xi_1 \omega^{(1)} + 2\xi_2 \omega^{(2)} = 2\nu_1 \varpi^{(1)} + 2\nu_2 \varpi^{(2)}$$

und wir wissen von früher her, dafs es in einem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Stellen solcher Art geben kann. —

Bilden wir aus drei Perioden $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, von denen keine zwei in reellem Verhältnis stehen dürfen, damit keine unendlich kleine Perioden existiren, die Perioden:

$$2\xi_1 \omega_1 + 2\xi_2 \omega_2 + 2\xi_3 \omega_3,$$

wo $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ wieder reell sind und setzen voraus, dafs in einem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Periodenstellen liegt, so kann man unter den Perioden ein System

$$2\bar{\omega}_1 = 2\xi_1^{(1)} \omega_1, \quad 2\bar{\omega}_2 = 2\xi_1^{(2)} \omega_1 + 2\xi_2^{(2)} \omega_2, \quad 2\bar{\omega}_3 = 2\xi_1^{(3)} \omega_1 + 2\xi_2^{(3)} \omega_2 + 2\xi_3^{(3)} \omega_3$$

ausfindig machen, wo die Coefficienten $\xi^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$ die kleinsten der an die Bedingungen

$$0 < \xi_1 \leqq 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

oder

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 < \xi_2 \leqq 1, \quad \xi_3 = 0$$

oder

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad 0 < \xi_3 \leqq 1$$

gebundenen Werthe von $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ sind, die bei Perioden vorkommen. Zerlegt man dann $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ in $2\xi_1 \omega_1 + 2\xi_2 \omega_2 + 2\xi_3 \omega_3$:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \nu_3 \xi_3^{(3)} + \eta_3 \\ \xi_2 &= \nu_2 \xi_2^{(2)} + \nu_3 \xi_2^{(3)} + \eta_2 \\ \xi_1 &= \nu_1 \xi_1^{(1)} + \nu_2 \xi_1^{(2)} + \nu_3 \xi_1^{(3)} + \eta_3 \end{aligned}$$

und läfst $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ ganze Zahlen sein, knüpft aber $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ an die Ungleichungen

$$0 \leqq \eta_1 < \xi_1^{(1)}, \quad 0 \leqq \eta_2 < \xi_2^{(2)}, \quad 0 \leqq \eta_3 < \xi_3^{(3)},$$

so erhält die aus $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ bestehende Periode die Form

$$2\nu_1 \bar{\omega}_1 + 2\nu_2 \bar{\omega}_2 + 2\nu_3 \bar{\omega}_3,$$

denn

$$2\eta_1 \omega_1 + 2\eta_2 \omega_2 + 2\eta_3 \omega_3$$

kann keine Periode sein.

Setzt man jetzt

$$2\bar{\omega}_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

so lassen sich unter der Voraussetzung, daſs zwischen den Perioden $2\bar{\omega}_k$ keine ganzzahlige homogene lineare Gleichung besteht:

$$2\mu_1\bar{\omega}_1 + 2\mu_2\bar{\omega}_2 + 2\mu_3\bar{\omega}_3 = 0,$$

in welchem Falle eine der Perioden linear von den zwei übrigen abhinge und durch zwei neue Perioden ganzzahlig auszudrücken wäre, unendlich viele ganze Zahlen $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ finden, für die

$$|\nu_1\alpha_1 + \nu_2\alpha_2 + \nu_3\alpha_3| \text{ und } |\nu_1\beta_1 + \nu_2\beta_2 + \nu_3\beta_3|$$

unendlich klein wird*), d. h. es gibt unendlich kleine Perioden. Doch weil solche bei der eindeutigen (oder auch endlich vieldeutigen) analytischen Function nicht vorkommen können, gibt es keine dreifach (und ebensowenig mehrfach) periodische eindeutige Functionen.

Ein Periodenpaar der *doppeltperiodischen Function*, durch welches alle Perioden ganzzahlig in der Form

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

auszudrücken sind, heiſst ein *primitives*, doch es gibt — wie wir wissen — unendlich viele dem Paare $(2\omega, 2\omega')$ *äquivalente Periodenpaare* $(2\varpi, 2\varpi')$, durch welche man dieselbe Gesammtheit von Stellen $w$ ganzzahlig ausdrücken kann. Dazu muſs nur

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

sein und die ganzen Zahlen $p$, $q$, $p'$, $q'$ haben die Bedingung

$$pq' - p'q = \pm 1$$

zu erfüllen.

Der nothwendig von Null verschiedene reelle Bestandtheil des Verhältnisses $\frac{\varpi'}{\varpi i}$ besitzt dasselbe Zeichen wie

$$(pq' - p'q)\,\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right),$$

daher können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, den weiteren Untersuchungen ein primitives Periodenpaar zu Grunde legen, bei welchem

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

positiv ist.

Man nennt zwei Werthe des Argumentes *congruent* oder *äquivalent*, wenn ihre Differenz $(x - x_0)$ eine Periode ist. Indem man aber die Differenz

$$x - x_0 = 2\xi\omega + 2\xi'\omega'$$

setzen kann, wo $\xi$ und $\xi'$ reell sind, und ferner

$$x - x_0 = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' + 2t\omega + 2t'\omega'$$

*) Siehe z. B. Koenigsberger: Elliptische Functionen 1. Bd. p. 363—367.

gilt, wenn $\mu$ und $\mu'$ ganze Zahlen sind und $t$ und $t'$ reelle Werthe zwischen Null und Eins (0 ein- und 1 ausgeschlossen) bedeuten, so erscheint jede Stelle $x$ einem Werthe aus der Gesammtheit von Stellen, die durch

$$x_0 + 2t\omega + 2t'\omega', \quad 0 \leq t < 1, \quad 0 \leq t' < 1$$

definirt sind, congruent.

Man nennt diese Gesammtheit von Stellen in dem Bereiche der Variabeln ein *Periodenparallelogramm.*

Die eindeutige Function $f(x)$ mit den primitiven Perioden $2\omega$ und $2\omega'$ nimmt offenbar jeden Werth, den sie überhaupt annimmt, in jedem Periodenparallelogramm an und weil sie unendlich werden mufs, besitzt sie gewifs unendlich viele Unendlichkeitsstellen und kann keinesfalls eine ganze Function sein. Da die Function $\frac{1}{f(x) - A}$ denselben Charakter hat wie $f(x)$, mufs $f(x)$ in dem Periodenparallelogramm jeden Werth annehmen und an jeder der Stelle $x_0$ congruenten Stelle $x_0 + w$ wird sie den Werth $f(x_0)$ in der gleichen Vielheit besitzen wie in $x_0$, denn es ist

$$f(x_0 + w + h) = f(x_0 + h)$$

und die Function $f(x)$ hat in der Umgebung von $x_0$ und $x_0 + w$ eine gleichartige Entwicklung.

Sind die singulären Stellen in dem Periodenparallelogramm nur aufserwesentlich singulär, so hat $f(x)$ die einzige wesentlich singuläre Stelle $\infty$ und ist durch den Quotienten ganzer Functionen $G_1(x)$ und $G_2(x)$ darstellbar. —

Wir wollen uns nur mit *solchen eindeutigen doppeltperiodischen Functionen* beschäftigen, *die sich im Endlichen durchaus wie eine rationale Function verhalten* und somit einen und denselben Werth nur an einer endlichen Anzahl von Stellen des Periodenparallelogrammes annehmen können.

Es handelt sich zunächst um die Aufstellung ihrer Ausdrücke. Nennt man noch *Grad* der doppeltperiodischen Function die ganze Zahl, welche die Anzahl der Unendlichkeitsstellen im Periodenparallelogramm, jede in der zugehörigen Ordnungszahl gezählt, angibt, so soll eine solche Function $m^{\text{ten}}$ Grades mit den Unendlichkeitsstellen

$$u_\mu + w \quad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

und den Nullstellen $v_\nu + w \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$ construirt werden.

Bezeichnet $g(u)$ eine ganze Function, so mufs jede eindeutige Function der verlangten Art in dem Ausdrucke

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2)\ldots\sigma(u - u_m)}{\sigma(u - v_1)\sigma(u - v_2)\ldots\sigma(u - v_n)} e^{g(u)}$$

enthalten sein — wo $\sigma(u)$ die in dem vorigen Capitel aufgestellte ganze Function mit den Nullstellen $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ bedeutet —, aber damit $\varphi(u)$ die primitiven Perioden $2\omega$ und $2\omega'$ besitze, oder die Gleichungen

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u) \quad \text{und} \quad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u)$$

gelten, müssen noch eine Reihe von Beziehungen bestehen, die mit Hilfe der bekannten Gleichungen:

$$\sigma(u-u_0+2\omega) = -e^{2\eta(u-u_0+\omega)}\sigma(u-u_0), \quad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

$$\sigma(u-u_0+2\omega') = -e^{2\eta'(u-u_0+\omega')}\sigma(u-u_0), \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

leicht zu finden sind. Es ist:

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u)(-1)^{m-n} e^{2\eta(u+\omega)(m-n) - 2\eta\left(\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu\right) + g(u+2\omega) - g(u)}$$

$$\varphi(u+2\omega') = \varphi(u)(-1)^{m-n} e^{2\eta'(u+\omega')(m-n) - 2\eta'\left(\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu\right) + g(u+2\omega') - g(u)}$$

und daher mufs man

$$m - n \equiv 0 \pmod 2$$

$$g(u+2\omega) - g(u) = -2\eta\left[(u+\omega)(m-n) - \sum_\mu u_\mu + \sum_\nu v_\nu\right] + 2k\pi i$$

$$g(u+2\omega') - g(u) = -2\eta'\left[(u+\omega')(m-n) - \sum_\mu u_\mu + \sum_\nu v_\nu\right] + 2k'\pi i$$

setzen, wo $k$ und $k'$ ganze Zahlen bezeichnen. Differentiirt man die letzten Gleichungen zweimal, so erhält man die Gleichungen

$$g''(u+2\omega) = g''(u), \quad g''(u+2\omega') = g''(u),$$

aus denen zu schliefsen ist, dafs die ganze Function $g''(x)$ nicht von $u$ abhängt oder eine Constante ist, denn sie kann als ganze Function von $u$ nicht doppeltperiodisch sein. Setzt man daher

$$g''(u) = \frac{d^2 g(u)}{du^2} = C,$$

so wird $g(u)$ von der Form:

$$g(u) = Au^2 + Bu + C$$

und

$$g(u+2\omega) - g(u) = 2A(u+\omega)2\omega + B2\omega$$
$$g(u+2\omega') - g(u) = 2A(u+\omega')2\omega' + B2\omega'.$$

Durch den Vergleich dieser Ausdrücke mit den früheren erhält man zunächst die Gleichungen:

$$2A\omega + (m-n)\eta = 0, \quad 2A\omega' + (m-n)\eta' = 0,$$

deren Determinante

$$2(\omega\eta' - \omega'\eta) = \mp \pi i$$

ist, je nachdem $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \gtrless 0$. Weil die Determinante nicht verschwindet, sind die Lösungen der Gleichungen

$$A = 0 \quad \text{und} \quad m - n = 0;$$

d. h. *die eindeutige doppeltperiodische Function, die im Endlichen den Charakter einer rationalen Function besitzt, wird in jedem Perioden-parallelogramm eben so oft Null als unendlich und hat daselbst jeden Werth in derjenigen Anzahl, welche der Grad anzeigt.*

Da auch die Gleichungen

$$B\omega - \eta \sum_{\mu=1}^{m} (u_\mu - v_\mu) = k\pi i$$

$$B\omega' - \eta' \sum_{\mu=1}^{m} (u_\mu - v_\mu) = k'\pi i$$

bestehen, findet man bei positivem $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$

$$B = 2k\eta' - 2k'\eta = 2\tilde{\eta} = 2\frac{\sigma'(k\omega' - k'\omega)}{\sigma(k\omega' - k'\omega)} = 2\frac{\sigma'(\varpi)}{\sigma(\varpi)}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} (u_\mu - v_\mu) = 2k\omega' - 2k'\omega = 2\varpi.$$

Setzt man endlich $e^C = c$, so erhält der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen doppeltperiodischen Function $m^{\text{ten}}$ Grades die Form

$$\varphi(u) = c \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\sigma(u - u_\mu)}{\sigma(u - v_\mu)} e^{2\tilde{\eta} u}$$

*und zwar ist die Summe der incongruenten Nullstellen* $\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu$ *der Summe der Unendlichkeitsstellen* $\sum_{\mu=1}^{m} v_\mu$ *congruent:*

$$\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu + 2\mu\omega + 2\mu'\omega' = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu + 2\varpi$$

und

$$\tilde{\eta} = 2\mu\eta + 2\mu'\eta'.$$

Man mufs aus dieser Beziehung folgern, dafs *eine eindeutige doppelt-periodische Function ersten Grades* nicht existirt.

Setzt man an Stelle $v_m$ $v_m + 2\varpi$ und für

$$\sigma(u - v_m) = \pm e^{2\tilde{\eta}(u - v_m - \varpi)} \sigma(u - v_m - 2\varpi),$$

so erhält $\varphi(u)$ die Gestalt:

$$\varphi(u) = C \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\sigma(u - u_\mu)}{\sigma(u - v_\mu)},$$

aber hierin mufs

$$\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu$$

sein. Man kann also $2m+1$ Gröfsen $v_\mu$, $u_\mu$, $C$ so bestimmen, dafs die doppeltperiodische Function $\varphi(u)$ $m^{\text{ten}}$ Grades in dieser letzten Form erscheint, doch ist dann die Summe der Gröfsen $v_\mu$ gleich der der Gröfsen $u_\mu$. Wenn umgekehrt die Gröfsen $u_\mu$, $v_\mu$ $(\mu = 1 \ldots m)$ die Gleichung $\sum_{\mu=1}^{m}(u_\mu - v_\mu) = 0$ erfüllen und niemals eine der Gröfsen $u_\mu$ einem $v_\nu$ congruent ist, so stellt

$$C \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\sigma(u-u_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)}$$

eine doppeltperiodische Function $m^{\text{ten}}$ Grades dar.

Bezeichnet $u_0$ eine den Gröfsen $u_\mu$ und $v_\mu$ incongruente Stelle, so kann man endlich

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)} = \prod_{\mu=1}^{\mu} \frac{\sigma(u-u_\mu)}{\sigma(u_0-u_\mu)} \, \frac{\sigma(u_0-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)}$$

setzen.

Da die doppeltperiodische Function $\varphi(u) + A$ dieselben Unendlichkeitsstellen $v_\mu$ besitzt wie $\varphi(u)$ und die $m$ Nullstellen $\bar{u}_\mu$ aus einem Periodenparallelogramme der Gleichung genügen:

$$\sum \bar{u}_\mu = \sum v_\mu + 2\varpi$$

und ferner die Summe der Werthe des Argumentes, für welche $\varphi(u) + A$ gleich $A$ ist, ebenfalls $\sum v_\mu$ congruent ist, so folgt, dafs die Summe derjenigen Werthe aus einem Periodenparallelogramme, für welche eine doppeltperiodische Function $m^{\text{ten}}$ Grades ein und denselben Werth annimmt, bis auf Perioden constant ist.

Läfst man in unseren Formeln $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ unendlich grofs werden, indefs $2\omega$ endlich und von Null verschieden bleibt, so wird aus $\varphi(u)$ eine eindeutige einfachperiodische Function hervorgehen, die im Endlichen den Charakter der rationalen Function besitzt. Berücksichtigt man, dafs $\sigma(u-u')$ in den Ausdruck

$$e^{\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{u-u'}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi(u-u')}{2\omega}$$

übergeht, so erhält man aus dem zuletzt angegebenen Ausdruck für $\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}$ die Function:

$$\prod_{\mu=1}^{m} \frac{\sin\frac{\pi(u-u_\mu)}{2\omega}}{\sin\frac{\pi(u_0-u_\mu)}{2\omega}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi(u_0-v_\mu)}{2\omega}}{\sin\frac{\pi(u-v_\mu)}{2\omega}}$$

oder

$$\prod_{\mu=1}^{m} \frac{e^{(u-u_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u-u_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}}}{e^{(u_0-u_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u_0-u_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}}} \cdot \frac{e^{(u_0-v_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u_0-v_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}}}{e^{(u-v_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u-v_\mu)\frac{\pi i}{2\omega}}},$$

die eine rationale Function der Exponentialfunction $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ ist. Aber eine rationale Function von $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, wird nicht aufhören, einfach periodisch zu sein, wenn sie im Endlichen nicht dieselbe Anzahl von Null und Unendlichkeitsstellen aufweist. Ihr Ausdruck lautet:

$$R\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right) = c\,\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{p}\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - e^{\frac{u_\mu \pi i}{\omega}}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{q}\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - e^{\frac{v_\mu \pi i}{\omega}}\right)}$$

und wenn man hierin

$$e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - e^{\frac{u'\pi i}{\omega}} = e^{(u+u')\frac{\pi i}{2\omega}}\left(e^{(u-u')\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u-u')\frac{\pi i}{2\omega}}\right)$$

setzt, geht die Form:

$$C e^{(p-q)\frac{\nu\pi i}{2\omega}} \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{p} \sin(u-u_\mu)\frac{\pi}{2\omega}}{\prod\limits_{\nu=1}^{q} \sin(u-v_\nu)\frac{\pi}{2\omega}}$$

hervor. Auch diese Function kann aus der doppeltperiodischen Function $\varphi(u)$ entspringen, wenn man nur zugleich mit $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ $m-p$ Nullstellen $u_\mu$ und $m-q$ Unendlichkeitsstellen in's Unendliche rücken läfst. In der That: zerlegt man $u'$ in

$$\xi 2\omega + \xi' 2\omega'$$

und schreibt

$$\frac{u'}{2\omega} = \xi + i\xi'\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right),$$

so ist ersichtlich, dafs bei dem genannten Übergange von einem Factor

$$\frac{e^{(u-u')\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u-u')\frac{\pi i}{2\omega}}}{e^{(u_0-u')\frac{\pi i}{2\omega}} - e^{-(u_0-u')\frac{\pi i}{2\omega}}}$$

als Grenzausdruck nur

$$e^{\pm(u_0 - u)\frac{\pi i}{2\omega}}$$

übrig bleibt und das allein ist hier nothwendig.

### § 59. Neue Definition der doppeltperiodischen Function $p(u)$. Darstellung jeder doppeltperiodischen Function durch $p(u)$ und die Ableitungen dieser Function.

Wir kehren zu den doppeltperiodischen Functionen zurück.

Ist von den $(n+1)$ Gröſsen

$$u_1, u_2, \ldots u_n, (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

keine der Null congruent und sind von den ersten $n$ keine zwei einander äquivalent, so ist nach den früheren Sätzen

$$\psi(u, u_1, u_2, \ldots u_n) = C_n \frac{\sigma(u + u_1 + \cdots + u_n) \prod_{\nu=1}^{n} \sigma(u - u_\nu)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

eine doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Unendlichkeitsstellen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ und den Nullstellen erster Ordnung $u_\nu + w$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ und $-(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + w$.

Speciell hat die doppeltperiodische Function zweiten Grades mit den zweifachen Unendlichkeitsstellen $w$ die Gestalt:

$$\psi(u, u_1) = C_1 \frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)}{\sigma^2(u)},$$

wo $u_1$ der Null inäquivalent sein muſs. Verfügt man über die Constante $C_1$ derart, daſs die Entwicklung von $\psi(u, u_1)$ in der Umgebung der Stelle $u = 0$ mit dem Gliede $\frac{1}{u^2}$ beginnt, setzt also $C_1 = -\frac{1}{\sigma^2(u_1)}$, so hat die entstehende Function

$$\overline{\psi}(u, u_1) = -\frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)}{\sigma^2(u) \cdot \sigma^2(u_1)}$$

die Eigenthümlichkeit, von der uns schon bekannten doppeltperiodischen Function

$$-\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu, \mu'}{}' \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

höchstens um eine ganze Function abweichen zu können, weil die Differenz $p(u) - \overline{\psi}(u, u_1)$ im Endlichen nicht unendlich wird. Diese ganze Function muſs aber eine Constante sein, weil $p(u) - \overline{\psi}(u, u_1)$ doppeltperiodisch ist und zwar ist ihr Werth $p(u_1)$, denn $p(u) - p(u_1)$ verschwindet ebenso wie $\overline{\psi}(u, u_1)$ an den Stellen $+u_1, -u_1$. Daher besteht die Formel

$$p(u) - p(u_1) = -\frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u_1)}.$$

Zufolge dieser ist die doppeltperiodische Function mit der zweifachen Unendlichkeitsstelle $u = -v$ und den Nullstellen $u_1$ und $(u_1 - 2v)$ durch den nachstehenden Ausdruck definirt:

$$c(p(u+v) - p(u_1+v)) = c\,\frac{\sigma(u_1-u)\,\sigma(u_1+2v+u)}{\sigma^2(v+u)\cdot\sigma^2(v+u_1)}\,.$$

Differentiirt man die vorletzte Gleichung logarithmisch nach $u$ respective $u_1$, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)} + \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - 2\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{p'(u)}{p(u)-p(u_1)}$$
$$\frac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)} - \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - 2\frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)} = \frac{-p'(u_1)}{p(u)-p(u_1)}$$

und darnach ist:

$$\frac{\sigma'(u\pm u_1)}{\sigma(u\pm u_1)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \pm\frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)} + \frac{1}{2}\,\frac{p'(u)\mp p'(u_1)}{p(u)-p(u_1)}.$$

Die links stehende Function ist zugleich mit der rechts eine doppeltperiodische Function von $u$.

Bezeichnet man die Differenz $\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ mit $S(u,v)$, so mufs nun die Determinante $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & S(u_0,v_0) & \cdots & S(u_0,v_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & S(u_n,v_0) & \cdots & S(u_n,v_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{\sigma'(u_0+v_0)}{\sigma(u_0+v_0)} & \cdots & \frac{\sigma'(u_0+v_n)}{\sigma(u_0+v_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{\sigma'(u_n+v_0)}{\sigma(u_n+v_0)} & \cdots & \frac{\sigma'(u_n+v_n)}{\sigma(u_n+v_n)} \end{vmatrix}$$

eine doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von $u_0$ sein, deren einfache Unendlichkeits- und Nullstellen

$$u_0 = -v_0, -v_1, \cdots -v_n$$
$$u_0 = u_1, u_2, \cdots u_n, -\left(v_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(u_\nu + v_\nu)\right)$$

sind, auf dafs man

$$-R = C_n\,\frac{\sigma(u_0+v_0+u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n)\prod_{\nu=1}^{n}\sigma(u_0-u_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n}\sigma(u_0+v_\nu)}$$

setzen darf, wenn $C_n$ eine von $u_0$ unabhängige Constante bedeutet*). Doch weil die Determinante ebenso eine doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades aller übrigen Argumente $u_1, u_2, \ldots u_n$ und $v_0, v_1 \ldots v_n$ ist, mufs dieselbe die Form

*) Vergleiche Frobenius und Stickelberger in Borchardt's Journal Bd. 83.

$$\frac{\sigma(u_0+v_0+\cdots+u_n+v_n)\prod\limits_{\lambda,\mu}\sigma(u_\lambda-u_\mu)\prod\limits_{\lambda,\mu}\sigma(v_\lambda-v_\mu)}{\prod\limits_{\lambda,\mu}\sigma(u_\lambda+v_\mu)} = \Phi(u_0, v_0, \dots u_n, v_n)$$

annehmen, wobei die in dem Zähler stehenden Producte nur über diejenigen Factoren $\sigma(u_\lambda - u_\mu)$ und $\sigma(v_\lambda - v_\mu)$ auszudehnen sind, in welchen $\lambda < \mu$, indeſs im Zähler alle $(n+1)^2$ Factoren $\sigma(\mu_\lambda + v_\mu)$ $(\lambda, \mu = 0, 1, 2 \dots n)$ stehen. Die Determinante $-R$ ist aber gerade gleich dem letzten Ausdruck, d. h. es kommt jetzt keine Constante mehr hinzu. Für $n = 0$ ist das unmittelbar zu ersehen und allgemein läſst sich diese Behauptung durch den Schluſs von $n$ auf $n+1$ beweisen. Multiplicirt man nämlich die letzte Zeile der Determinante mit $u_n + v_n$ und setzt hierauf $u_n = -v_n$, so verschwinden alle Glieder bis auf das letzte

$$(u_n + v_n)\,\frac{\sigma'(u_n+v_n)}{\sigma(u_n+v_n)},$$

welches für $u_n = -v_n$ den Werth 1 annimmt, da die Entwicklung von $\sigma(u)$ nach Potenzen von $u$ mit dem Gliede $u$ beginnt. Die Determinante geht also in die entsprechende mit den $2n$ Argumenten $u_0, v_0, \dots u_{n-1}, v_{n-1}$ über. Setzt man auch in dem $-R$ angeblich äquivalenten Ausdruck, nachdem er mit $u_n + v_n$ multiplicirt ist, $u_n = -v_n$ und bemerkt die Beziehungen:

$$\frac{\sigma(u_n - u_\mu)\cdot\sigma(v_n - v_\mu)}{\sigma(u_n + u_\mu)\cdot\sigma(v_n + v_\mu)} = 1 \quad (\mu = 0, 1, 2 \dots n-1)$$

und

$$\lim \frac{u_n + v_n}{\sigma(u_n + v_n)} = 1,$$

derentwegen dieser Ausdruck ebenfalls in den analog aus den Argumenten $u_0, v_0, \dots u_{n-1}, v_{n-1}$ gebildeten übergeht, so erscheint der Beweis erbracht. —

Schlieſslich kann man die doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $\Phi$ noch rational durch die Function $p$ und deren erste Ableitung $p'$ ausdrücken, denn es ist offenbar auch

$$-R = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\frac{p'(u_0)-p'(v_0)}{p(u_0)-p(v_0)} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{p'(u_0)-p'(v_n)}{p(u)-p(v)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2}\frac{p'(u_n)-p'(v_0)}{p(u_n)-p(v_0)} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{p'(u_n)-p'(v_n)}{p(u_n)-p(v_n)} \end{vmatrix}.$$

Da man aber der doppeltperiodischen Function zweiten Grades mit den zwei Unendlichkeitsstellen $-v_0$ und $-v_1$ und den Nullstellen $u_1$ und $-(v_0 + u_1 + v_1)$ die Gestalt

$$c\,\frac{p\left(u+\frac{v_0+v_1}{2}\right)-p\left(u_1+\frac{v_0+v_1}{2}\right)}{p\left(u+\frac{v_0+v_1}{2}\right)-p\left(-v_0+\frac{v_0+v_1}{2}\right)}$$

geben kann, indefs dieselbe Function hier in der Form

$$C\left[\left(\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v_0)}{p(u)-p(v_0)}-\frac{1}{2}\frac{p'(u_1)-p'(v_0)}{p(u_1)-p(v_0)}\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v_1)}{p(u)-p(v_1)}-\frac{1}{2}\frac{p'(u_1)-p'(v_1)}{p(u_1)-p(v_1)}\right)\right]$$

erscheint, werden wir gewahr, dafs die Function $p(u+v)$ nothwendig durch $p(u)$, $p(v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ darstellbar ist; doch darauf richten wir erst späterhin unsere Aufmerksamkeit.

Vorderhand interessirt es uns, auch die zu Beginn dieses Paragraphen aufgestellte doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Unendlichkeitsstellen $w$ $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung rational durch $p(u)$ und $p'(u)$ auszudrücken. Wenngleich man zu diesem Zwecke in der früheren Determinante $R$ die Stellen $-v_0$, $-v_1, \ldots -v_n$ alle nach der Stelle Null zusammenrücken lassen könnte, wollen wir, anstatt diesen Grenzübergang zu bewerkstelligen, direct die doppeltperiodische Function:

$$\varphi(u, u_1, \ldots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \cdots p^{(n-1)}(u) \\ 1 & p(u_1) & p'(u_1) \cdots p^{(n-1)}(u_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & p(u_n) & p'(u_n) \cdots p^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

mit den Unendlichkeitsstellen $w$ der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung und den Nullstellen

$$u_1,\ u_2, \ldots u_n \text{ und } -(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$

mit der Function

$$\psi(u,\ u_1, \ldots u_n) = \frac{\sigma(u+u_1+\cdots+u_n)\prod_{\nu=1}^{n}\sigma(u-u_\nu)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

vergleichen.

Der Quotient beider kann nur eine von $u$ unabhängige Constante $C_n$ sein, doch weil die Entwicklung von $\varphi$ in der Umgebung von $u=0$ mit dem Gliede

$$(-1)^{2n-1}\frac{n!}{u^{n+1}}\varphi(u_1,\ u_2, \ldots u_n),$$

diejenige von $\psi(u,\ u_1, \ldots u_n)$ mit

$$(-1)^n\sigma(u_1+u_2+\cdots+u_n)\,\sigma(u_1)\,\sigma(u_1)\ldots\sigma(u_n)\,\frac{1}{u^{n+1}}$$

beginnt, mufs

$$-C_n = \frac{(-1)^n\, n!\,\varphi(u_1,\ u_2, \ldots u_n)}{\sigma(u_1+u_2+\cdots+u_n)\,\sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\ldots\sigma(u_n)}$$

sein. Bildet man successive:

$$\varphi(u, u_1) = \begin{vmatrix} 1 & p(u) \\ 1 & p(u) \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u_1)},$$

$$\varphi(u, u_1, u_2) = -1!\,2!\,\frac{\sigma(u+u_1+u_2)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^3(u)\,\sigma^3(u_1)\,\sigma^3(u_2)},$$

$$\varphi(u, u_1, u_2, u_3) =$$

$$= 1!\,2!\,3!\,\frac{\sigma(u+u_1+u_2+u_3)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_2-u_3)}{\sigma^4(u)\,\sigma^4(u_1)\,\sigma^4(u_2)\,\sigma^4(u_3)}$$

usw., so folgt durch den Schlufs von $n$ auf $n+1$

$$\varphi(u, u_1, u_2, \ldots u_n) =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,1!\,2!\ldots n!\,\frac{\sigma(u+u_1+u_2+\cdots+u_n)\prod_{\nu=1}^{n}\sigma(u-u_\nu)\cdot\prod_{\lambda,\mu}\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}(u)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\sigma^{n+1}(u_\nu)}$$

wo wieder $\lambda < \mu$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$ sein mufs.

Sind nicht allein die Gröfsen

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \quad (u_1 + u_2, + \cdots + u_n),$$

sondern auch

$$v_1, v_2, \ldots v_n, \quad (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

$(n+1)$ der Null inäquivalente Gröfsen und werden die Differenzen

$$u_\lambda - u_\mu, \quad u_\lambda - v_\mu, \quad v_\lambda - v_\mu$$

nicht zu Perioden, so ist der Quotient

$$C\,\frac{\varphi(u, u_1, \ldots u_n)}{\varphi(v, v_1, \ldots v_n)} = \varphi(u)$$

eine doppeltperiodische Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Nullstellen

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \; -(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

und den Unendlichkeitsstellen

$$v_1, v_2, \ldots v_n, \; -(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

und $\varphi(u)$ kann als rationale Function von $p(u)$ und deren $(n-1)$ ersten Ableitungen dargestellt werden*). Die doppeltperiodische Function zweiten Grades mit den einfachen Null- und Unendlichkeitsstellen $u_1$ und $-u_1$ respective $v_1$ und $-v_1$ erscheint aber wieder als lineare Function von $p(u)$ allein:

$$C\,\frac{p(u) - p(u_1)}{p(u) - p(v_1)}$$

und wir erschliefsen, dafs $p(u)$ und $p'(u)$ in einer algebraischen Beziehung stehen, was ja auch nöthig ist, damit die Darstellungen von

$$C\,\frac{\varphi(u, u_1, u_2, \ldots u_n)}{\varphi(u, v_1, v_2, \ldots v_n)} \quad \text{und} \quad \Phi(u, \bar{v}_0, u_1, \bar{v}_1, \ldots u_n, \bar{v}_n)$$

*) Formeln und Lehrsätze § 14.

für $\overline{v}_\nu = -v_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ und $\overline{v}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu$ übereinkommen können. Man mufs die Ableitungen $p^{(\nu)}(u)$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ als rationale Functionen von $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken können.

Bevor wir hierauf eingehen, besprechen wir noch eine weitere Darstellung jeder eindeutigen doppeltperiodischen Function

$$\varphi(u) = C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma(u-u_\nu)}{\sigma(u-v_\nu)}.$$

Nehmen wir an, dafs $\varphi(u)$ nur an $m$ von einander verschiedenen und incongruenten Stellen $v_1, v_2, \ldots v_m$ unendlich werde und da in den Ordnungen

$$n_1, n_2, \ldots n_m,$$

worauf $\sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n$ ist, und lautet die Entwicklung in der Umgebung von $v_\mu$

$$\frac{C_\mu^{(n_\mu)}}{(u-v_\mu)^{n_\mu}} + \cdots + \frac{C_\mu^{(1)}}{(u-v_\mu)} + \mathfrak{P}(u-v_\mu),$$

so setze man

$$\varphi(u, v_\mu) = C_\mu^{(1)} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)} - \frac{1}{1!} C_\mu^{(2)} \frac{d}{du} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n_\mu - 1} \frac{d^{n_\mu - 1}}{du^{n_\mu - 1}} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)},$$

dann kann die Differenz

$$\varphi(u) - \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(u, v_\mu)$$

im Endlichen nirgends unendlich werden und ist einer ganzen Function $g(u)$ gleich zu setzen. Weil aber:

$$\frac{d}{du}\left(\varphi(u) - \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(u, v_\mu)\right) = \varphi'(u) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n_\mu} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} C_\mu^{(\lambda)} p^{(\lambda-1)}(u-v_\mu)$$

eine doppeltperiodische Function ist, kann $g'(u)$ nur eine Constante $C_1$ und $g(u) = C_1 u + C$ sein. Setzt man nun in der Gleichung

$$\varphi(u) - \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(u, v_\mu) - (C_1 u + C) = 0$$

an Stelle von $u$ $u + 2\omega$ und dann $u + 2\omega'$, so erhält man mit Rücksicht auf die schon abgeleitete Beziehung

$$\frac{\sigma'(u+2\overline{\omega})}{\sigma(u+2\overline{\omega})} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\widetilde{\eta} \quad (\overline{\omega} = p\omega + q\omega', \ \widetilde{\eta} = p\eta + q\eta')$$

die Relationen

$$2\eta \sum_{\mu=1}^{m} C_\mu^{(1)} - 2\omega\, C_1 = 0, \quad 2\eta' \sum_{\mu=1}^{m} C_\mu^{(1)} - 2\omega' C_1 = 0,$$

und weil die Determinante dieser Gleichungen nicht Null ist, hat man

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_1^{(1)} + C_2^{(1)} + \cdots + C_m^{(1)} = 0.$$

Dann aber besteht die Formel:

$$\varphi(u) = C + \sum_{\mu=1}^{m} C_\mu^{(1)} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)} + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n_\mu - 1} \frac{(-1)^\lambda C_\mu^{(\lambda)}}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{d u^\lambda} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)}\,^{*)}$$

und wenn speciell $\varphi(u)$ an der Stelle $u = 0$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich ist, wird $C_1 = 0$ und

$$\varphi(u) = C + C^{(2)} p(u) - \frac{C^{(3)}}{2!} p'(u) + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} C^{(n)} p^{(n-2)}(u)$$
$$= a_0 + a_2\, p(u) + a_3\, p'(u) + \cdots + a_n p^{(n-2)}(u),$$

wo man über die Constanten derart verfügen kann, dafs $\varphi(u)$ an $(n-1)$ vorgegebenen Stellen $u_\nu$ verschwindet. Die letzte $n^{\text{te}}$ Nullstelle geht dann aus der Gleichung

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$$

hervor.

## § 60. Gleichung zwischen $p(u)$ und $p'(u)$.

Um zu erkennen, in welcher Beziehung $p(u)$ und $p'(u)$ zu einander stehen**), stellen wir die doppeltperiodische Function dritten Grades $p'(u)$ mit der dreifachen Unendlichkeitsstelle $u = 0$ und den Nullstellen $u = \omega, \omega', -(\omega + \omega')$ durch die Function $\sigma(u)$ dar. Weil das Anfangsglied der Entwicklung von $p'(u)$ um die Stelle $u = 0$ $-\frac{2}{u^3}$ ist, hat man

$$p'(u) = -2 \frac{\sigma(\omega + \omega' + u)\, \sigma(u - \omega)\, \sigma(u - \omega')}{\sigma^3(u)\, \sigma(\omega)\, \sigma(\omega')\, \sigma(\omega + \omega')},$$

doch weil $p'(u)$ eine ungerade Function ist, gilt auch

$$-p'(-u) = p'(u) = -2 \frac{\sigma(\omega + \omega' - u)\, \sigma(u + \omega)\, \sigma(u + \omega')}{\sigma^3(u)\, \sigma(\omega)\, \sigma(\omega')\, \sigma(\omega + \omega')}.$$

Bezeichnet man $\omega + \omega'$ mit $\omega''$, so gibt die Multiplication der beiden Ausdrücke für $p'(u)$ die Gleichung

$$(p'(u))^2 = 4 \frac{\sigma(\omega + u)\, \sigma(\omega - u)}{\sigma^2(u)\, \sigma^2(\omega)} \cdot \frac{\sigma(\omega'' + u)\, \sigma(\omega'' - u)}{\sigma^2(u)\, \sigma^2(\omega'')} \cdot \frac{\sigma(\omega' + u)\, \sigma(\omega' - u)}{\sigma^2(u)\, \sigma^2(\omega')}$$

oder

$$(p'(u))^2 = 4\, (p(u) - p(\omega))\, (p(u) - p(\omega''))\, (p(u) - p(\omega')).$$

---

*) Kiepert l. c. p. 25.

**) Kiepert l. c. p. 24.

Schreibt man für

$$p(\omega) = e_1, \quad p(\omega'') = e_2, \quad p(\omega') = e_3,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{g_1}{4}, \quad e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{g_3}{4},$$

so erhält die letzte Gleichung die Gestalt:

$$(p'(u))^2 = 4(p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3)$$

$$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_1 p^2(u) - g_2 p(u) - g_3.$$

Die Coefficienten $g_1$, $g_2$, $g_3$ können wir berechnen, indem wir $p(u)$ und $p'(u)$ mit Hilfe der Darstellungen

$$p(u) = \frac{1}{u_2} + \sum_{\mu, \mu'}{}' \left( \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right), \quad p'(u) = -2 \sum_{\mu, \mu'} \frac{1}{(u-w)^3}$$

in der Umgebung der Stelle $u = 0$ nach Potenzen von $u$ entwickeln, die so zu gewinnenden Reihen in der letzten Gleichung einsetzen und die gleichnamigen Coefficienten vergleichen.

Bildet man

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left( \frac{1}{w^2 \left(1 - \frac{u}{w}\right)^2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu, \mu'}{}' \left( \frac{2}{w^2} \frac{u}{w} + \frac{3}{w^2} \left(\frac{u}{w}\right)^2 + \frac{4}{w^2} \left(\frac{u}{w}\right)^3 + \cdots \right)$$

und beachtet, dafs die unbedingt convergenten Summen

$$\sum_{\mu, \mu'}{}' \frac{1}{w^{2\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

verschwinden, und bezeichnet man die Summe $\sum_{\mu, \mu'}{}' \frac{1}{w^{2\nu}}$ mit $c_\nu$, so folgt

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) c_\nu u^{2\nu-2}$$

und darum wird

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (2\nu - 1)(\nu - 1) c_\nu u^{2\nu-3}$$

$$p^2(u) = \frac{1}{u^4} + 6c_2 + 10c_3 u^2 + (14c_4 + 9c_2^2) u^4 + \cdots$$

$$p^3(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{9c_2}{u^4} + 15c_3 + (21c_4 + 27c_2^2) u^2 + \cdots$$

$$(p'(u))^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{24c_2}{u^2} - 80c_3 - (168c_4 - 12c_2^2) u^2 + \cdots.$$

Dann aber ergeben sich die Beziehungen:

$$g_1 = 0, \quad -24c_2 = 36c_2 - g_2, \quad -80c_3 = 60c_3 - g_3$$

oder

$$g_1 = 4(e_1 + e_2 + e_3) = 4(p(\omega) + p(\omega'') + p(\omega')) = 0$$
$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 60 \sum_{u,\mu'}' \frac{1}{w^4}$$
$$g_3 = 4 e_1 e_2 e_3 = 140 \sum_{\mu,\mu'}' \frac{1}{w^6}$$

und alle übrigen Gröfsen

$$c_\nu = \sum_{\mu,\mu'}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^{2\nu}} \quad (\nu = 4, 5, 6 \ldots)$$

werden ganze Functionen von $g_2$ und $g_3$ oder $c_2$ und $c_3$.

Die verlangte Gleichung zwischen $p(u)$ und $p'(u)$ lautet jetzt

$$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3.$$

Doch damit wird

$$p''(u) = 6p^2(u) - \tfrac{1}{2} g_2, \quad p^{(3)}(u) = 12 p(u) p'(u),$$
$$p^{(4)}(u) = 120 p^3(u) - 18 g_2 p(u) - 12 g_3,$$
$$p^{(5)}(u) = (360 p^2(u) - 18 g_2)\, p(u)$$

usw. Allgemein ist jede gerade Ableitung $p^{(2\nu)}(u)$ eine ganze Function von $p(u)$ allein $G(p(u))$, hingegen $p^{(2\nu+1)}(u)$ hat die Gestalt $G'(p) . p'(u)$, denn der Schlufs von $n$ auf $(n+1)$ gibt in der That:

$$p^{(2\nu+2)}(u) = G''(p)(4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3) + G'(p)(6p^2(u) - \tfrac{1}{2} g_2) = G_1(p)$$
$$p^{(2\nu+3)}(u) = G_1'(p) . p'(u).$$

Jetzt läfst sich mit Rücksicht auf die Entwicklungen des vorigen Paragraphen der allgemeine Satz aussprechen:

*Jede zu einem Periodenpaare* $(2\omega, 2\omega')$ *gehörige eindeutige doppeltperiodische Function* $\varphi(u)$, *die im Endlichen vom Charakter der rationalen Function ist, läfst sich rational durch die zu demselben Periodenpaare gehörende Function* $p(u)$ *und deren erste Ableitung* $p'(u)$ *ausdrücken.*

Wenn $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ rationale Functionen von $p(u)$ und $p'(u)$ sind:

$$\varphi(u) = R_1(p(u), p'(u)), \quad \varphi'(u) = R_2(p(u), p'(u)),$$

mufs auch eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\frac{d\varphi(u)}{du}$ bestehen, denn die Elimination von $p(u)$ und $p'(u)$ aus den Ausdrücken für $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ liefert eine solche Gleichung

$$G\left(\frac{d\varphi}{du}, \varphi\right) = 0.$$

## § 61. Differentialgleichung für die doppeltperiodische Function zweiten Grades.

Es soll speciell die Differentialgleichung $G\left(\frac{d\varphi}{du}, \varphi\right) = 0$ ermittelt werden, welcher jede doppeltperiodische Function $\varphi$ zweiten Grades genügt.

Hat $\varphi$ die Unendlichkeitsstellen erster Ordnung

$$u = v + 2\mu\omega + 2\mu'\omega',$$

so läfst sich $\varphi$ in einer endlichen Umgebung der Stelle $u = v$ in der Form

$$\varphi = \frac{a}{u-v} + \mathfrak{P}(u-v) = \frac{a}{u-v}\mathfrak{P}_1(u-v)$$

darstellen und in dem Convergenzbereiche von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_1$ wird

$$\frac{d\varphi}{du} = -\frac{a}{(u-v)^2} + \mathfrak{P}'(u-v).$$

Entlehnt man der ersten Gleichung oder vielmehr der Gleichung

$$\frac{a}{\varphi} = (u-v)\mathfrak{P}_1^{-1}(u-v)$$

eine Darstellung von $(u-v)$ in der Umgebung der Stelle $\varphi = \infty$:

$$(u-v) = \frac{1}{\varphi}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

so erhält $\frac{d\varphi}{du}$, als Function von $\varphi$ aufgefafst, die Form

$$\frac{d\varphi}{du} = a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{\varphi^\nu}.$$

Gibt man nun $\varphi$ einen Werth $\varphi_0$, so sind die unendlich vielen zugehörigen Werthe des Argumentes $u$ entweder congruent oder es ist die Summe irgend zweier incongruenter Werthe $u_1$ und $u_2$ bis auf eine Periode $w$ constant gleich $2c$. Aus der Congruenz

$$u_1 + u_2 \equiv 2c$$

folgt aber

$$\frac{du_1}{d\varphi} = -\frac{du_2}{d\varphi}$$

und man erkennt, dafs $\frac{d\varphi}{du}$ als Function von $\varphi$ nur zweideutig und $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2$ eindeutig ist. Da aber die Ableitung einer eindeutigen Function $\varphi$, die im Endlichen nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt, nur mit $\varphi$ selbst unendlich wird, mufs $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2$ eine ganze Function von $\varphi$ sein und in der Entwicklung

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = A\varphi^4 + 4B\varphi^3 + 6C\varphi^2 + 4D\varphi + E + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\varphi^\nu}$$

sind alle Coefficienten $B_\nu$ Null zu setzen. Die Differentialgleichung, der $\varphi$ genügt, lautet daher:

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = A\varphi^4 + 4B\varphi^3 + 6C\varphi^2 + 4D\varphi + E$$

oder

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = A(\varphi - a_1)(\varphi - a_2)(\varphi - a_3)(\varphi - a_4).$$

Besitzt die Function $\varphi$ nur Unendlichkeitsstellen zweiter Ordnung $v + w$, so hat man

$$\varphi = \frac{a}{(u-v)^2} + \mathfrak{P}(u-v),$$

aber niemals

$$\varphi = \frac{a}{(u-v)^2} + \frac{b}{(u-v)} + \mathfrak{P}(u-v)$$

anzusetzen, denn nach dem Früheren hat ja $\varphi(u)$ die Gestalt

$$a_0 + a_2 p(u-v).$$

Entwickelt man $u - v$ nach steigenden Potenzen von $(\varphi^{-\frac{1}{2}})$:

$$u - v = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\right),$$

so bekömmt die Ableitung

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{-2a}{(u-v)^3} + \mathfrak{P}'(u-v)$$

als Function von $\varphi$ die Form:

$$\frac{d\varphi}{du} = a_3\varphi^{\frac{3}{2}} + a_2\varphi^{\frac{2}{2}} + a_1\varphi^{\frac{1}{2}} + a_0 + \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Doch weil

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = A\varphi^3 + 3B\varphi^2 + 3C\varphi + D + \cdots$$

wieder eine eindeutige und ganze Function von $\varphi$ ist, wird die Differentialgleichung lauten:

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = A\varphi^3 + 3B\varphi^2 + 3C\varphi + D = A(\varphi - e_1)(\varphi - e_2)(\varphi - e_3).$$

Es handelt sich nun darum, die Bedeutung der Gröfsen $a_1, a_2, a_3, a_4$ beziehungsweise $e_1, e_2, e_3$ zu ergründen.

Ist die Summe zweier zu demselben Functionswerthe $\varphi$ gehöriger inäquivalenter Argumentswerthe $u$ bis auf eine Periode $2c$, so wird

$$\varphi'(u) = -\varphi'(2c - u),$$

d. h. die Ableitungen haben an den Stellen $u$ und $2c - u$ entgegengesetzte Werthe. Nimmt man an, dafs $\varphi$ nur Unendlichkeitsstellen erster Ordnung besitzt, so mufs $\varphi'(u)$ an der Stelle $u = c$ endlich sein, denn andernfalls hätte $\varphi(u)$ die Unendlichkeitsstellen $u = c + w$ zweiter Ordnung. Man mufs dann wegen der Gleichungen

$$\varphi'(c) = \varphi'(c) \quad \text{und} \quad \varphi'(c) = -\varphi'(c)$$

$\varphi'(c) = 0$ setzen und erfährt, dafs einer der Werthe $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ $\varphi(c)$ ist.

Gibt man $u$ die Werthe $c+\omega$, $c+\omega'$, $c+\omega''$, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi'(c+\omega) &= -\varphi'(c-\omega) = -\varphi'(c+\omega)\\ \varphi'(c+\omega') &= -\varphi'(c-\omega') = -\varphi'(c+\omega')\\ \varphi'(c+\omega'') &= -\varphi'(c-\omega'') = -\varphi'(c+\omega''),\end{aligned}$$

aus welchen man erschliefst, dafs $\varphi'(u)$ an den Stellen

$$u = c+\omega,\ c+\omega',\ c+\omega''$$

verschwindet, und weil die Summe je zweier der vier gefundenen Werthe für $u$ der Gröfse $2c$ inäquivalent ist, sind die zugehörigen Functionswerthe von einander verschieden und somit sind die Gröfsen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ nichts anderes als die Functionalwerthe

$$\varphi(c),\quad \varphi(c+\omega),\quad \varphi(c+\omega'),\quad \varphi(c+\omega'').$$

Man schreibt daher

$$\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)^2 = A(\varphi(u)-\varphi(c))(\varphi(u)-\varphi(c+\omega))(\varphi(u)-\varphi(c+\omega''))(\varphi(u)-\varphi(c+\omega'))$$

und desgleichen gilt

$$\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)^2 = A(\varphi(u)-\varphi(c+\omega))(\varphi(u)-\varphi(c+\omega''))(\varphi(u)-\varphi(c+\omega')),$$

wenn $\varphi(u)$ nur aufserwentlich singuläre Stellen zweiter Ordnung besitzt.*)

Diese Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = G(\varphi)$$

dienen nebst einer Anfangsbedingung, welche einem beliebigen Werthe

---

*) Die doppeltperiodische Function $n^{\text{ten}}$ Grades mit den einfachen Unendlichkeitsstellen

$$v_1,\ v_2,\ \ldots v_n$$

in einem Periodenparallelogramm läfst daselbst die Darstellung

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{u-v_\nu} + \Phi(u)$$

zu, wenn $\Phi(u)$ in dem Parallelogramm regulären Verhaltens ist, dieselben Schlufsweisen wie früher und die Bemerkung, dafs die elementaren symmetrischen Functionen von $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=v_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ eindeutige ganze Functionen $f(\varphi)$ von nicht höherem Grade als dem $2^{\text{ten}}$, $4^{\text{ten}}$ und dem $2n^{\text{ten}}$ sind, läfst wieder erkennen, dafs $\varphi$ einer Differentialgleichung erster Ordnung und $n^{\text{ten}}$ Grades genügt:

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^n - f_2(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} f_{2n-2}(\varphi)\frac{d\varphi}{du} + (-1)^n f_{2n}(\varphi) = 0,$$

wo die Indices der Functionen $f(\varphi)$ die höchst möglichen Gradzahlen anzeigen.

von $u$ einen von den Nullstellen der ganzen Function $G(\varphi)$ verschiedenen Functionalwerth willkürlich zuordnet, zur Definition der doppeltperiodischen Function zweiten Grades. Weil jede solche Function als lineare Function von $p(u)$ oder $p(u+v)$ darstellbar war, wo $v$ eine Constante ist, kann man die genannten Differentialgleichungen durch lineare Substitutionen ineinander transformiren und speciell die eine untersuchen, welcher $p(u)$ genügt.

Wir wollen daher die Frage, was die doppeltperiodische Function zweiten Grades $\varphi(u)$ für eine Beschaffenheit erhält, wenn zwei Wurzeln der Gleichung $G(\varphi)=0$ einander gleich werden, dahin specialisiren, dafs wir nur die Beschaffenheit von $p(u)$ erforschen, wenn die Gleichung

$$G(p) = 4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3) = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat. Da aber $e_1 = p(\omega)$, $e_2 = p(\omega'')$, $e_3 = p(\omega')$ ist, kann die Gleichheit zweier Wurzeln $e_\lambda$ nur ein besonderes Verhältnis der Perioden $2\omega$ und $2\omega'$ nach sich ziehen.

Es liegt nahe zunächst festzusetzen, dafs $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ unendlich wird, während $\omega$ von Null verschieden ist. Weil dann

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u$$

ist, wird

$$-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = p(u) = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2$$

$$p'(u) = -2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^3\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}$$

d. h. $p(u)$ und seine Ableitungen sind nur mehr einfachperiodische Functionen.

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung

$$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

so erhält man die Beziehungen:

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4, \quad g_3 = \frac{8}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6$$

und somit

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9}{2}\frac{g_3}{g_2}, \quad g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 = 0.$$

Es müssen daher zwei Wurzeln $e_\lambda$ einander gleich sein, und zwar hat man:

$$p(\omega) = e_1 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = 3\frac{g_3}{g_2}$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{3}{2}\frac{g_3}{g_2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2$$

zu setzen. Umgekehrt erfordert auch die Gleichheit der Lösungen $e_2$ und $e_3$, dafs die doppeltperiodische Function in eine einfachperiodische übergeht.

Sind gar alle drei Wurzeln $e_\lambda$ einander gleich, so folgt wegen der Gleichung $e_1 + e_2 + e_3' = 0$

$$e_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0,$$

und der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dp(u)}{du}\right)^2 = 4p^3(u)$$

genügt die rationale Function

$$p(u) = \frac{1}{u^2},$$

wenn dem Werthe $u = 0$ $p(u) = \infty$ zugeordnet wird.

## § 61. Additionstheorem der doppeltperiodischen Functionen.

Um die früher erwähnte Darstellung von $p(u+v)$ durch $p(u)$, $p(v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ zu vollziehen, beachte man, dafs die doppeltperiodische Function dritten Grades:

$$\varphi(u, u_1, u_2) = \begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \\ 1 & p(u_1) & p'(u_1) \\ 1 & p(u_2) & p'(u_2) \end{vmatrix}$$
$$= -2\frac{\sigma(u+u_1+u_2)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^3(u)\,\sigma^3(u_1)\,\sigma^3(u_2)}$$

für $u = -(u_1 + u_2)$ verschwindet und daher die Gleichung;

$$p'(u_1+u_2)\big(p(u_1) - p(u_2)\big) + p(u_1+u_2)\big(p'(u_1) - p'(u_1)\big)$$
$$+ p(u_1)p'(u_2) - p(u_2)p'(u_1) = 0$$

besteht oder

$$\big(p'(u_1+u_2)\big)^2 \big(p(u_1) - p(u_2)\big)^2$$
$$= \big[p(u_1+u_2)\big(p'(u_1) - p'(u_2)\big) + p(u_1)p'(u_2) - p(u_2)p'(u_1)\big]^2$$
$$= 4\big(p(u_1) - p(u_2)\big)^2\big(p(u_1+u_2) - p(\omega)\big)\big(p(u_1+u_2) - p(\omega'')\big) \times$$
$$\times \big(p(u_1+u_2) - p(\omega')\big).\,^{*)}$$

Setzt man anstatt $u_1$ und $u_2$ $u$ und $v$, anstatt $p(u+v)$ $S$, so ist die entstehende Gleichung:

$$\big(S(p'(u) - p'(v)) + p(u)p'(v) - p'(u)p(v)\big)^2 -$$
$$- 4(p(u) - p(v))^2(S - p(\omega))(S - p(\omega''))(S - p(\omega')) = 0$$

für

$$S = p(u+v),\ p(u),\ p(v)$$

*) Formeln und Lehrsätze § 12, Formel 14.

identisch erfüllt, indem $\varphi(u, u_1, u_2)$ auch für $u = u_1, u_2$ verschwindet. Daher kann man die angeschriebene ganze Function von $S$ gleich

$$-4(p(u)-p(v))^2(S-p(u+v))(S-p(u))(S-p(v))$$

setzen, und nun gibt der Vergleich der Coefficienten von $S^2$ die Gleichung:

$$4(p(u)-p(v))^2(p(\omega)+p(\omega'')+p(\omega'))+(p'(u)-p'(v))^2 =$$
$$= 4(p(u)-p(v))^2(p(u)+p(v)+p(u+v))$$

oder

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}\right)^2 - (p(u)+p(v)).$$

Darnach ist

$$p(u-v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u)+p'(v)}{p(u)-p(v)}\right)^2 - (p(u)+p(v))$$

und

$$p(u+v)-p(u-v) = -\frac{p'(u)\,p'(v)}{(p(u)-p(v))^2}.$$

Wir sehen also, dafs $p(u+v)$ eine rationale Function von $p(u)$, $p(v)$, $p'(u)$, $p'(v)$ und dann nach Elimination von $p'(u)$ und $p'(v)$ auch eine algebraische Function von $p(u)$ und $p(v)$ wird.

Aber nicht allein die doppeltperiodische Function $p(u)$, sondern jede andere $\varphi(u)$ mit der einzigen wesentlich singulären Stelle $u=\infty$ hat ein algebraisches Additionstheorem, denn wenn

$$\varphi(u) = R(p(u), p'(u)), \quad \varphi(v) = R(p(v), p'(v)),$$
$$\varphi(u+v) = R(p(u+v), p'(u+v)) = R_1(p(u), p(v), p'(u), p'(v))$$

ist, so kann man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3$$
$$(p'(v))^2 = 4p^3(v) - g_2\,p(v) - g_3$$

eine algebraische Gleichung

$$G(\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v)) = 0$$

für $\varphi(u+v)$ ableiten, deren Coefficienten rationale Functionen von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ sind. Man nennt die doppeltperiodischen Functionen, welche im Endlichen vom Charakter der rationalen Functionen sind, *elliptische Functionen*; diese haben also ein Additionstheorem.

Sollte man umgekehrt $x = p(u)$, $y = p'(u)$ auch rational durch $\xi = \varphi(u)$, $\eta = \varphi'(u)$ darstellen können, dann erhält das Additionstheorem für die Functionen $\varphi(u)$ dieselbe Gestalt wie das der Function $p(u)$, denn

$$\varphi(u+v) = R_1(p(u), p(v), p'(u), p'(v))$$

wird eine rationale Function von $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und den ersten Ableitungen $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$.

Nun wissen wir, dafs eine Transformation der algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3 = 0$$

in

$$G(\xi, \eta) = 0$$

mit Hilfe rationaler Functionen

$$\xi = R_1(x, y), \quad \eta = R_2(x, y)$$

umkehrbar ist, wenn $G$ nicht die Potenz einer irreductiblen ganzen Function, sondern selbst eine irreductible Function ist; wenn also wenigstens einem festen Werthe von $\xi = \varphi(u)$ solche Werthepaare $x$ und $y$ zugehören, dafs die entsprechenden $\eta$-Werthe verschieden ausfallen.

Gibt man also $u$ einen bestimmten Werth, berechnet dann $\varphi(u) = \xi$ und die hierzu gehörigen Werthepaare $(x, y)$ oder

$$(p(u), p'(u)) = (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_r, b_r),$$

so müssen zur eindeutigen Umkehrung der Transformation den aus den Gleichungen

$$p(u) - a_\varrho = 0, \quad p'(u) - b_\varrho = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

hervorgehenden Werthen

$$u = u_1 + w, \; u_2 + w, \ldots u_r + w$$

wohl gleiche Functionswerthe $\varphi(u)$, aber ungleiche Werthe für $\varphi'(u)$ entsprechen.

Zunächst ist klar, dafs einem Werthepaare $a_\varrho$, $b_\varrho$ nur ein einziger bis auf Perioden bestimmter Werth von $u$ zugehört, denn die der Gleichung

$$p(u) - a_\varrho = 0$$

genügenden $u$-Werthe sind aus einem ersten $u_\varrho$ in folgender Weise gebildet; es ist

$$u = \pm u_\varrho + w.$$

Weil aber $p'(-u) = -p'(u)$ ist, kann nicht gleichzeitig

$$p'(u_\varrho) - b_\varrho = 0 \quad \text{und} \quad -p'(u_\varrho) - b_\varrho = 0$$

sein, es müfste denn $u_\varrho \equiv \omega, \omega'', \omega'$ und $a_\varrho = e_\lambda$ und $b_\varrho = 0$ sein, was im Allgemeinen nicht eintreten wird.

Den $\nu$ verschiedenen Werthepaaren $(a_\varrho, b_\varrho)$ entsprechen somit $r$ incongruente Werthe $u_\varrho$, und diesen sollen nun auch $r$ verschiedene Werthepaare $\varphi(u_\varrho) = \xi$, $\varphi'(u_\varrho) = \eta$ zugehören, oder weil

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \cdots = \varphi(u_\varrho)$$

sein wird, sollen

$$\varphi'(u_1), \; \varphi'(u_2), \ldots \varphi'(u_r)$$

verschieden ausfallen.

Nehmen wir an, dafs

$$\varphi(u_\varrho) = \varphi(u_\pi) \quad \text{und} \quad \varphi'(u_\varrho) = \varphi'(u_\pi)$$

ist, so werden auch alle höheren Ableitungen von $\varphi$ an den Stellen $u_\varrho$ und $u_\pi$ dieselben Werthe erhalten, denn es ist ja

$$\varphi'' = -\frac{\frac{\partial G}{\partial \varphi}}{\frac{\partial G}{\partial \varphi_1}}\varphi' = \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial \varphi}}, \qquad \varphi''' = \frac{G_2}{\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)^2}, \ldots$$

wo $G_1$, $G_2$ usw. ganze Functionen von $\varphi$ und $\varphi'$ sind. Dann werden aber in hinlänglich kleiner Umgebung von $u_\varrho$ und $u_\pi$ die Entwicklungen von $\varphi(u_\varrho + h)$ und $\varphi(u_\pi + h)$ übereinstimmen, d. h. es besteht auch die Gleichung

$$\varphi(u_\varrho + h) = \varphi(u_\pi + h)$$

oder

$$\varphi(h) = \varphi(u_\varrho - u_\pi + h),$$

und $u_\varrho - u_\pi$ wird eine Periode der Function $\varphi(u)$.

Bezeichnet demnach $(2\omega,\ 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar der Functionen $p(u)$ und $\varphi(u)$, so kann $\varphi'(u_\varrho)$ nicht gleich $\varphi'(u_\pi)$ sein — aufser an einzelnen Ausnahmsstellen, wo $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ verschwindet — und man kann umgekehrt $p(u)$ und $p'(u)$ rational durch $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ ausdrücken.

Wir sind damit bei dem Satze angelangt, *dafs jede eindeutige doppeltperiodische Function $\varphi(u)$, die im Endlichen den Charakter der rationalen Function aufweist, auch ein Additionstheorem der Gestalt:*

$$\varphi(u + v) = R\big(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi'(u),\ \varphi'(v)\big)$$

*besitzt.*

Betrachtet man die algebraische Gleichung:

$$G\big(\varphi(u + v),\ \varphi(u),\ \varphi(v)\big) = 0$$

und fragt nach denjenigen Functionen $\varphi$, welche eine derartige Functionalgleichung erfüllen, so erhält man gewifs noch allgemeinere Functionen als die eben genannten eindeutigen doppeltperiodischen Functionen, denn man kann der gegebenen Gleichung zufolge $\varphi(u+v)$ als algebraische Function von $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$ entwickeln. Die Differentiation der Gleichung nach $u$ und $v$ führt auf die Relationen:

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi(u)}\varphi'(u) + \frac{\partial G}{\partial \varphi(u+v)}\frac{\partial \varphi(u+v)}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi(v)}\varphi'(v) + \frac{\partial G}{\partial \varphi(u+v)}\frac{\partial \varphi(u+v)}{\partial v} = 0$$

und durch Subtraction erhält man

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi(u)}\varphi'(u) - \frac{\partial G}{\partial \varphi(v)}\varphi'(v) = 0.$$

Nun aber kann man $\varphi(u+v)$ in der verlangten Weise darstellen.

Andrerseits läfst sich zeigen, dafs jede analytische Function $\varphi(u)$, welche ein algebraisches Additionstheorem

$$G\big(\varphi(u+v),\ \varphi(u),\ \varphi(v)\big) = 0$$

besitzt, entweder eine algebraische Function von $u$, oder $e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}}$ oder $p(u)$ ist.*)

M. Phragmen beweist ausführlich**), dafs jede analytische Function $\varphi(u)$, deren Elemente

$$\mathfrak{P}_1(u|a),\quad \mathfrak{P}_1(v|b),\quad \mathfrak{P}(u+v|a+b)$$

die Relation

$$G\big(\mathfrak{P}_1(u|a),\ \mathfrak{P}_2(v|b),\ \mathfrak{P}(u+v|a+b)\big) = 0$$

erfüllen, in jedem endlichen Bereiche von dem Charakter einer algebraischen Function sein mufs, die einer Gleichung entspringt, in welcher die Coefficienten im Endlichen keine wesentlich singulären Stellen haben, und zeigt, dafs zwischen den zu den Argumentswerthen $u$, $v$, $u+v$ gehörigen Functionalwerthen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ immer dieselbe Relation bestehen mufs.

Ist die Stelle $u=\infty$ eine wesentlich singuläre Stelle und $\varphi(u)$ eine endlich vieldeutige transcendente Function, so mufs sie nothwendig periodisch sein. Ist nämlich die Gleichung $G=0$ in $\varphi(u+v)$ vom $m^{\text{ten}}$ Grade, so gibt es immer Werthe $a$, welche $\varphi(v)$ an $(m+1)$ Stellen $v_1, v_2, \dots v_{m+1}$ annimmt, und dann hat die Gleichung $G=0$ bei jedem Werthe von $u$ mehr verschiedene Wurzeln als ihr Grad anzeigt. Es müssen daher unter den Wurzeln:

$$\varphi(u+v_1),\quad \varphi(u+v_2), \dots \varphi(u+v_{m+1})\quad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

gleiche vorkommen; aber die Gleichung

$$\varphi_\mu(u+v_\mu) = \varphi(u+v_\nu)$$

verräth, dafs $v_\mu - v_\nu$ eine Periode ist.

Lassen sich alle Perioden als ganzzahlige Vielfache einer einzigen $2\omega$ ausdrücken, so ist $\varphi(u)$ eine endlich vieldeutige einfach periodische Function, und zwar eine algebraische Function von $e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}}$.

Aufser diesen gibt es noch doppeltperiodische Functionen, die der hier behandelten Classe angehören, wenn sie eindeutig sein sollen. —

Ist nunmehr eine algebraische Gleichung

$$G(\eta, \xi) = 0$$

vorgelegt, die man mit Hilfe der rationalen Substitutionen

$$x = R_1(\xi, \eta),\quad y = R_2(\xi, \eta)$$

---

*) Formeln und Lehrsätze § 1.

**) Acta mathematica Bd. 7, S. 33.

in die Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

umwandeln kann, dann darf man $\xi$ und $\eta$ als doppeltperiodische Functionen $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ eines Parameters $u$ auffassen und die Perioden von $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ sind diejenigen, welche der durch die Differentialgleichung:

$$y^2 = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

definirten Function $x = p(u)$, die für $u = 0$ unendlich wird, zukommen.

Die Gleichung $G(\xi, \eta) = 0$ kann nur vom ersten Range sein, denn es gibt ja rationale Functionen von $\xi$ und $\eta$, die nur an einer Stelle $u$ des Periodenparallelogramms und nur an einer Stelle $(\xi, \eta)$ von der zweiten Ordnung unendlich werden. Umgekehrt sieht man, dafs die algebraischen Gleichungen ersten Ranges mit Hilfe der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen zu discutiren sind.

## § 62. Berechnung primitiver Perioden.

Nun handelt es sich aber um die Berechnung primitiver Perioden der durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

definirten doppeltperiodischen Function $x = p(u)$.

Da die Gleichung

$$p(u+v) - p(u-v) = -\frac{p'(u)\,p'(v)}{(p(u) - p(v))^2}$$

besteht und andrerseits für jede Periode $\varpi$ die Differenz

$$p(u+\varpi) - p(u-\varpi)$$

verschwindet, so gehen die halben Perioden offenbar als Lösungen der Gleichung

$$p(v) = 0 \quad \text{oder} \quad p'(v) = 0$$

hervor. Indem aber die zuerst genannten Werthe $v$ zu keiner neuen Definition der Perioden führen, brauchen wir nur diejenigen Werthe $v$ zu suchen, für welche

$$(p'(v))^2 = 4(p(v) - e_1)(p(v) - e_2)(p(v) - e_3)$$

verschwindet.

Bedeutet hier $e_1$ den Werth, welchen die Function für $v = \omega + w$, $e_3$ den Werth, den $p(v)$ für $v = \omega' + w$ annimmt, so ist $e_2$ der Werth, den $p(v)$ an den Stellen $v = \omega + \omega' + w = \omega'' + w$ erhält.

Angenommen, man habe aus der Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \quad (x = \infty,\ u = 0)$$

irgend zwei $u$-Werthe $\omega_1 = \omega + w$ und $\omega_3 = \omega' + 2w$ ermittelt, für

die $x$ gleich $e_1$ respective $e_3$ wird, so mufs man hinterher nachsehen, wie *die einmal fixirten halben Perioden mit primitiven zusammenhängen oder ob sie selbst halbe primitive Perioden sind.*

Ist $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar und soll auch $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ein solches sein, so müssen die Beziehungen bestehen:

$$\omega_1 = p\omega + q\omega' = \omega + w$$
$$\omega_3 = p'\omega + q'\omega' = \omega' + w,$$

wo die ganzen Zahlen $p$ und $q$ oder $p'$ und $q'$ nicht gleichzeitig gerade sein dürfen, indem sonst $p(\omega_1)$ oder $p(\omega_3)$ nicht gleich $e_1$ oder $e_3$ wäre. Weil

$$\frac{\sigma'(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2p\eta + 2q\eta', \quad \frac{\sigma'(u+2\omega_3)}{\sigma(u+2\omega_3)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2p'\eta + 2q'\eta'$$

und

$$\frac{\sigma'(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = p\eta + q\eta' = \eta_1, \quad \frac{\sigma'(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = p'\eta + q'\eta' = \eta_3$$

ist, wird

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = (\eta\omega' - \eta'\omega)(pq' - p'q),$$

und nachdem

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi i}{2}$$

ist, mufs

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm\frac{\pi i}{2}, \quad pq' - p'q = \pm 1$$

sein, denn andernfalls könnte man $2\omega$ und $2\omega'$ nicht ganzzahlig durch $2\omega_1$ und $2\omega_3$ ausdrücken.

Man hat demnach zum Beweise, dafs die einmal gewonnenen halben Perioden $2\omega_1, 2\omega_3$ primitive sind, zu zeigen, dafs $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm\frac{\pi i}{2}$ wird. —

Vor der Bestimmung irgend welcher halber Perioden bemerken wir zunächst, dafs die unendlich vieldeutige Function $u$ von $x$ nirgends unendlich wird.

Da das durch die Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) = R(x)$$

definirte algebraische Gebilde in der Umgebung jeder endlichen, von $(x = e_\lambda$ und $y = 0)$ verschiedenen Stelle $x = a$, $y = b$ in der Form:

$$x = a + t, \quad y = b(1 + t\mathfrak{P}(t))\,.$$

in der Umgebung von $(e_\lambda, 0)$ durch ein Functionenpaar

$$x = e_\lambda + \frac{t^2}{R'(e_\lambda)} = e_\lambda + \frac{t^2}{12e_\lambda^2 - g_2}, \quad y = t(1 + t^2\mathfrak{P}(t^2))$$

und in der Umgebung der unendlich fernen Stelle $(\infty, \infty)$ in der Gestalt

$$x = \frac{t^{-2}}{4}, \quad y = \frac{t^{-3}}{4}(1 + t^2\mathfrak{P}(t^2))$$

darstellbar ist, so wird die Function, deren Ableitung nach $t$ $\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{y}\right)$ ist, nirgends unendlich.

Bezeichnet $F(x, y)$ irgend eine rationale Function von $x$ und $y$ und stellt man das Differential $F(x, y)\,dx$ in der Umgebung einer Stelle $(x, y)$ in der Form $\mathfrak{P}(t)\,dt$ dar, so heifst die Differenz der Werthe derjenigen Function von $t$, deren Differential $\mathfrak{P}(t)\,dt$ ist, für zwei Stellen $t_2$ und $t_1$ des hier benutzten Elementes des algebraischen Gebildes das von $t_1$ nach $t_2$ erstreckte *bestimmte Integral*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}(t)\,dt.$$

Entsprechen den Werthen $t = t_1, t_2$ die Stellen $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$, so schreibt man das Integral auch in der Form

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F(x, y)\,dx.$$

Will man ein Integral von $(x_0, y_0)$ nach einer einem zweiten Functionenelement angehörigen Stelle $(x_0', y_0')$ erstrecken, so suche man einen von $(x_0, y_0)$ nach $(x_0', y_0')$ verlaufenden continuirlichen Weg mit den vermittelnden Stellen

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$$

und verstehe unter dem bestimmten Integral

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_0', y_0')} F(xy)\,dx \quad \text{die Summe} \quad \sum_{\nu=0}^{n} \int_{(x_\nu, y_\nu)}^{(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})} F(xy)\,dx,$$

wobei $(x_{n+1}, y_{n+1})$ für $(x_0', y_0')$ gesetzt ist. Mit der Wahl des von $(x_0, y_0)$ nach $(x_0', y_0')$ sich erstreckenden Weges hat das *bestimmte Integral* $\int_{(x_0, y_0)}^{(x_0', y_0')} F(xy)\,dx$ auch einen bestimmten Werth.

Nach diesen Bemerkungen wird das bestimmte Integral $\int_{(x_0, y_0)}^{(x_0', y_0')} \frac{dx}{y}$ nirgends unendlich.

Wir denken nunmehr die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

$e_1, e_2, e_3$ mit Rücksicht auf die Beziehung $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ so geordnet, dafs $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$ und dann auch $e_1 - e_3$ positiv werden, d. h. positive reelle Bestandtheile oder — falls diese verschwinden — doch positive imaginäre Bestandtheile besitzen. Dann kann keine der Gröfsen

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \varkappa^2 \quad \text{und} \quad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \varkappa'^2$$

einen reellen negativen Werth annehmen und keine hat einen reellen positiven Werth, der gröfser oder gleich 1 ist.

Nach dieser Festsetzung fragen wir, ob es $u$ Werthe gibt, für die $p(u) = e_1$ ist.

Sind $e_1$, $e_2$, $e_3$ und dann auch $g_2$ und $g_3$ reell, so wird $x$ in der Umgebung von $u=0$ bei reellen zunehmenden $u$-Werthen abnehmen, und indem wir uns an diesen einfachen Fall halten, setzen wir

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und geben hierin der Wurzel das positive Zeichen. Da dem Werthe $x = \infty$ der Werth $u = 0$ zugehört, ist bei positiv genommener Quadratwurzel:

$$\int_0^u du = u = -\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

und

$$\omega_1 = \int_{e_1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

wird ein $u$-Werth, der die Gleichung $p(u) - e_1 = 0$ erfüllt. —

Setzt man $x = e_1 + \xi$ und versteht unter $\xi$ eine reelle Gröfse, so entspricht $x = e_1$ und $x = \infty$ der Werth $\xi = 0$ und $\xi = \infty$ und man kann

$$\omega_1 = \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{\xi + e_1 - e_2}\sqrt{\xi + e_1 - e_3}}$$

setzen. Legt man hier $\sqrt{\xi}$ das positive Zeichen bei, so hat man die zwei übrigen Wurzeln so zu wählen, dafs der reelle Theil derselben positiv ist.

Um auch einen Werth für $\omega_3$ zu finden, setze man für $u$ $vi$ und bemerke, dafs die Entwicklung von $p(vi)$ in der Umgebung der Stelle $v = 0$ mit $-\frac{1}{v^2}$ beginnt. Dann geht $p(vi)$ auf dem Wege von $v=0$ nach $\frac{\omega_3}{i}$, von $-\infty$ nach $e_3$, und weil $p'(u) = p'(vi)$ bei reellen $v$ gleich ist einer negativ reellen Gröfse mal $i$, so setze man in der Gleichung

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}}$$

die Quadratwurzel positiv, dann wird

$$\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{e_3}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\,.$$

Die Substitution $x = e_3 - \xi$ führt wieder auf das geradlinig zu nehmende Integral:

$$\omega_3 = i\int_0^\infty \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{\xi+(e_1-e_3)}\sqrt{\xi+(e_1-e_3)}},$$

in welchem $\sqrt{\xi}$ der positive Werth beigelegt werden mufs und die übrigen Wurzeln derart zu wählen sind, dafs ihr reeller Theil positiv ist.

Bevor wir die gefundenen Werthe $\omega_1$ und $\omega_3$ in anderer Form darstellen, bemerken wir, dafs die Function $p(u)$ für

$$u = \varpi = p\omega + q\omega'$$

gleich $e_1$, $e_2$, $e_3$ ist, je nachdem die Zahlen $p$ und $q$ (die nicht gleichzeitig gerade sind) den Bedingungen

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 0 \pmod 2$$

oder

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 1 \pmod 2$$

oder

$$p \equiv 0, \quad q \equiv 1 \pmod 2$$

genügen, und dafs die Gleichung

$$p(u \pm \varpi) - e_\lambda = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u)}{p(u)-e_\lambda}\right)^2 - p(u) - 2e_\lambda$$

mit Rücksicht auf die Formeln:

$$(p'(u))^2 = 4(p(u)-e_\lambda))(p(u)-e_\mu))(p(u)-e_\nu))$$
$$e_\lambda + e_\mu + e_\nu = 0$$

in die folgende umzusetzen ist:

$$p(u \pm \varpi) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{p(u) - e_\lambda}.$$

Setzt man nun an Stelle des früheren $u$ $\omega_3 + u_1$ und läfst $u_1$ von 0 geradlinig nach $\omega_1$ gehen, so wird

$$p(u) = p(u_1 + \omega_3) = e_3 + \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{p(u) - e_3}$$

von $e_3$ nach $e_2$ übergehen, und wegen des vorhin negativ genommenen $p'(u_1)$ ist

$$p'(u) = p'(u_1 + \omega_3) = -\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{(p(u_1)-e_3)^2}\, p'(u_1)$$

gleichzeitig positiv zu nehmen. Da $u$ jetzt von $\omega_3$ nach $\omega_2$ geht, erhält man

$$\int_{\omega_3}^{\omega_2} du = \int_0^{\omega_1} du = \omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Ersetzt man das frühere $v$ durch $\omega_1 + v_1 i$ und geht $v_1$ von Null nach $\frac{\omega_3}{i}$ über, wobei

$$p(v) = p(v_1 i + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(vi) - e_1}$$

von $e_1$ nach $e_2$ gelangt und

$$p'(v) = p'(vi + \omega_1) = -\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(p(vi) - e_1)^2} p'(vi)$$

einer positiven Gröfse mal $i$ gleich zu setzen ist, so kann man $\omega_3$ in der Form:

$$\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}}$$

schreiben. —

Eine andere gebräuchliche Form für die halben Perioden findet man durch die folgenden Erwägungen.

Es war

$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(v+u)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}.$$

Wenn hierin $v$ eine halbe Periode $\varpi$ ist, für die $p(\varpi) = e_\lambda$ sei, so erhält man

$$p(u) - e_\lambda = \frac{\sigma(\varpi+u)\,\sigma(\varpi-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\varpi)}.$$

Wird wie früher $\tilde{\eta} = \frac{\sigma'(\varpi)}{\sigma(\varpi)}$ gesetzt und führt man die Bezeichnung ein:

$$\sigma_\lambda(u) = \frac{e^{-\tilde{\eta} u}\sigma(\varpi+u)}{\sigma(\varpi)} = \frac{e^{\tilde{\eta} u}\sigma(\varpi-u)}{\sigma(\varpi)},$$

so folgt die Gleichung

$$p(u) - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}\right)^2 \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Zwischen den neuen ganzen Functionen $\sigma_\lambda(u)$, die an der Stelle $u=0$ den Werth 1 annehmen, bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2(u) - \sigma_2^2(u) + (e_1 - e_2)\,\sigma^2(u) &= 0\\
\sigma_2^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_2 - e_3)\,\sigma^2(u) &= 0\\
\sigma_3^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_3 - e_1)\,\sigma^2(u) &= 0,
\end{aligned}$$

die man einfach durch Elimination von $p(u)$ erhält. Setzt man die Identität

$$(p(u)-e_1)(e_2-e_3)+(p(u)-e_2)(e_3-e_1)+(p(u)-e_3)(e_1-e_2) = 0$$

in eine zwischen den Functionen $\sigma_\lambda(u)$ um, so ergibt sich:

$$\sigma_1^2(u)(e_2-e_3)+\sigma_2^2(u)(e_3-e_1)+\sigma_3^2(u)(e_1-e_2) = 0.$$

Diese Relationen benutze man zur Ableitung der Differentialgleichungen, welchen die zwölf Quotienten

$$\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} = \xi_{\lambda,0}, \quad \frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma_\nu(u)} = \xi_{\mu,\nu}, \quad \frac{\sigma(u)}{\sigma_\lambda(u)} = \xi_{0,\lambda}$$

genügen. Zunächst ist

$$(p'(u))^2 = 4\left(\frac{\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(u)}{\sigma^3(u)}\right)^2 = 4\,\xi_{\lambda 0}^2\,\xi_{\mu 0}^2\,\xi_{\nu 0}^2.$$

Doch weil

$$\left(\frac{d}{du}(p(u) - e_\lambda)\right)^2 = 4\,\xi_{\lambda 0}^2\left(\frac{d\,\xi_{\lambda 0}}{du}\right)^2$$

ist, erhält man

$$\left(\frac{d\xi_{\lambda 0}}{du}\right)^2 = \xi_{\mu 0}^2\,\xi_{\nu 0}^2$$

und ferner

$$\frac{d\xi_{\lambda 0}}{du} = -\xi_{\mu 0}\xi_{\nu 0},$$

denn $\xi_{\lambda 0}$ wird an der Stelle $u=0$ unendlich und nimmt von da an ab; offenbar ist auch $\lim \frac{d\xi_{\lambda 0}}{du}\,\frac{1}{\xi_{\lambda 0}^2} = -1$.

Da nach den früheren Gleichungen

$$\xi_{10}^2 - \xi_{20}^2 + (e_1 - e_2) = 0, \quad \xi_{20}^2 - \xi_{30}^2 + (e_2 - e_3) = 0, \quad \xi_{30}^2 - \xi_{10}^2 + (e_2 - e_1) = 0$$

ist, wird

$$\left(\frac{d\xi_{\lambda 0}}{du}\right)^2 = \xi_{\mu 0}^2\,\xi_{\nu 0}^2 = (\xi_\lambda^2 + e_\lambda - e_\mu)(\xi_\lambda^2 + e_\lambda - e_\nu).$$

Ebenso geht die Gleichung

$$p'(u) = -2\,\frac{\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(u)}{\sigma^3(u)}$$

in die folgenden Differentialgleichungen über:

$$\frac{d\xi_{\mu\nu}}{du} = -(e_\mu - e_\nu)\,\xi_{\lambda\nu}\xi_{0\nu} \quad \text{und} \quad \frac{d\xi_{0\lambda}}{du} = \xi_{\mu\lambda}\,\xi_{\nu\lambda},$$

und es ist für $u=0$

$$\xi_{\mu\nu} = 1, \quad \xi_{0\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\xi_{0\lambda}}{du} = 1.$$

Die Differentialgleichungen erhalten aber auch die nachstehende Form:

$$\left(\frac{d\xi_{\mu\nu}}{du}\right)^2 = (e_\mu - e_\lambda)(1 - \xi_{\mu\nu}^2)\left(1 - \frac{e_\nu - e_\lambda}{e_\mu - e_\lambda}\,\xi_{\mu\nu}^2\right)$$

$$\left(\frac{d\xi_{0\lambda}}{du}\right)^2 = \left(1 - (e_\mu - e_\lambda)\,\xi_{0\lambda}^2\right)\left(1 - (e_\nu - e_\lambda)\,\xi_{0\lambda}^2\right)$$

und jetzt übersieht man unmittelbar, dafs wegen der leicht zu verificirenden Relationen

$$\frac{(e_\nu - e_\mu)(e_\nu - e_\lambda)}{p(u) - e_\nu} + e_\nu = (e_\nu - e_\lambda)\,\xi_{\mu\nu}^2 + e_\lambda = (e_\nu - e_\mu)\,\xi_{\lambda\nu}^2 + e_\mu \qquad (A)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{d\xi_{12}}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2}\,\sqrt{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

und

$$\omega_2 = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{d\xi_{32}}{\sqrt{1 - \xi_{32}^2}\,\sqrt{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}} = \frac{K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

wird, wo in den geradlinig auszuführenden Integralen $K$ und $K'$ die Wurzeln diejenigen Werthe besitzen, deren reelle Bestandtheile positiv sind und der Werth von $\sqrt{e_1 - e_3}$ beliebig zu fixiren ist. —

Will man beweisen, dafs die hier angegebenen Werthe $\omega_1$, $\omega_3$ halbe *primitive* Perioden sind, so suche man zunächst aus der Gleichung:

$$d\left(\frac{\sigma'(u)}{(\sigma u)}\right) = -p(u)\,du = \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

durch geeignete Integrationen $\eta_1 = \frac{\sigma'(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}$ und $\eta_3 = \frac{\sigma'(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)}$ zu berechnen.*)

Das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ wird an der einzigen Stelle $x = \infty$ unendlich, doch weil die bestimmten Integrale zur Ermittlung von $\eta_1$ und $\eta_3$ offenbar nach diesem Punkte zu erstrecken sind, wollen wir das Differential $\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ zunächst umgestalten.

Nehmen wir zu diesem Zwecke die viel verwendete Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right) = \frac{2(z-t)}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(z)}}$$

auf, die sich unter Anwendung der Formel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-\alpha}\right) = \frac{1}{2}\frac{R'(x)}{(x-\alpha)\sqrt{R(x)}} - \frac{\sqrt{R(x)}}{(x-\alpha)^2}$$

leicht bestätigen läfst, führen die Differentiationen wirklich aus, multipliciren das Resultat mit $\sqrt{R(t)}$ und setzen dann an Stelle von $z$ $x$ und geben $t$ den Werth $e_\nu$, so geht die erwünschte Gleichung:

$$\frac{1}{2}d\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-e_\nu}\right) = \left(x - e_\nu - \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{x - e_\nu}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

oder

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}d\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-e_\nu}\right) + e_\nu\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{x - e_\nu}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hervor.

Nun folgt aus der Gleichung $(A)$

$$x - e_\nu = \frac{e_\nu - e_\mu}{\xi_{\mu\nu}^2 - 1} = \frac{e_\nu - e_\lambda}{\xi_{\lambda\nu}^2 - 1}$$

und je nachdem man den ersten oder zweiten Ausdruck für $x - e_\nu$ benutzt, ergibt sich im Falle $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\lambda = 3$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}d\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-e_2}\right) + \frac{e_1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\frac{d\xi_{12}}{\sqrt{1-\xi_{12}^2}\sqrt{1-\varkappa^2\xi_{12}^2}}$$
$$- \sqrt{e_1 - e_3}\frac{(1-\varkappa^2\xi_{12}^2)\,d\xi_{12}}{\sqrt{1-\xi_{12}^2}\sqrt{1-\varkappa^2\xi_{12}^2}}$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}d\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-e_2}\right) - \frac{ie_3}{\sqrt{e_1 - e_3}}\frac{d\xi_{32}}{\sqrt{1-\xi_{32}^2}\sqrt{1-\varkappa'^2\xi_{32}^2}}$$
$$- i\sqrt{e_1 - e_3}\frac{(1-\varkappa'^2\xi_{32}^2)\,d\xi_{32}}{\sqrt{1-\xi_{32}^2}\sqrt{1-\varkappa'^2\xi_{32}^2}},$$

*) Vergl. die „Formeln“ S. 86. 87.

denn es ist

$$e_\nu + \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{x - e_\nu} = e_\mu + (e_\lambda - e_\mu)\left(1 - \frac{e_\lambda - e_\nu}{e_\lambda - e_\mu}\xi_{\mu\nu}^2\right)$$

oder

$$e_\nu + \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{x - e_\nu} = e_\lambda + (e_\mu - e_\lambda)\left(1 - \frac{e_\mu - e_\nu}{e_\mu - e_\lambda}\xi_{\lambda\nu}^2\right).$$

Da nun die Gleichung

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\int_\infty^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(x)}}{x - e_\nu} + e_\nu \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_\infty^x \frac{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)}{x - e_\nu}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in der Umgebung der unendlich fernen Stelle richtig ist, d. h. weil die Entwicklungen beider Seiten als Functionen von $u$ in der Umgebung von $u = 0$ oder als Functionen von $x$ in der Umgebung von $x = \infty$ übereinstimmen und somit auf keiner Seite eine Constante hinzuzufügen ist, folgt

$$\eta_1 = -\frac{e_1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{d\xi_{12}}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2}\sqrt{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}} + \sqrt{e_1 - e_3}\int_0^1 \frac{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2}\sqrt{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}}\,d\xi_{12}$$

$$\eta_3 = -\frac{i e_3}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{d\xi_{32}}{\sqrt{1 - \xi_{32}^2}\sqrt{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}} - i\sqrt{e_1 - e_3}\int_0^1 \frac{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}{\sqrt{1 - \xi_{32}^2}\sqrt{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}}\,d\xi_{32}.$$

Denn wenn $u$ von $0$ bis $\omega_1$ oder $\omega_3$ übergeht, durchläuft $\xi_{12}$ und $\xi_{32}$ die Werthe von $1$ bis $0$ und $x$ geht von $\infty$ bis $e_1$ oder von $-\infty$ bis $e_3$. In den neuen, geradlinig zu nehmenden Integralen

$$E = \int_0^1 \frac{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2}\sqrt{1 - \varkappa^2\xi_{12}^2}}\,d\xi_{12} \quad \text{und} \quad E' = \int_0^1 \frac{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}{\sqrt{1 - \xi_{32}^2}\sqrt{1 - \varkappa'^2\xi_{32}^2}}\,d\xi_{32}$$

haben die Quadratwurzeln wieder diejenigen Werthe, deren reelle Bestandtheile positiv sind.

Setzt man

$$\eta_1 = -\frac{e_1 K}{\sqrt{e_1 - e_3}} + \sqrt{e_1 - e_3}\,E, \quad \eta_3 = -\frac{i e_3}{\sqrt{e_1 - e_3}}K' - i\sqrt{e_1 - e_3}\,E'$$

und bemerkt, dafs bei den getroffenen Festsetzungen

$$\Re\left(\frac{\omega_3}{\omega_1 i}\right) = \Re\left(\frac{K'}{K}\right)$$

positiv ist, so hat man endlich zum Beweise dafür, dafs $2\omega_1$ und $2\omega_3$ primitive Perioden sind, zu zeigen, dafs die Gleichung

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = i(EK' - KK' + E'K) = \frac{\pi i}{2}$$

besteht; doch gehen wir auf die Ausführung nicht ein und verweisen auf die Untersuchungen von Legendre.*)

Hier haben wir die verschiedenen Ausdrücke so gewählt, wie sie in den Formeln von Weierstrafs angegeben sind.

*) Traité des fonctions elliptiques. I, S. 60. Siehe auch Durège: Theorie der elliptischen Functionen § 70.

## § 64. Eindeutige Functionen des Periodenverhältnisses.

Hat man zwei primitive Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ gefunden, für die

$$\Re\left(\frac{\omega_3}{\omega_1 i}\right) > 0, \quad p(\omega_1) = e_1, \quad p(\omega_2) = e_2, \quad p(\omega_3) = e_3$$

ist, so werden mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{p(u) - e_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3),$$

die ihrerseits die Quadratwurzeln $\sqrt{p(u) - e_\lambda}$ als eindeutige Functionen von $u$ definiren, die sechs Quadratwurzeln $\sqrt{e_\mu - e_\nu}$ in folgender Weise bestimmt sein:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = \frac{e^{\eta_2\omega_1}\sigma(\omega_3)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)}, \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = -\frac{e^{\eta_1\omega_2}\sigma(\omega_3)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)},$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = -\frac{e^{\eta_3\omega_2}\sigma(\omega_1)}{\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_3)}, \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = \frac{e^{\eta_2\omega_3}\sigma(\omega_1)}{\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_3)},$$

$$\sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = \frac{e^{-\eta_1\omega_3}\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_3)}, \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = \frac{e^{-\eta_3\omega_1}\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_3)},$$

— was man mit Hilfe der Relation

$$\sigma(u + 2\varpi) = (-1)^{pq+p+q} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})}\sigma(u),$$

wo $\varpi = p\omega_1 + q\omega_3$ ist, leicht bestätigen kann —, und zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:

$$\sqrt{e_2 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3},$$
$$\sqrt{e_3 - e_2} = -i\sqrt{e_2 - e_3},$$

weil $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ist.

Für die Gröfsen $\sigma(\omega_\lambda)$ ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\sigma(\omega_1) = \frac{e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt[4]{e_1 - e_3}}, \quad \sigma(\omega_2) = \frac{\sqrt{i}\, e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt[4]{e_2 - e_3}},$$

$$\sigma(\omega_3) = \frac{i e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt[4]{e_2 - e_3}},$$

wenn $\sqrt{i}$ für $e^{\frac{\pi i}{4}}$ gesetzt wird, und hierin haben die vierten Wurzeln nur solche Werthe, deren Quadrate den oben genannten Werthen gleich sind.

Da ferner

$$\frac{\sigma_2(\omega_1)}{\sigma_3(\omega_1)} = \varkappa', \quad \frac{\sigma_1(\omega_3)}{\sigma_2(\omega_3)} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sigma_3(\omega_2)} = -i\frac{\varkappa'}{\varkappa}$$

ist, wird noch

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \varkappa\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_3 - e_2} = -i\varkappa\sqrt{e_1 - e_3}$$
$$\sqrt{e_1 - e_2} = \varkappa'\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_1} = -i\varkappa'\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Sind $2\omega_1$ und $2\omega_3$ primitive Perioden der durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad (u = 0,\ x = \infty)$$

definirten Function $x = p(u)$, die in der Umgebung der Stelle $u = 0$ die Entwicklung

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu - 1)c_\nu u^{2\nu-2}$$

besitzt, wo

$$c_\nu = \sum_{\mu,\mu'}{}' \frac{1}{(2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_3)^{2\nu}} \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ist, so ist klar, dafs $c_\nu$ ungeändert bleibt, wenn man $2\omega_1$ und $2\omega_3$ durch äquivalente Perioden $2\varpi_1$ und $2\varpi_3$ ersetzt oder — was dasselbe heifst — wenn man $\omega_1$ und $\omega_3$ einer ganzzahligen Substitution:

$$\varpi_1 = p\,\omega_1 + q\,\omega_3$$
$$\varpi_3 = p'\omega_1 + q'\omega_3$$

mit der Determinante $pq' - p'q = \pm 1$ unterwirft.

Die Ausdrücke $c_\nu$ sind, wie wir gleich nachweisen wollen, analytische Functionen von $\omega_1$ und $\omega_3$*).

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ mit $\tau = \alpha + \beta i$, wo unter der Annahme eines positiven reellen Bestandtheiles $\Re\left(\frac{\omega_3}{\omega_1 i}\right)$ $\alpha$ alle reellen und $\beta$ nur positive reelle Werthe erhalten darf, auf dafs

$$|e^{\tau\pi i}| < 1$$

ist, so kann man die unbedingt convergenten Summen in folgender Weise schreiben:

$$c_n = \frac{1}{(2\omega_1)^{2n}} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mu + \mu'\tau}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{(2\omega_1)^{2n}}\left[\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n} + 2\sum_{\mu'=1}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mu + \mu'\tau}\right)^{2n}\right].$$

Leitet man aus der Formel

$$\pi \operatorname{cotg} \tau\mu'\pi = -\pi i\,\frac{1 + e^{2i\pi\tau\mu'}}{1 - e^{2i\pi\tau\mu'}}$$

oder aus der äquivalenten Gleichung:

$$\frac{1}{\tau\mu'} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tau\mu' + \mu} + \frac{1}{\tau\mu' - \mu}\right\} = -i\pi - 2i\pi\sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{2\pi i\tau\mu'\lambda}$$

---

*) Vergleiche Hurwitz: Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Math. Annalen, Bd. 18.

durch $(2n)$ malige Differentiation nach $(\tau\mu')$ die Relation ab:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\tau\mu'+\mu}\right)^{2n} = (-1)^{2n}\frac{(2i\pi)^{2n}}{(2n-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{2n-1}\,e^{2\pi i\tau\mu'\lambda},$$

in welcher die rechte Seite convergirt, solange $|e^{2\pi i\tau\mu'}| < 1$, so gibt deren Anwendung die Formel:

$$c_n = \frac{2}{(2\omega_1)^{2n}}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n} + (-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{2n-1}\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}}\right].$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist der früheren Summe $\sum\limits_{\mu'}{}' \sum\limits_{\mu}\left(\frac{1}{\mu\omega_1+\mu'\omega_3}\right)^{2n}$ gleich, sofern nur $|e^{\tau\pi i}| < 1$ oder in $\tau = \alpha + \beta i$ $\beta$ positiv ist. Er stellt eine analytische Function dar, denn die für den Klammerausdruck zu setzende Potenzreihe nach $e^{\tau\pi i}$ convergirt in der positiven Halbebene von $\tau$, kann aber darüber hinaus nicht fortgesetzt werden, weil sie für jeden rationalen Werth von $\tau$ unendlich wird. Die Gröfsen $c_\nu$ sind also analytische Functionen von $\omega_1$ und $\omega_3$.

Bei den oben genannten Substitutionen mit der Determinante $pq' - p'q = 1$ wird zugleich mit $\Re\left(\frac{\omega_3}{\omega_1 i}\right)$ auch $\Re\left(\frac{\overline{\omega}_3}{\overline{\omega}_1 i}\right)$ positiv. Hat man demnach zwei eindeutige Functionen von $\omega_1$ und $\omega_2$, die in der positiven Halbebene von $\tau$ nach Potenzen von $e^{\tau\pi i}$ zu entwickeln sind, und bei einer ganzzahligen linearen Substitution mit der positiven Determinante 1 um denselben Factor geändert werden, so ist deren Quotient eine eindeutige Function von $\tau$, die nur in der positiven Halbebene existirt und bei den linearen Substitutionen

$$\tau' = \frac{\alpha+\beta\tau}{\gamma+\delta\tau} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ungeändert bleibt.

Offenbar ist

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = J(\tau)$$

eine solche Function, denn weil

$$g_2 = 60c_2, \quad g_3 = 140c_3$$

ist, fällt im Zähler und Nenner der bei einer der in Rede stehenden Substitutionen sich ändernde Factor $\left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^{12}$ aus.

Da

$$\frac{g_2}{4} = -(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

ist, kann man

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} + \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right)^2\right)(e_1 - e_3)^2 = \frac{4}{3}(1 - \varkappa^2 + \varkappa^4)(e_1 - e_3)^2$$

setzen, und weil

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16G = 16(e_3 - e_2)^2(e_2 - e_1)^2(e_1 - e_3)^2$$
$$= 16(\varkappa^2\varkappa'^2)^2(e_1 - e_3)^6$$

oder mit Rücksicht auf die Relation

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

gleich $16(\varkappa^2(1 - \varkappa^2))^2(e_1 - e_3)^6$ ist, läſst sich $J(\tau)$ als rationale Function von $\varkappa^2$ darstellen:

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - \varkappa^2 + \varkappa^4)^3}{\left(\varkappa^2(1 - \varkappa^2)\right)^2}$$

und $\varkappa^2$ ist umgekehrt eine algebraische Function von $J(\tau)$.

Eine weitere wichtige Gleichung ist die nachstehende:

$$J(\tau) - 1 = \frac{27g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{((1 + \varkappa^2)(2 - \varkappa^2)(1 - 2\varkappa^2))^2}{27\left(\varkappa^2(1 - \varkappa^2)\right)^2}.$$

Es handelt sich nun wieder um eine Darstellung von $J(\tau)$. Es ist

$$g_2^3 = (60c_2)^3 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^{12}\left\{120\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^4 + 320\pi^4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^3\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1 - e^{2\pi i\tau\lambda}}\right\}^3$$

und weil $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^4 = \frac{4}{120}\,\frac{\pi^4}{3}$ ist, gilt auch

$$g_2^3 = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}\left\{\frac{1}{12} + 20\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^3\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1 - e^{2\pi i\tau\lambda}}\right\}^3.$$

Um den Nenner $16G$ in dem Ausdrucke für $J(\tau)$ als Function von $\tau$ zu entwickeln, gehen wir zunächst auf die Relation

$$\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{p(u) - e_\lambda} = \frac{e^{-\eta_\lambda u}\sigma(\omega_\lambda + u)}{\sigma(\omega_\lambda)\,\sigma(u)} = \frac{e^{\eta_\lambda u}\sigma(\omega_\lambda - u)}{\sigma(\omega_\lambda)\,\sigma(u)}$$

zurück und stellen $\sigma(u)$ als Function von $\tau$ dar.

Setzt man in

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\,\sin\frac{u\pi}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega_1}\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega_3\pi}{\omega_1}\right)}\right)$$

statt der Sinuse die Exponentialfunction und benützt die Bezeichnung:

$$e^{\frac{u\pi i}{2\omega_1}} = z, \qquad e^{\tau\pi i} = h,$$

so wird

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - h^{2n}z^2)\left(1 - \frac{h^{2n}}{z^2}\right)}{(1 - h^{2n})^2}$$

und hierin ist

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left\{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega_3\pi}{\omega_1}\right)}\right\} = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left\{\frac{1}{6} - \sum_{n}\frac{4h^{2n}}{(1 - h^{2n})^2}\right\}.$$

Gibt man hierauf $u$ den Werth $\omega_1$, wobei $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ zu setzen ist, so folgt:

$$\sigma(\omega_1) = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \left( \frac{\prod\limits_n (1 + h^{2n})}{\prod\limits_n (1 - h^{2n})} \right)^2,$$

aber im Falle $u = \omega_3$ und $z = e^{\frac{\tau\pi i}{2}} = h^{\frac{1}{2}}$ wird:

$$\sigma(\omega_3) = \frac{i}{2} e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{1-h}{h^{\frac{1}{2}}} \frac{\prod (1 - h^{2n+1})(1 - h^{2n-1})}{\prod (1 - h^{2n})^2},$$

oder weil

$$\frac{e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}}{h^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1} - \frac{\omega_3\pi i}{2\omega_1}} = e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2} - \frac{\pi i\tau}{4}} = \frac{e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}}{h^{\frac{1}{4}}},$$

ist, gilt auch die Formel

$$\sigma(\omega_3) = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{i}{2} \frac{e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}}{h^{\frac{1}{4}}} \left( \frac{\prod (1 - h^{2n-1})}{\prod (1 - h^{2n})} \right)^2.$$

Endlich bei der Substitution $u = \omega_2$ und $z = e^{\frac{\omega_2\pi i}{2\omega_1}} = ih^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$e^{\frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}} h^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2} + \frac{\pi i}{4}} h^{-\frac{1}{4}},$$

wenn wir statt $e^{\frac{\pi i}{4}}$ $\sqrt{i}$ schreiben:

$$\sigma(\omega_2) = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}} \frac{\sqrt{i}}{2h^{\frac{1}{4}}} \left( \frac{\prod (1 + h^{2n-1})}{\prod (1 - h^{2n})} \right)^2.$$

Nunmehr erhalten die auf Seite 403 angegebenen Wurzelgröfsen

$$\sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_2}$$

die folgenden Werthe:

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1} 4h^{\frac{1}{2}} \prod (1 - h^{2n})^2 \prod (1 + h^{2n})^4$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1} \prod (1 - h^{2n})^2 \prod (1 + h^{2n-1})^4$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega_1} \prod (1 - h^{2n})^2 \prod (1 - h^{2n-1})^4.$$

Man sieht zunächst, dafs die Gröfsen $\varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ und $\varkappa'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$ eindeutige Functionen von $\tau$ werden, denn man erhält:

$$\varkappa^2 = 16h\left(\frac{\prod(1+h^{2n})}{\prod(1-h^{2n})}\right)^8, \quad \varkappa'^2 = \left(\frac{\prod(1-h^{2n-1})}{\prod(1+h^{2n-1})}\right)^8.$$

Andrerseits folgt mit der Bemerkung, dafs

$$\prod(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})(1+h^{2n})(1+h^{2n-1}) = \prod(1-h^{2n})$$

ist, für

$$16G = 16(e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2(e_1-e_2)^2$$

der Ausdruck

$$\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} h^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}$$

und darum besteht die Formel:

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{\left(\frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\right)^3}{h^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}}.$$

An dieser Stelle erwähnen wir nur noch, dafs die Function $J(\tau)$ für den Argumentwerth $\tau = \varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und alle daraus durch die ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante 1 hervorgehenden Werthe verschwindet, und andrerseits $J(\tau)-1$ für $\tau = i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ und die durch dieselben Substitutionen entspringenden Werthe Null wird. Man kann nämlich zeigen, dafs in

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{16G} \quad \text{und} \quad \frac{27g_3^2}{16G} = J(\tau)-1$$

$$g_2 = \frac{60}{(2\omega_1)^4}\sum_{\mu,\mu'}{}'\left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^4 \text{ für } \tau=\varrho \quad \text{und} \quad g_3 = \frac{140}{(2\omega_1)^6}\sum_{\mu,\mu'}{}'\left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^6 \text{ für } \tau = i$$

verschwindet, indefs $16G$ an diesen Stellen endlich bleibt.

In der That, wenn man die Glieder der Summe für $g_2$ zu je dreien in folgender Weise zusammenfafst:

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4 + \left(\frac{1}{-\mu'+(\mu-\mu')\varrho}\right)^4 + \left(\frac{1}{\mu'-\mu-\mu\varrho}\right)^4 =$$
$$\left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4\left(1+\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\right),$$

so ist die Summe offenbar Null. Ebenso kann man in der Summe für $g_3$ die zwei Glieder vereinigen:

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{-\mu+\mu' i}\right)^6 = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6$$

und ihre Summe gleich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu + \mu' i}\right)^6 \left\{1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}\right\}$$

setzen; man sieht, dafs $g_3$ an der Stelle $\tau = i$ verschwindet.

Setzt man endlich $\frac{\tau}{i} = \frac{\omega_3}{\omega_1 i} = \infty$, ohne dafs $\omega_1$ Null ist, so wird $J(\tau) = \infty$, denn dann verschwindet $16\,G$, aber

$$J(\tau) \cdot e^{2\pi i \tau}$$

hat für $\tau = i\infty$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth, und die Stelle $\tau = i\infty$ ist für $J(\tau)$ eine wesentlich singuläre.

## II. Abschnitt.

# Einleitung in die Theorie der Functionen mit linearen Substitutionen in sich.

### § 65. Normalformen der Substitutionen. Functionen mit einer Fundamentalsubstitution.

Zur näheren Beurtheilung der eindeutigen Function $J(\tau)$, welche bei gewissen linearen Substitutionen des Argumentes ungeändert bleibt, richten wir die Frage allgemein nach eindeutigen analytischen Functionen $F(x)$ der Beschaffenheit, dafs für bestimmte lineare Substitutionen

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

an Stelle von $x$ die Gleichung

$$F\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) = F(x)$$

bei jedem Werthe $x$ aus dem Innern oder der Grenze des Stetigkeitsbereiches von $F(x)$ besteht.

Wenn wir auch nicht im Stande sind, die Theorie dieser Functionen zu entwickeln, so soll doch gezeigt werden, wie die functionentheoretische Behandlung der gestellten Frage ausfallen mufs, und das thun wir um so lieber, als dabei hervorgeht, dafs die auseinandergesetzte Theorie der doppeltperiodischen Functionen prototyp ist.

Wie bei der Frage nach den doppeltperiodischen Functionen zunächst die gegenseitige Beziehung der Perioden untersucht wurde,

müssen wir hier vor Allem die Substitutionen selbst betrachten. Wir nehmen hierbei gleich den Satz vorweg, dafs es keine eindeutige oder endlich vieldeutige Function geben kann, die unendlich kleine Substitutionen $f(x)$ besitzt, d. h. solche, für die $|x - f(x)|$ kleiner ist als eine beliebig kleine Gröfse. —

Wir nehmen an, dafs die Substitutionscoefficienten $a, b, c, d$, die im allgemeinen complexe Gröfsen sein werden, eine *Determinante*

$$ad - bc$$

gleich Eins besitzen, denn die Division des Zählers und Nenners in $f(x)$ durch $\sqrt{ad - bc}$ gibt Coefficienten der verlangten Art.

Sind die Substitutionscoefficienten reelle Gröfsen, so kann man sie durch Division von $\sqrt{ad - bc}$ oder $\sqrt{bc - ad}$ in andere reelle derart umgestalten, dafs ihre Determinante $\pm 1$ wird. In dem letzteren Falle ist die Substitution von $f(x)$ an Stelle von $x$ — welche Operation durch das Symbol

$$(x, f(x))$$

angezeigt werden möge — offenbar unter einer Substitution

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d}, \quad \frac{a\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + b}{c\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + d}\right)$$

enthalten, wo $a, b, c, d$ feste Gröfsen und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Coefficienten mit der Determinante Eins sind.

Bemerkt man, dafs die Vollführung einer Substitution $(x, f'(x))$ nach der ersten $(x, f(x))$ eine Substitution

$$(x, f(f'(x))) = \left(x, \frac{a\dfrac{a'x + b'}{c'x + d'} + b}{c\dfrac{a'x + b'}{c'x + d'} + d}\right)$$

gibt, deren Determinante das Product der Determinanten

$$ad - bc \quad \text{und} \quad a'd' - b'c'$$

ist, so wird man zur Untersuchung der Substitutionen gleicher Determinante blos diejenigen mit complexen oder reellen Coefficienten von der Determinante Eins zu betrachten nothwendig haben.

Man nennt $x$ *äquivalent oder congruent* $x^{(i)}$, wenn es vier Gröfsen $a_i, b_i, c_i, d_i$ gibt, welche den Bedingungen:

$$x^{(i)} = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}, \quad a_i d_i - b_i c_i = 1$$

genügen. Da umgekehrt:

$$x = \frac{d_i x^{(i)} + (-b_i)}{(-\gamma_i)\, x^{(i)} + a_i}, \quad d_i a_i - (-b_i)(-c_i) = 1$$

wird, ist auch $x^{(i)}$ der Gröfse $x$ äquivalent. Ist die erste Operation mit $(x, f_i(x))$ bezeichnet, so deutet man die inverse Substitution durch $(f_i(x), x)$ an.

Zwei einer dritten äquivalenten Gröfsen sind untereinander äquivalent, denn wenn in

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad x_2 = \frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2}$$

die Determinanten gleich Eins sind, so gibt es auch vier Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, für welche

$$x_1 = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird und zwar ist:

$$x_1 = \frac{(a_1 d_2 - b_1 c_2) x_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)}{(c_1 d_2 - c_2 d_1) x_2 + (d_1 a_2 - b_2 c_1)}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) = 1.$$

Ist nun $F(x)$ eine analytische Function, für die

$$F(f^{(i)}(x)) = F\left(\frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}\right) = F(x)$$

ist, so wird auch

$$F(f^{(m)}(x)) = F(x),$$

wo $f^{(m)}(x)$ den durch $m$malige Wiederholung der Substitution $(x, f(x))$ aus $x$ gewonnenen Argumentwerth

$$f(f(\ldots f(x))\ldots)$$

bezeichnet; die Function $F(x)$ bleibt zugleich mit der ursprünglichen auch bei den neuen Substitutionen $(x, f^{(m)}(x))$ ungeändert. — Bezeichnet man

$$f^{(\mu)}(x) = \frac{a_\mu x + b_\mu}{c_\mu x + d_\mu},$$

so ist

$$f^{(m)}(x) = \frac{a_m x + b_m}{c_m x + d_m} = \frac{a_{m-1}(a_1 x + b_1) + b_{m-1}(c_1 x + d_1)}{c_{m-1}(a_1 x + b_1) + d_{m-1}(c_1 x + d_1)}$$

und

$$a_m d_m - b_m c_m = (a_1 d_1 - b_1 c_1)^m = 1.$$

Schreibt man für $x$ $f^{(0)}(x)$, für die inverse Substitution von $f^{(1)}(x)$ $f^{(-1)}(x)$ und setzt

$$f^{(-2)}(x) = f^{(-1)}(f^{(-1)}(x)), \quad f^{(-3)}(x) = f^{(-1)}(f^{(-2)}(x)), \ldots$$
$$f^{(-m)}(x) = f^{(-1)}(f^{(-m+1)}(x)),$$

so folgt ebenso

$$F(f^{(n)}(x)) = F(x),$$

wenn $n$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Es ist möglich, dafs eine $m$malige Wiederholung der Operation $(x, f(x))$ zu dem Argumentwerthe $x_m = x$ zurückführt.

Um die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, geben wir einer Substitution

$$\left(x, \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

erst besondere *Normalformen*.

Die beiden Werthe von $x$, für die $x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ ist, sind

$$x' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha - \delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1}\right) \text{ und } x'' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha - \delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1}\right)$$

und darnach wird der Ausdruck

$$\frac{\gamma x' - \alpha}{\gamma x'' - \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta x' + \alpha\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)}{\beta x'' + \alpha\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)} \quad \text{oder} \quad \frac{x'}{x''}\,\frac{\beta + \alpha x''}{\beta + \alpha x'}$$

gleich

$$\left(\frac{\alpha + \delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1}\right)^2 =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left((\alpha + \delta)^2 - (\alpha + \delta)\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}\right) = K$$

zu setzen sein und mit Hilfe dieses kann man in dem Falle von einander verschiedener Werthe $x'$ und $x''$ die Substitution $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ auf die Form:

$$\frac{y - x'}{y - x''} = K\,\frac{x - x'}{x - x''}$$

bringen, denn für $x = x', x'', -\frac{\beta}{\alpha}$ folgt wie früher $y = x', x'', 0$.

$K$ der sogenannte *Multiplicator* der Substitution ist nicht gleich Eins, wenn $(\alpha + \delta)^2$ von 4 verschieden ist oder wenn $x'$ und $x''$ ungleich sind. Falls die Substitution reell d. h. die Coefficienten reelle Gröfsen sind, wird $K$ reell, sofern

$$(\alpha + \delta)^2 - 4 > 0$$

ist und der absolute Betrag $|K|$ ist von Eins verschieden. Ist aber

$$4 - (\alpha + \delta)^2 > 0,$$

dann wird $K$ complex und $|K| = 1$ d. h. der Multiplicator erhält die Form $e^{i\varphi}$, wo nun $\varphi$ reell ist.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, so kann $(\alpha + \delta)^2$ unter der Bedingung $4 - (\alpha + \delta)^2 > 0$ nur die Werthe Null und Eins besitzen und dann ist der Multiplicator

$$K = -1, \text{ oder } -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Sind aber die Lösungen $x', x''$ einander gleich oder $(\alpha + \delta)^2 = 4$ und $K = 1$, so kann die ursprüngliche Substitution nicht mehr in der früheren Normalform angeschrieben werden, denn diese wird zur Iden-

tität. Da aber jetzt in $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ nur mehr zwei Constante willkürlich sind, kann man der Substitution die Form

$$\frac{1}{y - x'} = \frac{1}{x - x'} + c$$

geben.

Ist in unserer früheren Substitution $(x, f^{(1)}(x))$ $(a_1 + d_1)^2 \gtrless 4$, so gebe man der Substitution $(x, f^{(m)}(x))$ die Form:

$$\frac{f^{(m)}(x) - x'}{f^{(m)}(x) - x''} = K^m \frac{x - x'}{x - x''}$$

und hier sieht man, dafs im Falle $f^{(m)}(x) = x$

$$K^m = 1$$

werden mufs, d. h. $K$ ist eine $m^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit.

Ist hingegen $(a_1 + d_1)^2 = 4$ und $a_1 + d_1 = \pm 2$, so wird — wie man leicht bestätigt —

$$f^{(m)}(x) = \frac{(m a_1 \mp (m-1))\, x + m b_1}{m c_1 x + (m d_1 \mp (m-1))},$$

und weil die Forderung, es sei $f^{(m)}(x) = x$, die Gleichung

$$c_1 x^2 + (d_1 - a_1)\, x - b_1 = 0$$

nach sich zieht, so mufs schon $f^{(1)}(x) = x$ sein. Es kann also nur in dem Falle, wo

$$\left(\frac{a + d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 - 1}\right)^{2m} = 1,$$

die Iterirung der Substitution $(x, f^{(1)}(x))$ auf $x$ selbst zurückführen.

Fragt man nach analytischen Functionen $F(x)$, welche blos die Substitutionen

$$(x, f^{(n)}(x)) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

zulassen und bei anderen Substitutionen $(x, f(x))$ ihren Werth ändern, so kann man die Untersuchung folgendermafsen einrichten*). Setzt man

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

so besitzt die Function

$$F(\varphi(x)) = \Phi(x)$$

zufolge der Gleichungen

$$\Phi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

$$\Phi(\varphi^{-1}(f^1(x))) = F(f(x)) = F(x) = \Phi(\varphi^{-1}(x))$$

$$\Phi(\varphi^{-1}(f^1(\varphi^1(x)))) = \Phi(x)$$

die Substitution

$$(x, \psi(x)) \equiv (x, \varphi^{-1}(f^1(\varphi^1(x))))$$

oder

$$(x, \psi(x)) \equiv \left(x, \frac{(a_1 \alpha\delta + b_1\gamma\delta - c_1\alpha\beta - d_1\beta\gamma)x + (a_1\beta\delta + b_1\delta^2 - c_1\beta^2 - d_1\beta\delta)}{(-a_1\alpha\gamma - b_1\gamma^2 + c_1\alpha^2 + d_1\alpha\gamma)x + (-a_1\beta\gamma - b_1\gamma\delta + c_1\alpha\beta + d_1\alpha\delta)}\right)$$

*) Vergleiche Rausenberger: Theorie der periodischen Functionen. § 34.

und die durch Iterirung dieser gebildeten Substitutionen. Hier verfüge man ohne Rücksicht auf die bereits abgeleiteten Normalformen der Substitutionen über die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ derart, dafs $(x, \psi(x))$ eine möglichst einfache Gestalt erhält, denn dann hat auch $\Phi(x)$ einfache Substitutionen.

Soll $x$ aus dem Nenner ausfallen, so mufs

$$c_1 \alpha^2 + (d_1 - a_1)\alpha\gamma - b_1\gamma^2 = 0$$

werden. Hierin kann man $\alpha$ und $\gamma$ nicht gleichzeitig Null setzen, sonst wäre $\varphi(x)$ blos eine Constante und $\Phi(x)$ hätte keine einfacheren Substitutionen als $F(x)$. Setzt man $\gamma = 0$, so wird $c_1$ Null und $F(x)$ wäre bereits eine Function mit einer Substitution der verlangten Art. Wir schliefsen daher den Fall $\gamma = 0$ aus und lösen die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - \frac{a_1 - d_1}{c_1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \frac{b_1}{c_1} = 0.$$

Sind die Wurzeln verschieden, so gibt es zugleich mit $F(x)$ eine Function $\Phi(x)$, welche eine Substitution der Form

$$(x, \psi(x)) \equiv (x, Kx + k)$$

zuläfst. Bezeichnet hierauf $(x, \chi(x))$ eine neue Substitution $(x, \alpha' x + \beta')$, so existirt mit $\Phi(x)$ eine Function $\Psi(x)$, welche die Substitution:

$$(x, \chi^{-1}\psi\chi^1(x)) \equiv \left(x, \frac{K\alpha' x + (K\beta' - \beta' + k)}{\alpha'}\right)$$

gestattet. Wählt man hier $\beta'$ so, dafs $K\beta' - \beta' + k$ verschwindet, dann hat die neue Function $\Psi(x)$ die Fundamentalsubstitution:

$$(x, Kx).$$

$K$ bezeichnet wieder den Multiplicator der ursprünglichen Substitution $(x, f(x))$, wie man leicht berechnen kann, indem man nur nach derjenigen Substitution $y = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$ $(a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1)$ fragt, die mit Hilfe der Substitution $\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ aus $y = Kx$ resultirt, auf dafs also

$$\frac{\alpha \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + \beta}{\gamma \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + \delta} = K \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

wird. Entsprechend den zwei Lösungen für $\frac{\alpha}{\gamma}$ gibt es aber zwei Multiplicatoren, doch weil

$$F(f^1(x)) = F(x) = F(f^{-1}(x))$$

ist, wird der eine nur das Reciproke des zweiten sein, oder mit anderen Worten: man kann die Substitution $(x, f(x))$ mit dem Multiplicator $K$ ebenso wie die Substitution $(x, f^{-1}(x))$ mit dem Multiplicator $\frac{1}{K}$ als

die fundamentale Substitution ansehen, und deshalb dürfen wir voraussetzen, daſs die Function $\Psi(x)$ eine Substitution $(x, Kx)$ habe, in welcher $|K| < 1$ ist. —

Ist aber $K = 1$, so gibt es zugleich mit $F(x)$ eine Function $\Phi(x)$, welche die Substitution

$$\psi(x) = x + k$$

zuläſst. Setzt man dann

$$\chi(x) = \frac{k}{c}\,x,$$

wo $c$ eine beliebige Gröſse ist, so hat $\Phi(\chi(x)) = \Psi(x)$ eine Substitution:

$$\chi^{-1}\psi'\chi'(x) = \frac{c}{k}\left(\frac{k}{c}x + k\right) = x + c.$$

Fragt man wieder nach der Substitution $y = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$, die mit Hilfe von $\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ aus $y = x + c$ hervorgeht, soll also

$$\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + c$$

sein, so hat man

$$a_1 = -\alpha\delta + \beta\gamma - \gamma\delta, \quad b_1 = -\delta^2, \quad c_1 = \gamma^2, \quad d_1 = -\alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta$$

zu setzen, und wenn $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$ ist, ergibt sich für $a_1$ und $d_1$ die Bedingung

$$(a_1 + d_1)^2 - 4 = 0,$$

unter welcher auch früher $K = 1$ war.

Nehmen wir an, daſs $c = 1$ sei, so ist die aus

$$f^1(x) = x + 1$$

gewonnene Substitution

$$f^{(n)}(x) = x + n,$$

und eine Iterirung kann niemals auf $x$ zurückführen, d. h. eine eindeutige Function $F(x)$ mit einer linearen Substitution $(x, x + c)$ hat für unendlich viele Werthe des Argumentes denselben Werth; sie muſs transcendent sein. Weil $F(x)$ an der Stelle $\infty$ wegen der Gleichung

$$F(x + \infty) = F(x) = F(\infty)$$

jedem Werthe beliebig nahe kommt, ist die Stelle $\infty$ eine wesentlich singuläre. Hat $F(x)$ noch eine andere wesentlich singuläre Stelle $x_0$, so sind auch $x_0 \pm nc$ wesentlich singuläre Stellen.

Die hier genannten Functionen sind die *einfach periodischen.*

Eine eindeutige Function mit einer Substitution $y = Kx$, wo $|K| \gtrless 1$ ist, hat niemals eine Substitution

$$(x, f^{(n)}(x)) \equiv (x, K^n x) \equiv (x, x),$$

sie nimmt daher einen und denselben Werth unendlich oft an, und weil

$$F(K^n x) \quad \text{und} \quad F\left(\frac{x}{K^n}\right)$$

im Falle $|K|<1$ bei unendlich werdendem $n$ in $F(0)$ respective $F(\infty)$ übergehen, so sind die Stellen 0 und $\infty$ wesentlich singulär, wird ja doch

$$F(0)=F(x), \quad F(\infty)=F(x).$$

Gibt es für $F(x)$ noch eine wesentlich singuläre Stelle $x_0$, so ist auch $x_0 K^\nu$ eine solche.

Ist $|K|=1$, aber in $K=e^{i\varphi}$ $\varphi$ kein rationales Vielfaches von $2\pi$, so werden die Potenzen $K^n$ jedem Werthe von dem absoluten Betrage 1 beliebig nahe kommen, und dann müfste $F(x)$ für alle Stellen gleichen Betrages denselben Werth besitzen. — Es gibt darnach keine analytische Function $F(x)$ mit einer Substitution $y=Kx$, wenn in

$$K=e^{2\pi i r}$$

$r$ irrational ist.

Ist $K^m=1$, so ist $x^m$ eine eindeutige Function mit den $m$ Substitutionen

$$x, \; Kx, \; K^2x, \ldots K^{m-1}x$$

und jede andere eindeutige Function mit denselben Substitutionen hat die Gestalt $\Phi(x^m)$, wenn $\Phi(x)$ eine eindeutige Function bezeichnet.

Bezüglich der eindeutigen Functionen mit einer Substitution

$$(x, \; Kx),$$

wo $|K|<1$ angenommen werden kann, verweisen wir auf Rausenberger's Untersuchungen über die Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln.

## § 66. Functionen mit zwei vertauschbaren Substitutionen.

Nach Ableitung zweier Normalformen jeder Substitution mit der Determinante Eins haben wir im vorigen Paragraphen nach denjenigen Functionen gefragt, welche blos die aus einer Substitution $(x, f(x))$ durch Iterirung entstehenden Substitutionen zulassen. Es kann auch eintreten, dafs eine analytische Function nicht blos für die aus einer ersten Substitution $(x, f_1(x))$, sondern auch für die aus einer zweiten $(x, f_2(x))$ durch Iterirung abgeleiteten Substitutionen ungeändert bleibt. Dann ist aber nicht blos

$$F(f_1^{(n)}(x))=F(x) \quad \text{und} \quad F(f_2^{(n)}(x))=F(x),$$

sondern auch

$$F\left(f_1^{n_1}(f_2^{n_2}(x))\right)=F(x) \quad \text{und} \quad F\left(f_2^{\nu_2}(f_1^{\nu_1}(x))\right)=F(x).$$

Nehmen wir an, dafs zwischen den beiden Substitutionen die Gleichung besteht

$$f_1(f_2(x))=f_2(f_1(x)),$$

in welchem Falle die Substitutionen *vertauschbar* heifsen, und denken wir einer der Substitutionen die Normalform

$$f_1(x) = x + k \quad \text{oder} \quad f_1(x) = Kx$$

gegeben, und ist

$$f_2(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

so ist der Annahme gemäfs entweder

$$\frac{ax+b}{cx+d} + k = \frac{a(x+k)+b}{c(x+k)+d} \quad \text{oder} \quad K\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{aKx+b}{cKx+d}.$$

Im ersten Falle mufs

$$a + ck = \varrho a, \quad b + dk = \varrho(ak+b), \quad c = \varrho c, \quad d = \varrho(ck+d)$$

sein, wo $\varrho$ ein Proportionalitätsfactor ist. Setzt man zufolge $c = \varrho c$ $\varrho = 1$, so ergibt sich aus $d = ck + d$ $c = 0$. Ist umgekehrt $c = 0$, so mufs man wieder $\varrho = 1$ setzen, denn andernfalls müfsten $a$, $d$ und $b$ auch verschwinden. Für $c = 0$, $\varrho = 1$ wird $d = a$ und darum erhält $f_2(x)$ die Gestalt

$$f_2(x) = \frac{ax+b}{a} = x + k'$$

d. h. die zweite mit $f_1(x)$ vertauschbare Substitution hat dieselbe Form wie die erste.

Die eindeutigen Functionen mit zwei Substitutionen unserer Art

$$(x,\ x + 2\omega) \quad \text{und} \quad (x,\ x + 2\omega')$$

sind die doppeltperiodischen.

Weil es nicht mehr als zweifach periodische ein- oder endlich vieldeutige Functionen einer Variabeln gibt, existirt keine analytische Function, die drei von einander unabhängige und vertauschbare Substitutionen der Form $(x,\ x+k)$ besitzt, von denen also keine durch eine Combination der zwei übrigen darstellbar ist.

Läfst die zu suchende Function $F(x)$ eine Substitution $(x,\ Kx)$ zu, so hat die mit dieser vertauschbare Substitution $f_2(x)$ wieder dieselbe Gestalt, denn jetzt ist

$$aK = \varrho aK, \quad bK = \varrho b, \quad c = \varrho Kc, \quad d = \varrho d$$

und somit

$$\varrho = 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

d. h. $f_2(x)$ wird gleich

$$\frac{a}{d}x = K'x.$$

Wie aber oben $2\omega$ und $2\omega'$ kein reelles Verhältnis haben dürfen, müssen auch hier die Gröfsen $K$ und $K'$ eine besondere Eigenschaft erhalten. Setzt man

$$x = e^{2\pi i u}, \quad K = e^{4\pi i \omega}, \quad K' = e^{4\pi i \omega'},$$

so wird die Function $F(x)$ mit den Substitutionen $(x, Kx)$, $(x, K'x)$ in eine Function $\Phi(u)$ mit den Perioden

$$1, \quad 2\omega, \quad 2\omega'$$

übergehen. Zwischen diesen mufs aber eine homogene ganzzahlige lineare Gleichung bestehen, und damit wird etwa

$$2\omega' = -\frac{m+2\mu\omega}{\mu'}$$

und nun:

$$K' = e^{-2\pi i \frac{m}{\mu'}} K^{-\frac{m}{\mu'}}$$

oder

$$K^{\mu} K'^{\mu'} = 1.$$

## § 67. Functionen mit einer endlichen Anzahl von Fundamentalsubstitutionen.

Wir legen nunmehr eine endliche Anzahl $p$ von einander verschiedener Substitutionen:

$$(x, f_i(x)) \equiv \left(x, \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

mit der Determinante Eins zu Grunde. Wenn eine eindeutige analytische Function existirt, für die

$$F\left(\frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}\right) = F(x)$$

ist, so bleibt $F(x)$ auch bei den zusammengesetzten Substitutionen:

$$\left(x, f_{\mu_1}^{\alpha_1}\left(f_{\mu_2}^{\alpha_2}(\cdots f_{\mu_m}^{\alpha_m}(x)\cdots)\right)\right)$$

ungeändert.

Sagt man, dafs ein System von Operationen eine *Gruppe* bildet, wenn die Inverse jeder einzelnen und die Combination irgend zweier dem Systeme angehört, so constituirt die Gesammtheit der eben genannten Substitutionen eine Gruppe, die durch die $p$ Fundamentalsubstitutionen oder durch $p$ mit Hilfe dieser gewonnenen, nicht in einander transformirbaren Substitutionen vollständig bestimmt ist.

Da eine Substitution

$$\left(x, f_{\mu_1}^{\alpha_1}\left(f_{\mu_2}^{\alpha_2}(\cdots f_{\mu_m}^{\alpha_m}(x)\cdots)\right)\right)$$

und eine zweite

$$\left(x, f_{\nu_1}^{\beta_1}\left(f_{\nu_2}^{\beta_2}(\cdots f_{\nu_n}^{\beta_n}(x)\cdots)\right)\right)$$

sehr wohl identisch sein kann, so ist es möglich, dafs zwischen den Substitutionen einer Gruppe auch Gleichungen

$$f_{\mu_1}^{\alpha_1}\left(f_{\mu_2}^{\alpha_2}(\ldots f_{\mu_m}^{\alpha_m}(x)\ldots)\right) = f_{\nu_1}^{\beta_1}\left(f_{\nu_2}^{\beta_2}(\ldots f_{\nu_n}^{\beta_n}(x)\ldots)\right)$$

bestehen, die man gewifs auf die Form:

$$f_{\lambda_1}^{\gamma_1}\left(f_{\lambda_2}^{\gamma_2}(\cdots f_{\lambda_l}^{\gamma_l}(x)\cdots)\right)=x$$

bringen kann.

Wir wollen in dem Falle reeller und ganzzahliger Substitutionen:

$$\left(x, \frac{a_i x+b_i}{c_i x+d_i}\right) \quad (a_i d_i - b_i c_i = 1),$$

deren Gesammtheit offenbar eine Gruppe bildet, welche keine unendlich kleinen Substitutionen enthält, die Fundamentalsubstitutionen ableiten, aus denen alle anderen zusammenzusetzen sind.

Ist in einer Substitution

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

wo $a$ stets positiv gedacht werden mag, $|c| \leqq a$, ferner

$$a = n_1 c + a_1, \quad |a_1| < c,$$

und $n_1$ eine ganze Zahl, so wird

$$x' = n_1 + \frac{a_1 x + b - n_1 d}{cx+d}.$$

Setzt man hier

$$x' = n_1 + x_1, \quad x_1 = \frac{a_1 x + b - n_1 d}{cx+d} = \frac{a_1 x + b_1}{cx+d} = f_1(x),$$

so erscheint die ursprüngliche Substitution als Combination der folgenden:

$$(x, x+n_1) \quad \text{und} \quad (x, f_1(x))$$

und zwar ist

$$a_1 d - b_1 c_1 = 1 \quad \text{und} \quad |c| > |a_1|.$$

Bezeichnet man

$$-\frac{1}{x_1} = \frac{-cx-d}{a_1 x + b_1} = x_2$$

und bildet auf die frühere Weise neben einer Substitution $x_2 = x_3 + n_2$ noch

$$x_3 = -\frac{1}{x_4}$$

und fährt so fort, dann kommt man endlich zu einer Substitution

$$x_\nu = \frac{b_\nu}{c_\nu x + d_\nu},$$

in welcher der erste Coefficient Null und deren Determinante $-b_\nu c_\nu = 1$ ist. Die ganzen Zahlen $b_\nu$ und $c_\nu$ können nur den absoluten Betrag 1 haben und man kann

$$x_\nu = \frac{-1}{x+d_\nu}$$

setzen. Hier gibt die Substitution $x_\nu = -\frac{1}{x_{\nu+1}}$ endlich

$$x_{\nu+1} = x + d_\nu.$$

Weil alle ganzzahligen Substitutionen der Form $(x, x+n)$ durch Wiederholung aus $(x, x+1)$ entstehen, lassen sich alle ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante Eins durch Wiederholung und Vereinigung der zwei Fundamentalsubstitutionen

$$(x, x+1) \quad \text{und} \quad \left(x, -\frac{1}{x}\right)$$

erzeugen.

Bezeichnet man die erste mit $(x, \varphi_1(x))$, die zweite mit $(x, \varphi_2(x))$, so ist

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2(x) = x.$$

Ist eine Gruppe linearer Substitutionen vorgelegt, so kann man in dem Bereiche der unbeschränkt veränderlichen Gröſse $x$ ein Gebiet ausfindig machen, in welchem keine zwei einander äquivalenten Stellen liegen, vorausgesetzt, daſs die Gruppe keine unendlich kleinen Substitutionen enthält oder, wie man sagt, *discontinuirlich* ist. In dem Falle der reellen und ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante Eins bestimmt man den genannten Bereich in folgender Weise *):

Da zunächst die einer Stelle $x = \xi + i\eta$ äquivalente Stelle

$$x' = \frac{\alpha\xi + \beta + i\eta\alpha}{\gamma\xi + \delta + i\eta\gamma} = \xi' + i\eta'$$

zugleich mit $x$ eine positive oder negative Ordinate $\eta'$ besitzt, so kann man die Stellen $x$ mit negativer Ordinate auſser Acht lassen; die übrigen erfüllen die *positive Halbebene.*

Man sieht, daſs in dem Falle, wo die Ordinate von $x$:

$$\eta = \frac{\xi + i\eta - (\xi - i\eta)}{2i} = \frac{x - x_0}{2i}$$

durch die Transformation $\left(x, \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ keine Verminderung erfährt, die Beziehung besteht:

$$(\gamma x + \delta)(\gamma x_0 + \delta) \leqq 1,$$

denn es ist:

$$\eta' = \frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} - \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}\right) = \frac{\eta}{(\gamma x + \delta)(\gamma x_0 + \delta)} \geqq \frac{x - x_0}{2i}.$$

Jetzt beweist man leicht, daſs unter den den Bedingungen:

$$x x_0 > 1, \quad -1 < x + x_0 < +1$$

oder

$$|x|^2 = \xi^2 + \eta^2 > 1, \quad -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$$

genügenden Stellen keine äquivalenten vorkommen, denn man kann keine Substitution der Gruppe angeben, durch welche die Ordinate $\eta$ in eine gleiche oder gröſsere $\eta'$ überginge.

---

*) Vergl. Hurwitz a. a. O.

In der That: weil dann

$$1 \geqq (\gamma x + \delta)(\gamma x_0 + \delta) = \gamma^2(\xi^2 + \eta^2) + 2\gamma\delta\xi + \delta^2$$

sein müſste, aber schon die Ungleichung

$$\gamma^2 \pm \gamma\delta + \delta^2 < 1$$

keine ganzzahligen Lösungen $\gamma$, $\delta$ zuläſst, so ist die Behauptung erwiesen.

Die Stellen auf der Grenze des genannten Bereiches, d. h. die durch die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi = \pm\frac{1}{2}$$

definirten Stellen, sind paarweise congruent, wie die Anwendung der Substitutionen

$$(x, x \pm 1), \quad \left(x, -\frac{1}{x}\right)$$

lehrt, sie sind aber niemals einem Punkte innerhalb des Bereiches äquivalent, da die Substitutionen $(x, x+n)$ und $\left(x, -\frac{1}{x}+n\right)$ die Ordinate $\eta$ ungeändert lassen und keine Substitution dieselbe vergröſsert. Die Stellen $\infty$ und $i$ sind sich selbst congruent, denn es ist

$$\infty = \infty \mp 1 \quad \text{und} \quad i = -\frac{1}{i}.$$

Der den beiden Bedingungen $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $\xi = -\frac{1}{2}$ genügende Punkt

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varrho$$

ist der Stelle $\varrho + 1 = -\frac{1}{\varrho}$ äquivalent.

Nach all diesen Erörterungen finden wir in der Gesammtheit von Stellen, für welche

$$\xi^2 + \eta^2 > 1, \quad -\frac{1}{2} \leqq \xi < \frac{1}{2}$$

ist und für welche bei verschwindendem oder negativem $\xi$ auch $\xi^2 + \eta^2 = 1$ sein kann, mit Ausnahme der Stellen $i$ und $\infty$ lauter inäquivalente Punkte.

Unterwirft man alle Stellen dieses (dem Periodenparallelogramm analog gebildeten) Bereiches $R_0$ einer Substitution

$$\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right),$$

so werden bekanntlich die den Gebilden

$$|x|^2 = \xi^2 + \eta^2 = 1 \quad \text{und} \quad x + x_0 = -1$$

entsprechenden Gebilde wieder Kreise oder Gerade, aber niemals kann auf diesen eine Stelle liegen, die in dem Innern von $R_0$ eine äquivalente besitzt. Bezeichnet man den $R_0$ entsprechenden Bereich mit

der Substitution $f_i(x)$ oder mit $R$, so können die durch verschiedene Transformationen aus $R_0$ gebildeten Bereiche $R_i$ und $R_j$ keinen gemeinsamen Bereich haben, indem sonst die aus den letzten durch die inversen Substitutionen $(f_i(x), x)$, $(f_j(x), x)$ gewonnenen Bereiche $R_0$ und $R_0'$ oder $R_0$ und $R_0''$ selbst einen gemeinsamen Bereich besäſsen und dann enthielte $R_0$ äquivalente Stellen.

Daraus folgt, daſs die Gesammtheit der aus dem Bereiche $R_0$ abzuleitenden äquivalenten Bereiche die positive Halbebene vollständig und einfach erfüllen.

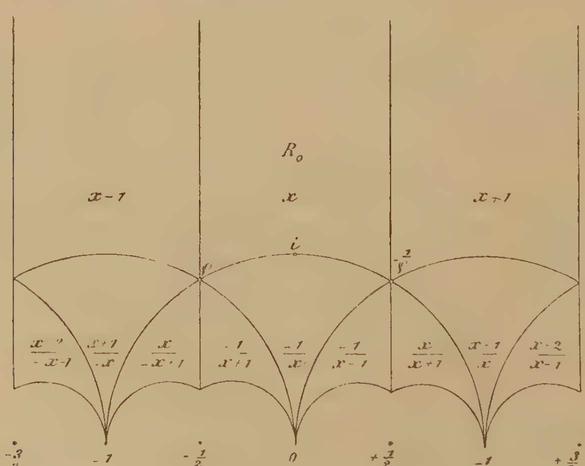
An den ursprünglichen Bereich stoſsen die folgenden an:

$$x+1, \quad x-1, \quad -\frac{1}{x},$$

und an den Bereich $\dfrac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}$ entsprechend:

$$\frac{\alpha_i(x+1)+\beta_i}{\gamma_i(x+1)+\delta_i}, \quad \frac{\alpha_i(x-1)+\beta_i}{\gamma_i(x-1)+\delta_i}, \quad \frac{\alpha_i\left(-\frac{1}{x}\right)+\beta_i}{\gamma_i\left(-\frac{1}{x}\right)+\delta_i}.$$

Die Bereiche $x+n$ haben die Stelle $\infty$ gemein, und alle übrigen Bereiche liegen im Endlichen, und zwar haben diese eine Stelle der reellen Axe als Begrenzungsstelle, denn dem Punkte $\infty$ ist in dem Bereiche $\dfrac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}$ $\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}$ congruent. Da aber die Stelle $\infty$ Grenzstelle unendlich vieler Bereiche $x+n$ ist, stoſsen an jeder rationalen Stelle unendlich viele Bereiche zusammen. —




In der obenstehenden Figur ist eine Reihe congruenter Bereiche verzeichnet, und zwar sind darin die Substitutionen angeschrieben, mit Hilfe deren sie aus dem Anfangsbereiche $R_0$ abgeleitet werden.

Gehen wir wieder zu einer durch irgend eine endliche Anzahl linearer Substitutionen gegebenen discontinuirlichen Gruppe zurück und fassen auch hier einen continuirlichen, durch Gleichungen und Ungleichungen zu definirenden Bereich $R_0$ inäquivalenter Stellen heraus, so geht dieser durch eine lineare Substitution $(x, f_i(x))$ der Gruppe in einen Bereich $R_i$ über. Inneren Stellen des ersten Bereiches entsprechen innere des zweiten, und Grenzstellen des einen werden nur Grenzstellen des zweiten congruent sein. Zweifach zu zählende, d. h. sich selbst äquivalente Stellen des einen Bereiches, die gewifs nur auf der Grenze liegen können (wie die Stelle $i$ in dem früheren Beispiele), werden auch in dem zweiten Bereiche doppelt zu zählen sein oder besser zwei aneinanderstofsenden Bereichen gemein sein, und mehrfach zu zählende Stellen kann es nicht geben. —

Die Begrenzung eines Bereiches kann nur durch Kreisbogen (und zwar speciell durch geradlinige Strecken) gebildet werden, denn bei linearen Substitutionen können Kreise und nur Kreise ungeändert bleiben oder in Kreise übergehen.

Nennt man die Gesammtheit inäquivalenter Stellen ein *Fundamentalpolygon*, so müssen sich die congruenten Polygone bei einer discontinuirlichen Gruppe an einander reihen lassen, und diese werden einen continuirlichen Bereich wie z. B. die positive Halbebene oder eine Kreisfläche vollständig erfüllen. Diesen Bereich erhält man dadurch, dafs man von irgend einer Stelle $x_0$ ausgeht, diese allen Substitutionen der Gruppe unterwirft, dann die Häufungsstellen der $x_0$ congruenten Stellen bestimmt, ferner die zu dieser Punktmenge $Q$ gehörige abgeleitete Punktmenge $Q'$ bildet und den die Stelle $x_0$ enthaltenden, durch die Menge $Q + Q'$ begrenzten Bereich $(\mathfrak{A})$ fixirt. Die einer zweiten Stelle $x_0'$ inner- oder aufserhalb $(\mathfrak{A})$ äquivalenten Stellen haben ihre Häufungsstellen offenbar wieder in der Menge $(Q + Q')$.

Man kann nun die Aufgabe an die Spitze stellen, einen Bereich durch lückenlos aneinander gereihte Polygone auszufüllen, die durch lineare Substitutionen ineinander überzuführen sind.*) Man findet dabei die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen das Polygon zu genügen hat. Diese Bedingungen auf die Beschaffenheit der Substitutionen übertragen, geben die Bedingungen, unter welchen die Gruppe discontinuirlich ist und keine Stelle des Bereiches aufserhalb des Bereiches hinaustragen kann. In dem Falle zweier vertauschbarer Fundamentalsubstitutionen sind uns diese Bedingungen bekannt geworden. —

Soll nun eine eindeutige Function $F(x)$ existiren, die ihren Werth nicht ändert, wenn man $x$ irgend einer Substitution einer discontinuir-

*) Poincaré, Acta mathematica Bd. 1 und 3.

lichen Gruppe unterwirft, so ist klar, dafs $F(x)$ jeden Werth, den diese Function annimmt, in jedem einzelnen Fundamentalpolygon erhalten und somit in diesem Polygon unendlich werden und jeden Werth annehmen mufs. Ferner aber besitzt sie einen und denselben Werth in jedem Polygon $R_j$ gleich oft.

Wollte man die Existenz der Function $F(x)$ nachweisen, so hätte man eine der Function $\sigma(x)$ analog gebildete Hilfsfunction $\varphi(x)$ aufzustellen, die in jedem Polygon, das aus einem ersten abzuleiten ist, einmal verschwindet und nur an den Häufungsstellen der erst gewählten Nullstelle $x_0$ und den Stellen der abgeleiteten Punktmenge dieser letzten wesentliche Singularitäten besitzt. Bezeichnet dann $\varphi_\mu$ diese Hilfsfunction, die in dem ersten Polygon an der Stelle $a_\mu$, $\varphi_{\mu'}$ diejenige, welche daselbst an der Stelle $b_\mu$ verschwindet, so wird der Ausdruck

$$\frac{\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \varphi_m}{\varphi_1'\,\varphi_2' \cdots \varphi_n'}\, e^{G(x)},$$

wo $G(x)$ in dem Bereiche $(\mathfrak{A})$ nicht unendlich wird, eine Function, die innerhalb $\mathfrak{A}$ vom Charakter der rationalen Function ist und in jedem Polygon $m$ Nullstellen und $n$ Unendlichkeitsstellen aufweist.

Damit diese blos in dem Bereiche $(\mathfrak{A})$ existirende Function bei den Substitutionen ungeändert bleibt, werden aber die Null- und Unendlichkeitsstellen besondere Beziehungen erfüllen und $G(x)$ eine besondere Beschaffenheit aufweisen müssen.

Im Falle der doppeltperiodischen Functionen, die im Endlichen nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzen, war die Anzahl der Null- und Unendlichkeitsstellen in jedem Polygone (Parallelogramme) dieselbe. Doppeltperiodische Functionen gab es nicht und ferner war bei den Functionen $r^{\text{ten}}$ Grades stets eine Nullstelle durch die $r$ Unendlichkeits- und $(r-1)$ Nullstellen bis auf eine Periode bestimmt.

Für die hier in Rede stehenden eindeutigen Functionen *mit linearen Substitutionen in sich*, die in ihrem Giltigkeitsbereiche $(\mathfrak{A})$ vom Charakter der rationalen Functionen sind, gelten analoge Sätze.

Vor Allem besitzt jede solche Function in jedem Fundamentalpolygone ebensoviele Null- als Unendlichkeitsstellen und nimmt dann auch jeden Werth gleich oft an. Versteht man darnach unter dem Grade der Function die Zahl, welche angibt, wie oft die Function in dem Fundamentalpolygone jeden Werth erhält — wobei die Stellen unter denselben Bedingungen mehrfach zu zählen sind, wie bei den rationalen Functionen —, so wird sich ferner herausstellen, dafs es je nach Art der Gruppe (oder der Fundamentalsubstitutionen), die wir hier allerdings nicht unterscheiden lernten, keine Functionen gibt, die vom nullten, ersten oder $\varrho^{\text{ten}}$ Grade wären.

Heifst die zu einer Gruppe gehörige Function vom $\varrho^{\text{ten}}$ Range oder Geschlechte, wenn es keine Function $\varrho^{\text{ten}}$ Grades gibt, die bei den Substitutionen ungeändert bleibt, wohl aber eine Function $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades existirt (wonach die doppeltperiodischen Functionen vom ersten Range sind), so werden von den $r$ Nullstellen einer Function $r^{\text{ten}}$ Grades und $\varrho^{\text{ten}}$ Ranges $\varrho$ Nullstellen oder doch $\varrho$ diesen äquivalente Stellen durch die $r$ Unendlichkeits- und $(r-\varrho)$ übrigen Nullstellen bestimmt sein.

Angenommen, diese Sätze seien bewiesen, dann folgt, dafs zwischen zwei zu derselben Gruppe gehörigen Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ vom $r_1$ und $r_2^{\text{ten}}$ Grade und dem Range $\varrho$ eine algebraische Gleichung

$$G(F_1, F_2) = 0$$

besteht.

In der That: betrachtet man $F_2$ als Function von $F_1$, so gehören einem Werthe von $F_1$ $r_1$ im Allgemeinen verschiedene inäquivalente Werthe des Argumentes $x$ und diesem $r_1$ im Allgemeinen verschiedene Werthe von $F_2$ zu. $F_2$ ist also eine $r_1$ deutige Function von $F_1$ und als Lösung einer algebraischen Gleichung $r_1^{\text{ten}}$ Grades aufzufassen, deren Coefficienten nur rationale Functionen von $F_1$ sind, indem die elementarsymmetrischen Functionen der zu einem Werthe von $F_1$ gehörigen Werthe von $F_2$ als Functionen von $F_1$ durchwegs vom Charakter der rationalen Function sind.

Eine rationale Function von $F_1$ und $F_2$ ist wieder eine eindeutige analytische Function von $x$, welche dieselben Substitutionen zuläfst wie $F_1(x)$ und $F_2(x)$.

Zeigt man umgekehrt, dafs jede zu derselben Gruppe gehörige Function $\Phi_1(x)$ rational durch $F_1$ und $F_2$ darstellbar ist (wie jede doppeltperiodische Function mit dem Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ rational durch die zu demselben Paare gehörende Function $p(x)$ und deren Ableitung $p'(x)$ auszudrücken ist) und bemerkt, dafs $\Phi_1(x)$ mindestens $(\varrho+1)$ Unendlichkeitsstellen in dem Elementarpolygone haben mufs, so leuchtet ein, dafs die algebraische Gleichung

$$G(F_1, F_2) = 0$$

vom Range $\varrho$ ist. —

Daneben besteht dann der Satz: Sind $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ wieder zu der Gruppe von $F_1$ und $F_2$ gehörende Functionen, zwischen denen eine algebraische Gleichung

$$\Gamma(\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

besteht, so kann man nicht allein $\Phi_1$ und $\Phi_2$ rational durch $F_1$ und $F_2$, sondern auch $F_1$ und $F_2$ rational durch $\Phi_1$ und $\Phi_2$ darstellen, d. h. die Gleichung $\Gamma = 0$ gehört derselben Klasse an wie die zwischen $F_1$ und $F_2$; sie ist auch vom Range $\varrho$.

Soweit wollte ich hier den Plan für eine Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich entwerfen, um anzudeuten, wie auch die algebraischen Gleichungen $G(\xi, \eta) = 0$ höheren als ersten Ranges durch eindeutige Functionen zu behandeln wären, indem man darin $\xi$ und $\eta$ als eindeutige Functionen einer neuen unabhängigen Variabeln $x$ betrachtet. Allerdings hat man dabei noch eine wichtige Aufgabe zu lösen, die der Bestimmung primitiver Perioden von $\xi = \wp(x)$ analog ist, wenn eine Gleichung

$$\eta^2 - 4\xi^3 + g_2\xi + g_3 = 0$$

vorgegeben ist, d. h. man mufs die Substitutionen ermitteln, welche die eine vorgelegte Gleichung lösenden Functionen $\xi(x)$, $\eta(x)$ zulassen.

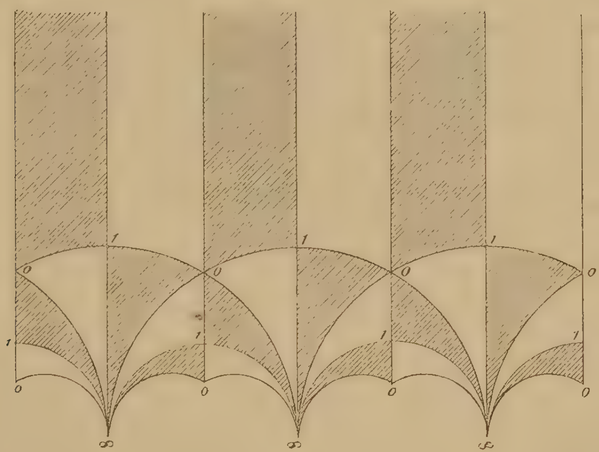
Die hier skizzirte functionentheoretische Behandlung der Functionen mit linearen Substitutionen in sich ist nicht im Entferntesten durchgeführt, und die gröfste Schwierigkeit scheint gleich in der Construction der fundamentalen Hilfsfunction $\varphi$ zu liegen, die nach der Gruppe verschieden ausfallen mufs, aber erst in dem einzigen speciellen Falle der Functionen nullten Ranges angegeben ist.*) M. Poincaré hat zwar die Existenz der Functionen — wenigstens im Principe — bewiesen und die Abhängigkeit der zu derselben Gruppe gehörigen Functionen erschlossen, und der Verf. machte dann die Unterscheidung der Functionen $\varrho^{\text{ten}}$ Ranges, so dafs all die genannten Sätze auf Wahrheit Anspruch machen, sie konnten aber hier nicht entwickelt werden, wenn wir von der Betrachtung der Riemann'schen Flächen und ihren conformen Abbildungen keinen Gebrauch machten, und das durften wir nicht, wenn wir an dem functionentheoretischen oder rein analytischen Wege festhalten.**)

Wir gehen noch einmal auf die zu der Gruppe aller ganzzahligen linearen Substitutionen mit der Determinante Eins gehörige Function $J(\tau)$ zurück, die vom ersten Grade und nullten Range ist, weil $J(\tau)$ in dem Bereiche $R_0$ nur für $\tau = i\infty$ und $\frac{1}{J(\tau)}$ nur für $\tau = \varrho$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Die beigefügte Figur zeigt wieder die Art der Werthevertheilung an den verschiedenen Stellen des Bereiches von $\tau$. An den Stellen $\varrho$ und $-\frac{1}{\varrho}$ und den äquivalenten kommen je sechs dem Ausgangsbereiche $R_0$ äquivalente Bereiche zusammen, und $\tau = i$ und die congruenten Stellen sind Grenzstellen zweier durch die Substitution $\left(x, -\frac{1}{x}\right)$ auseinander hervorgehender Bereiche. Von

*) Mangoldt, Göttinger Nachrichten 1886.

**) Bezüglich der Functionen mit ganzzahligen Substitutionen in sich verweise ich auf die mannigfachen Arbeiten Klein's in den Mathem. Annalen.

einer Stelle $\frac{\alpha\varrho+\beta}{\gamma\varrho+\delta}$ oder $\frac{\alpha\left(-\frac{1}{\varrho}\right)+\beta}{\gamma\left(-\frac{1}{\varrho}\right)+\delta}$ führen aber nur je drei und von Stellen $\frac{\alpha i+\beta}{\gamma i+\delta}$ nur je zwei äquivalente Wege nach congruenten Punkten der in eben diesen Stellen zusammenstoſsenden Bereiche, denn in der



Figur sind die schraffirten und ebenso die unschraffirten Theile äquivalente Bereiche. Getrennt sind diese Theile in dem Bereiche $R'$ durch einen die Punkte $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ und $\frac{\alpha' i+\beta'}{\gamma' i+\delta'}$ verbindenden Kreisbogen, dessen zugehöriger Mittelpunkt auf der reellen Axe liegt. —

Betrachtet man daher die unendlich vieldeutige Umkehrungsfunction von $J(\tau)$, so werden die Stellen $J=0$, $J=1$ für $\tau$ Verzweigungspunkte je dreier oder zweier Zweige, aber $J=\infty$ ein Verzweigungspunkt aller Zweige sein. Die Function $\tau(J)$ kann für keinen von 0, 1 und $\infty$ verschiedenen Werth Null sein und ihr imaginärer Theil ist immer positiv.

Eine wichtige Anwendung dieser Function $\tau(J)$ hat Picard gemacht, indem er bewies, daſs eine ganze transcendente Function $G(x)$ höchstens einen endlichen Werth $a$ im Endlichen nicht annehmen könne. In der That: gäbe es zwei Werthe $a$ und $b$, die eine ganze Function $G(x)$ nicht erhält, so ist offenbar

$$\frac{G(x)-a}{b-a}=g(x)$$

eine ganze Function, welche die Werthe 0 und 1 nicht annimmt. Setzt man dann

$$g(x)=J(\tau),$$

so entspricht einem von $x_0$ ausgehenden, im Endlichen verlaufenden,

geschlossenen Wege ein geschlossener Weg $(S)$ in dem Bereiche von $J$, der niemals durch die Stellen 0 oder 1 oder $\infty$ führen kann, weil ja $g(x)$ diese Werthe nicht annimmt. Daher werden 0, 1 und $\infty$ stets aufserhalb des durch $S$ begrenzten Bereiches liegen. Geht man nun von irgend einer $x_0$ zuzuordnenden Stelle $\tau_0$ aus, so wird $\tau$ — als Function von $x$ angesehen — stets eindeutig und endlich sein, d. h. $\tau$ wird eine ganze Function von $x_0$, die wir etwa mit $f(x)$ bezeichnen. Da ihr imaginärer Theil stets positiv ist, mufs dann $e^{if(x)}$ eine ganze Function sein, deren absoluter Betrag stets kleiner ist als Eins. Dies ist nicht anders möglich, als wenn $f(x)$ und dann auch $g(x)$ eine Constante ist. Der Satz ist somit bewiesen.*)

---

*) Annales de l'école normale 2e série t. 9.

# Achtes Capitel.

## Analytische Functionen mehrerer Variabeln.

### § 68. Das Verhalten einer analytischen Function in der Umgebung einer Nullstelle.

Die analytischen Functionen mehrerer Variabeln $(x_1, x_2, \dots x_n)$ waren ebenso wie die einer Variabeln durch ein System in einander fortsetzbarer Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \dots x_n \,|\, a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$= \sum_{(\mu_\nu)=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n} (x_1 - a_1)^{\mu_1} (x_2 - a_2)^{\mu_2} \dots (x_n - a_n)^{\mu_n}$$

definirt. Die einzelne Potenzreihe und deren Fortsetzungen stellen eine eindeutige Function dar, wenn in der Umgebung einer Stelle nur ein Element existirt. Der $(2n)$fach ausgedehnte Stetigkeitsbereich der eindeutigen analytischen Function d. h. die Gesammtheit der Stellen, in deren Umgebung die Function durch eine Potenzreihe darstellbar oder regulären Verhaltens ist, war nothwendig durch Stellen begrenzt, in deren Umgebung keine aus dem primitiven Elemente abgeleitete Potenzreihe aufzustellen ist.

Es soll nunmehr untersucht werden, wie sich eine eindeutige Function an solch ausgezeichneten Stellen verhält.

Bei der analogen Frage für Functionen einer Variabeln war uns das Verhalten derselben an einer Nullstelle und die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Function $F(x)$ an einer Stelle $x = a$ regulären Verhaltens ist, sehr behilflich. Wir erkannten, dafs $F(x)$ in der Umgebung einer regulären Nullstelle $x = x_0$ stets die Form besitzt

$$(x - x_0)^n \, \mathfrak{P}(x \,|\, x_0),$$

wo die Potenzreihe in einer endlichen Umgebung von $x_0$ nicht verschwindet. Es entsteht die Frage, ob man eine in der Umgebung einer Stelle $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)})$ oder $(x^{(0)})$ analytische Function $F(x_1, x_2, \dots x_n)$, die für $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $\dots$ $x_n = x_n^{(0)}$ und dann gewifs auch für

unendlich viele Stellen des Convergenzbereiches der die Function darstellenden Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n \mid (x^{(0)}))$ verschwindet — wobei diese Stellen aber $(x^{(0)})$ nicht zur Häufungsstelle haben können — in entsprechender Weise ausdrücken kann, also als Product einer in endlichem Bereiche um die Stelle $(x^{(0)})$ nicht verschwindenden Potenzreihe und einer analytischen Function, die daselbst all die Nullstellen von $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ annimmt. Der einfacheren Schreibweise wegen sprechen wir von einer Function

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

welche Null wird, wenn alle $(n+1)$ Variabeln verschwinden.

Bezeichnet man $F(x, 0, 0 \ldots 0)$ mit $F_0(x)$ und setzt voraus, dafs $F_0(x)$ nicht identisch Null ist, schreibt dann

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = F_0(x) - F_1(x, x_1, \ldots x_n),$$

wo $F_1(x, 0, 0, \ldots 0)$ identisch verschwinden mufs, so kann man eine positive Gröfse $\varrho_1$ derart bestimmen, dafs $F_0(x)$ in dem Bereiche:

$$0 < |x| < \varrho_1$$

nicht verschwindet und die Potenzreihe für $F_1(\varrho_1, x_1, \ldots x_n)$ convergirt, ohne dafs eine der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ Null ist. — Ist $\varrho_0$ eine positive Gröfse innerhalb des Intervalles von 0 bis $\varrho_1$ und beschränkt man $|x|$ auf den Bereich, wo

$$\varrho_0 < |x| < \varrho_1,$$

so kann man ferner eine positive Gröfse $\varrho$ so klein wählen, dafs für alle Werthesysteme $(x, x_1, \ldots x_n)$, welche den Bedingungen genügen:

$$|x_\nu| < \varrho \quad (\nu = 1, 2 \ldots n) \quad \text{und} \quad \varrho_0 < |x| < \varrho_1,$$

die Ungleichung besteht

$$|F_0(x)| > |F_1(x, x_1, \ldots x_n)|,$$

und dann darf man

$$\frac{1}{F(x, x_1, \ldots x_n)} = \frac{1}{F_0} \frac{1}{1 - \frac{F_1}{F_0}} = \frac{1}{F_0} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda$$

und

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) \frac{1}{F_0} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda = \frac{1}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda$$

setzen. Doch weil die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda$$

in dem genannten Bereiche gleichmäfsig convergirt, gilt daselbst auch die Gleichung

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda.$$

Beginnt die Entwicklung von $F_0(x)$ mit dem Gliede $Cx^m$, so wird

$$\frac{1}{F_0}\frac{\partial F_0}{\partial x} = \frac{m}{x} + \mathfrak{P}(x),$$

und indem

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\mu^{(\lambda)}(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x^{-m\lambda+\mu}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^\lambda = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)\cdot x^\nu$$

gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{P}_\mu^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{P}_\nu$ convergente Potenzreihen sind, so erhält man für $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{dx}$ eine Darstellung der Form:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m}{x} + \mathfrak{P}(x) - \frac{\partial}{\partial x}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x^\nu.$$

Man kann jetzt zeigen, dafs innerhalb des Bereiches, wo $|x_\nu| < \varrho$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ ist, zu jeder Stelle Werthe von $x$ gehören, die die Gleichung

$$F(x, x_1, \ldots x_n) = 0$$

befriedigen und dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $\varrho_1$. In der That: könnte man für eine solche Stelle $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ keine Wurzel der Gleichung

$$F_0(x) - F_1(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

finden, deren Betrag kleiner ist als $\varrho_1$, so liefse sich $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$ in dem Bereiche, wo $|x| < \varrho_1$, in eine blos positive ganze Potenzen von $x$ enthaltende Reihe entwickeln, die für die in dem Bereiche $\varrho_0 < |x| < \varrho_1$ liegenden Stellen mit der früheren übereinstimmen müfste. Doch das ist unmöglich, indem diese Entwicklung ein Glied $\frac{m}{x}$ enthält.

Heifsen die einer Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zuzuordnenden Nullstellen von $F(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(r)},$$

jede so oft genommen, als die Ordnungszahl anzeigt, so kann man

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} - \sum_{\varkappa=1}^{r} \frac{1}{x - x^{(\varkappa)}}$$

in eine für alle Werthe von $x$, deren Betrag kleiner ist als $\varrho_1$, convergente Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x)$ entwickeln. Beschränkt man aber $|x|$ auf den Bereich, wo

$$\varrho_0 < |x| > \varrho_1 \quad \text{und} \quad |x^{(\varkappa)}| < |x| \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots r)$$

ist, so wird auch

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \overline{\mathfrak{P}}(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x^{(1)})^\nu + (x^{(2)})^\nu + \cdots + (x^{(r)})^\nu}{x^{\nu+1}}.$$

Jetzt gibt der Vergleich der Darstellungen für $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$ die Beziehung:

$$(x^{(1)})^0 + (x^{(2)})^0 + \cdots + (x^{(r)})^0 = r = m,$$

d. h. jeder Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in der Umgebung $\varrho$ von $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ kann man $m$ der Gleichung $F = 0$ genügende Werthe von $x$ zuordnen, deren Betrag kleiner ist als $\varrho_1$.

Bezeichnet man die Summe der $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen:

$$(x^{(1)})^\nu + (x^{(2)})^\nu + \cdots + (x^{(r)})^\nu \text{ mit } s_\nu,$$

so lehrt der Vergleich unserer Darstellungen ferner, daſs

$$s_\nu = \nu\,\mathfrak{P}_{-\nu}(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ist. Setzt man daher

$$g(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{\varkappa=1}^{m} (x - x^{(\varkappa)}) = x^m + g_1 x^{m-1} + \cdots + g_m$$

und

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{1}{x - x^{(\varkappa)}},$$

oder

$$\frac{m x^{m-1} + (m-1) g_1 x^{m-2} + \cdots + g_{m-1}}{x^m + g_1 x^{m-1} + \cdots + g_m} = \frac{m}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu}{x^{\nu+1}}$$

und bestimmt hieraus die Coefficienten von $g(x, x_1, \ldots x_n)$ als ganze rationale Functionen von $s_1, s_2, \ldots s_m$

$$g_1 = -s_1$$
$$2g_2 = -s_2 - s_1 g_1$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$m g_m = -s_m - s_{m-1} g_1 - \cdots - s_1 g_{m-1},$$

oder als ganze rationale Functionen der $m$ Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_{-\nu}(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (\nu = 1, 2 \ldots m),$$

so sind $g_1, g_2 \ldots g_m$ selbst Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die in der Umgebung $\varrho$ von $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \ldots$ $x_n = 0$ convergiren. Die $m$ verlangten Werthe von $x$ ergeben sich als Lösungen der Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades:

$$x^m + g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) x^{m-1} + \cdots + g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

Da die Vergleichung der zwei Ausdrücke für $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$ auf die innerhalb des Bereiches $\varrho_1$ um die Stelle $x = 0$ giltige Gleichung führt:

$$\overline{\mathfrak{P}}(x) = \mathfrak{P}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)\, \mathfrak{P}_{\nu+1}(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x^\nu,$$

ist auch

$$\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x} + \mathfrak{P}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)\, \mathfrak{P}_{\nu+1}(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x^\nu .$$

Ist dann $f(x, x_1, \ldots x_n)$ die für alle den Bedingungen

$$|x| < \varrho_1, \quad |x_\nu| < \varrho \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

genügenden Werthesysteme convergente Potenzreihe, deren logarithmische Ableitung nach $x$ gerade

$$\mathfrak{P}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \cdot \mathfrak{P}_{\nu+1}(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot x^\nu$$

ist, wobei $f(0, 0, \ldots 0)$ den Werth 1 hat, so erhält man aus

$$\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

die Gleichung

$$F(x, x_1, \ldots x_n) = C g(x, x_1, \ldots x_n) f(x, x_1, \ldots x_n),$$

worin $C$ den schon genannten Coefficienten von $x^m$ in $F_0(x)$ bezeichnet. Nun ist $F(x, x_1, \ldots x_n)$ durch das Product zweier Potenzreihen $f$ und $g$ dargestellt, deren zweite eine ganze rationale Function von $x$ ist. Da die Coefficienten in $g$ und $f$ nicht von den Gröfsen $\varrho$ und $\varrho_1$ abhängen, ist die vorstehende Gleichung giltig, solange die Potenzreihen $F, g, f$ in der Umgebung von (0) convergiren.

Will man all die Werthsysteme aus der nächsten Umgebung der Stelle (0) angeben, welche die Gleichung $F = 0$ erfüllen, so wähle man diese so klein, dafs alle Stellen $(x, x_1, \ldots x_n)$ derselben in dem Convergenzbereiche von $F$, $g$ und $f$ liegen und $f(x, x_1, \ldots x_n)$ auch an keiner dieser Stellen Null wird, dann sind die fraglichen Werthesysteme die Lösungen der Gleichung

$$g(x, x_1, \ldots x_n) = 0.$$

Man bemerke noch, dafs die Coefficienten dieser Gleichung $g_1, \ldots g_m$ an der Stelle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschwinden. —

Lassen wir die bei den vorstehenden Entwicklungen gemachte Annahme fallen, dafs $F_0(x)$ nicht identisch Null sei, so kann man durch Einführung $(n + 1)$ neuer Variabeln $y, y_1, \ldots y_n$ leicht auf den früheren Fall zurückkommen. In der That: setzt man

$$\begin{aligned} x &= a_{00} y + a_{01} y_1 + \cdots + a_{0n} y_n \\ x_1 &= a_{10} y + a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n0} y + a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n , \end{aligned}$$

wo die Gröfsen $a$ solche Constante sind, dafs die Determinante des

Gleichungssystems nicht verschwindet und bei der Substitution in die Entwicklung

$$F(x, x_1, \ldots x_n) = (x, x_1, \ldots x_n)_\mu + (x, x_1, \ldots x_n)_{\mu+1} + \cdots$$

— wo $(x, x_1, \ldots x_n)_\lambda$ die Summe aller Glieder $\lambda^{\text{ter}}$ Dimension bezeichnet — das Aggregat

$$(a_{00}, a_{10}, \ldots a_{n0})_\mu$$

nicht Null wird, so geht $F$ in eine Function $\Phi(y, y_1, \ldots y_n)$ über, in welcher

$$\Phi(y, 0, \ldots 0) = \Phi_0(y) = (a_{00}, a_{10}, \ldots a_{n,0})_\mu y^\mu + (a_{00}, a_{10}, \ldots a_{n0})_{\mu+1} y^{\mu+1} + \cdots$$

nicht identisch verschwindet. Darum läfst sich $\Phi(y, y_1, \ldots y_n)$ in der Form darstellen:

$$C[y^\mu + \gamma_1(y_1, y_2, \ldots y_n)y^{\mu-1} + \cdots + \gamma_\mu(y_1, y_2, \ldots y_n)]\varphi(y, y_1, \ldots y_n),$$

worin $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu$ für $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ verschwindende Potenzreihen sind, indefs die Reihe $\varphi(y, y_1, \ldots y_n)$ an der Stelle (0) keine Nullstelle hat. Setzt man die Reihe $\varphi$ wieder in eine Reihe $f(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ um und wählt eine positive Gröfse $r$ so, dafs die Reihe $f$ in der Umgebung $r$ der Stelle (0) nicht verschwindet und die den Stellen $(x)$ entsprechenden Werthesysteme $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ angehören, bestimmt dann die jedem solchen Systeme durch die Gleichung

$$y_\mu + \gamma_1 y^{\mu-1} + \cdots + \gamma_\mu = 0$$

zugeordneten $\mu$ $y$-Werthe und darauf die zu den verschiedenen Werthesystemen gehörigen Systeme $x, x_1, \ldots x_n$, so hat man wieder die Lösungen der Gleichung $F(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ aus der Umgebung $r$ der Stelle (0) gefunden.

## § 69. Der Quotient zweier Potenzreihen.

Wir benutzen diese Sätze über die an einer Stelle $(a)$ verschwindende analytische Function zur Untersuchung des Quotienten zweier in einer Umgebung der Stelle (0) convergenter Potenzreihen:

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n)}.$$

Sagt man, dafs $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_2$ theilbar sei, wenn sich der Quotient in eine neue Potenzreihe $\mathfrak{P}_0$ entwickeln läfst, so ist $\mathfrak{P}_1$ gewifs durch $\mathfrak{P}_2$ theilbar, wenn $\mathfrak{P}_2(0, 0 \ldots 0)$ nicht Null ist, und man hat

$$\mathfrak{P}_1(x, x_1 \ldots x_n) = \mathfrak{P}_0(x, x_1 \ldots x_n)\,\mathfrak{P}_2(x, x_1 \ldots x_n).$$

Ist $\mathfrak{P}_2(0, \ldots 0) = 0$, ohne dafs $\mathfrak{P}_1(0 \ldots 0)$ gleichzeitig verschwindet, so kann man den Quotienten nicht mehr durch eine in der Umgebung von (0) convergente Potenzreihe darstellen; sollte aber

$$\mathfrak{P}_1(0, 0 \ldots 0) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_2(0, 0 \ldots 0)$$

verschwinden, so kann $\mathfrak{P}_1$ unter gewissen Bedingungen durch $\mathfrak{P}_2$ theilbar sein.

Vollführt man zunächst die lineare Substitution:

$$\begin{aligned} x &= c_{00}t + c_{01}t_1 + \cdots + c_{0n}t_n \\ x_1 &= c_{10}t + c_{11}t_1 + \cdots + c_{1n}t_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n &= c_{n0}t + c_{n1}t_1 + \cdots + c_{nn}t_n, \end{aligned}$$

deren Constante wieder so zu wählen sind, dafs die Determinante des Gleichungssystems nicht Null ist und die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(c_{00}t, c_{10}t, \ldots c_{n0}t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_2(c_{00}t, c_{10}t, \ldots c_{n0}t)$$

nicht identisch verschwinden, so kann man

$$\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n)$$
$$= [t^\mu + g_1'(t_1, t_2, \ldots t_n)t^{\mu-1} + \cdots + g_\mu'(t_1, t_2, \ldots t_n)]\,\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)$$
$$= g_1(t, t_1, \ldots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n),$$
$$\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n)$$
$$= [t^\nu + g_1''(t_1, t_2, \ldots t_n)t^{\nu-1} + \cdots + g_\nu''(t_1, t_2, \ldots t_n)]\,\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)$$
$$= g_2(t, t_1, \ldots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)$$

setzen, wo die Potenzreihen $g_1', g_2', \ldots g_\mu'$ und $g_1'', g_2'', \ldots g_\nu''$ für verschwindende Variabelnwerthe Null sind und

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(0, 0, \ldots 0), \quad \overline{\mathfrak{P}}_2(0, 0, \ldots 0)$$

nicht verschwinden. Es besteht demnach die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n)} = \frac{g_1(t, t_1, \ldots t_n)}{g_2(t, t_1, \ldots t_n)} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)}.$$

Ist $R$ eine positive Gröfse derart, dafs für alle den Bedingungen:

$$|t| \leqq R, \quad |t_1| \leqq R, \ldots |t_n| \leqq R$$

genügenden Stellen die obigen Transformationen gelten und die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2$ in diesem Bereiche nicht verschwinden, und ist $r$ eine positive Gröfse kleiner als $R$, so gewählt, dafs jedem den weiteren Bedingungen:

$$|t_1| \leqq r, \ldots |t_n| \leqq r$$

gehorchenden Werthesystemen $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ zufolge einer der Gleichungen:

$$g_1(t, t_1, \ldots t_n) = 0 \quad \text{und} \quad g_2(t, t_1, \ldots t_n) = 0$$

nur Werthe

$$t^{(1)},\ t^{(2)} \ldots t^{(m)}$$

entsprechen, deren Betrag kleiner ist als $R$, so wird

$$\frac{g_1(t, t_1, \ldots t_n)}{g_2(t, t_1, \ldots t_n)} = \prod_{\varkappa=1}^{m} (t - t^{(\varkappa)})^{\lambda_\varkappa}$$

wo $\lambda_\varkappa$ ganze Zahlen sind, deren Summe gleich $(\mu - \nu)$ ist. Soll nun $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_2$ theilbar sein, so darf in dem Ausdrucke

$$\prod_{\varkappa=1}^{m} (t - t^{(\varkappa)})^{\lambda_\varkappa} \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)}$$

keine der Zahlen $\lambda_\varkappa$ negativ sein, denn andernfalls wäre der absolute Betrag desselben in bekannter Weise gröfser zu machen als jede vorgegebene Gröfse, ohne dafs $g_2$ verschwände. — Man sieht also, dafs die ganzen Zahlen $\lambda_\varkappa$ nothwendig positiv oder Null, dafs $g_1$ und $g_2$ theilbar und somit $\mu \geqq \nu$ sein mufs.

Erinnern wir uns aber, dafs man zwei ganzen Functionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ stets zwei weitere ganze Functionen

$$f_0 t^{\mu-\nu} + f_1 t^{\mu-\nu-1} + \cdots + f_{\mu-\nu} \quad \text{und} \quad \varphi_1 t^{\nu-1} + \varphi_2 t^{\nu-2} + \cdots + \varphi_\nu$$

so zuordnen kann, dafs die Gleichung:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= t^\mu + g'_1 t^{\mu-1} + \cdots + g'_\mu \\ &= (t^\nu + g''_1 t^{\nu-1} + \cdots + g''_\nu)(f_0 t^{\mu-\nu} + f_1 t^{\mu-\nu-1} + \cdots f_{\mu-\nu}) \\ &\quad + \varphi_1 t^{\nu-1} + \varphi_2 t^{\nu-2} + \cdots + \varphi_\nu \end{aligned}$$

besteht und hierin die $\nu$ aus den Gröfsen $g'_1, \ldots g'_\mu$ und $g''_1, \ldots g''_\nu$ durch Addition und Multiplication zusammengesetzten Ausdrücke $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$ verschwinden müssen, wenn $g_1$ durch $g_2$ theilbar sein soll, dann erhalten wir die für die Theilbarkeit von $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_2$ nothwendige Bedingung: es müssen die Potenzreihen

$$\varphi_1(t_1, t_2, \ldots t_n), \ \ldots \ \varphi_\nu(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

für jede Stelle der Umgebung $r$ von $(0)$ und daher identisch verschwinden. Dann aber ist

$$\begin{aligned} g_1(t, t_1, \ldots t_n) &= g_2(t, t_1, \ldots t_n) \cdot (f_0(t_1, \ldots t_n) t^{\mu-\nu} + \cdots + f_{\mu-\nu}(t_1, t_2, \ldots t_n)) \\ &= g_2(t, t_1, \ldots t_n) \cdot g_0(t, t_1, \ldots t_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n) &= g_2(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n) \\ \mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n) &= g_2(t, t_1, \ldots t_n) \cdot g_0(t, t_1, \ldots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n) \\ &= g_0(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n) \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)} \\ &= \mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_0(t, t_1, \ldots t_n). \end{aligned}$$

Führt man in der neuen Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}_0$ wieder die Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ ein, so erhält man wirklich

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n)} = \mathfrak{P}_0(x, x_1, \ldots x_n)\,.$$

Da der Stelle $t = 0, t_1 = 0, \ldots t_n = 0$ die Stelle $x = 0, x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ entspricht und daselbst $g_0$ zugleich mit den Potenzreihen $f_0, f_1, \ldots f_{\mu-\nu}$ verschwindet, hat der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$ an der Stelle Null den Werth Null. —

Es kann auch eintreten, daſs die beiden an der Stelle (0) verschwindenden Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ einen gemeinsamen Theiler

$$\mathfrak{P}(x, x_1, \ldots x_n)$$

besitzen, der ebenfalls an der Stelle (0) verschwindet, dann hat der Quotient von

$$\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}(x, x_1, \ldots x_n) \cdot \mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)$$
$$\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}(x, x_1, \ldots x_n) \cdot \mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)$$

in dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Reihen die Bedeutung von

$$\frac{\mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)}\,.$$

Die nothwendige und hinreichende Existenzbedingung eines gemeinsamen Theilers $\mathfrak{P}(x, x_1, \ldots x_n)$ ist nicht mehr schwer zu finden.

Stellt man ebenso wie früher

$\mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n)$ in der Form $g_1(t, t_1, \ldots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)$

$\mathfrak{P}_2(x, x_1, \ldots x_n)$ in der Form $g_2(t, t_1, \ldots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)$

dar und drückt den der Annahme nach existirenden Theiler $\mathfrak{P}(x, x_1, \ldots x_n)$ durch ein Product aus:

$$g(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}(t, t_1, \ldots t_n)\,,$$

wo $g$ eine ganze Function $\lambda^{\text{ten}}$ Grades in $t$ sei, deren Coefficienten nur Potenzreihen von $t_1, t_2, \ldots t_n$ sind:

$$g(t, t_1, \ldots t_n) = t^\lambda + h_1(t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot t^{\lambda-1} + \cdots + h_\lambda(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

und wo die Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(t, t_1, \ldots t_n)$ für $t = t_1 = \cdots = t_n = 0$ nicht verschwindet, so folgt:

$$g_1(t, t_1, \ldots t_n) = g(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}(t, t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_1(t, t_1, \ldots t_n)}\,\mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n) =$$
$$= g(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \mathfrak{P}_1^{(2)}(t, t_1, \ldots t_n)$$
$$g_2(t, t_1, \ldots t_n) = g(t, t_1, \ldots t_n)\,\frac{\overline{\mathfrak{P}}(t, t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(t, t_1, \ldots t_n)} \cdot \mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)$$
$$= g(t, t_1, \ldots t_n) \cdot \mathfrak{P}_2^{(2)}(t, t_1, \ldots t_n)$$

und darnach sind $g_1$ und $g_2$ durch $g(t, t_1, \ldots t_n)$ theilbar.

Die Bedingung, unter welcher

$$g_1(t, t_1, \dots t_n) = t^\mu + g_1'(t_1, t_2, \dots t_n) t^{\mu-1} + \cdots + g_\mu'(t_1, \dots t_n)$$
$$g_2(t, t_1, \dots t_n) = t^\nu + g_1''(t_1, t_2, \dots t_n) t^{\nu-1} + \cdots + g_\nu''(t_1, \dots t_n)$$

einen gemeinsamen Theiler $g(t, t_1, \dots t_n)$ $\lambda^{\text{ten}}$ Grades in $t$ besitzen, besteht aber in dem Verschwinden $\lambda$ ganzer Functionen der Coefficienten $g_1', \dots g_\mu'$ und $g_1'', g_2'', \dots g_\nu''$. Man sieht darnach, daſs nothwendig mindestens eine Potenzreihe

$$\mathfrak{p}(t_1, t_2, \dots t_n)$$

identisch verschwinden muſs, wenn zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ einen gemeinsamen Theiler:

$$g(t, t_1, \dots t_n) = \mathfrak{P}(t, t_1, \dots t_n)$$

aufweisen sollen.

Umgekehrt werden unter den in Rede stehenden Bedingungen die Functionen von $t$:

$$g_1(t, t_1, \dots t_n), \quad g_2(t, t_1, \dots t_n)$$

einen gemeinsamen Theiler $\lambda^{\text{ten}}$ Grades haben, dessen Nullstellen $t^{(1)}$, $t^{(2)} \dots t^{(\lambda)}$ bei hinlänglich beschränktem Bereiche für die Gröſsen $t_1, \dots t_n$ einen endlichen Betrag besitzen, auf daſs in dem Theiler die Coefficienten der $t$ Potenzen convergente Potenzreihen von $t_1, t_2, \dots t_n$ sind. Heiſst der Theiler $g(t, t_1, \dots t_n)$, so wird

$$g_1(t, t_1, \dots t_n) = g(t, t_1, \dots t_n)\, g_1^{(1)}(t, t_1, \dots t_n)$$
$$g_2(t, t_1, \dots t_n) = g(t, t_1, \dots t_n)\, g_2^{(1)}(t, t_1, \dots t_n),$$

wenn $g_1^{(1)}$ und $g_2^{(1)}$ wieder ganze Functionen von $t$ bezeichnen, deren Coefficienten Potenzreihen von $t_1 \dots t_n$ sind. Ferner ist aber:

$$\mathfrak{P}_1(x, x_1, \dots x_n) = g(t, t_1, \dots t_n)\, \mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \dots x_n)$$
$$\mathfrak{P}_2(x, x_1, \dots x_n) = g(t, t_1, \dots t_n)\, \mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \dots x_n),$$

und wenn man

$$g(t, t_1, \dots t_n) = \mathfrak{P}(x, x_1, \dots x_n)$$

setzt, kann man die gegebenen Potenzreihen auf die Form bringen:

$$\mathfrak{P}(x, x_1, \dots x_n)\, \mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \dots x_n)$$
$$\mathfrak{P}(x, x_1, \dots x_n)\, \mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \dots x_n).$$

Hier besitzen die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ keinen gemeinsamen Theiler mehr, denn andernfalls müſsten in

$$\mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \dots x_n) = G_1(t, t_1, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_1^{(1)}(t, t_1, \dots t_n)$$
$$\mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \dots x_n) = G_2(t, t_1, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)}(t, t_1, \dots t_n)$$

die Functionen von $t$ $G_1$ und $G_2$ einen gemeinsamen Theiler haben und

dann hätten $g_1$ und $g_2$ einen Theiler von höherem als dem $\lambda^{\text{ten}}$ Grade in $t$, was mit der obigen Annahme in Widerspruch steht.

Die Bedingungen sind somit nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend. —

Ist nunmehr ein Quotient zweier an der Stelle (0) verschwindender Potenzreihen vorgelegt und hat man Zähler und Nenner von den gemeinsamen Theilern befreit, so kann der neue Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)}$$

immer noch eine verschiedenartige Beschaffenheit in der Umgebung der Stelle (0) haben.

Erstens kann $\mathfrak{P}_1^{(1)}(0, 0, \ldots 0)$ verschwinden, ohne dafs $\mathfrak{P}_2^{(1)}(0, 0, \ldots 0)$ Null ist, oder es kann $\mathfrak{P}_1^{(1)}(0, 0, \ldots 0)$ von Null verschieden sein und $\mathfrak{P}_2^{(1)}(0, 0, \ldots 0)$ verschwinden oder es haben endlich beide Potenzreihen an der Stelle (0) den Werth Null.

Im zweiten Falle ersetze man $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ durch: $G_2(t, t_1, \ldots t_n)\,\mathfrak{P}_2^{(1)}(t, t_1, \ldots t_n)$ oder

$$(t^\nu + G_1'' t^{\nu-1} + \cdots + G_\nu'')\,\overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)}(t, t_1, \ldots t_n),$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)}(0, 0, \ldots 0)$ nicht Null ist, aber die Potenzreihen $G''$ an der Stelle

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$$

verschwinden. Offenbar gibt es dann in jeder Umgebung der Stelle (0) eine $2n$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Stellen, wo der Quotient unendlich grofs wird, und ebenso wird er an der Stelle (0) selbst unendlich grofs. Werthesysteme $(t, t_1, t_2, \ldots t_n)$, für die

$$t^\nu + G_1'' t^{\nu-1} + \cdots + G_\nu''$$

nicht Null ist, definiren Stellen, in deren Umgebung der Quotient regulären Verhaltens ist. —

Verschwinden aber $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ an der Stelle (0) (ohne dafs $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ durch $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ theilbar ist), so gibt es in jeder Umgebung dieser Stelle unendlich viele Werthesysteme, für die $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ verschwinden.

Setzt man wieder

$$\mathfrak{P}_1^{(1)} = G_1\,\overline{\mathfrak{P}}_1^{(1)}, \quad \overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)} = G_2\,\mathfrak{P}_2^{(1)},$$

so mufs zwischen den Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_n$ eine bestimmte Gleichung:

$$\mathfrak{p}(t_1, t_2, \ldots t_n) = 0$$

bestehen, wenn $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ gleichzeitig Null sein sollen. Jeder Lösung derselben gehört eine der besagten Stellen zu. Offenbar gibt es aber auch unendlich viele Stellen in jeder Umgebung der Stelle (0), an denen $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ oder $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ verschwindet und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ respective $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ von Null

verschieden sind, d. h. der Quotient kann an unendlich vielen Stellen unendlich grofs werden, an anderen aber verschwinden. — Der Quotient hat dann in einer unendlich kleinen Umgebung von (0) überhaupt keinen bestimmten Werth.*)

Ist $n > 1$, gibt es also mehr als zwei Variable, so constituiren die Stellen, für welche $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ verschwinden, eine $(2n-2)$ fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit und an jeder dieser Stellen $(x', x_1', \ldots x_n')$ hat der Quotient $\dfrac{\mathfrak{P}_1^{(1)}}{\mathfrak{P}_2^{(1)}}$ wiederum keinen bestimmten Werth.

Dieser letzte Satz beruht darauf, dafs die durch die Transformation:

$$x = x' + u, \quad x_1 = x_1' + u_1, \ldots x_n = x_n' + u_n$$

entstehenden Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_1^{(1)}(x' + u, x_1' + u_1, \ldots x_n' + u_n), \quad \mathfrak{P}_2^{(1)}(x' + u, x_1' + u_1, \ldots x_n' + u_n)$$

keinen an der Stelle $u = 0, u_1 = 0, \ldots u_n = 0$ verschwindenden gemeinsamen Theiler besitzen, wenn $\mathfrak{P}_1^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}(x, x_1, \ldots x_n)$ keinen haben.

In der That ist $(x', x_1', \ldots x_n')$ eine Stelle in der Umgebung von (0), in welcher die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_1^{(1)}$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)}$ nicht verschwinden, und entspricht derselben die Stelle

$$t = t', \quad t_1 = t_1', \ldots t_n = t_n',$$

und setzt man

$$t = t' + v, \quad t_1 = t_1' + v_1, \ldots t_n = t_n' + v_n,$$

so wird

$$\mathfrak{P}_1^{(1)}(x' + u, x_1' + u_1, \ldots x_n' + u_n)$$
$$= G_1(t' + v, t_1' + v_1, \ldots t_n' + v_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_1^{(1)}(t' + v_1, \ldots t_n' + v_n)$$
$$\mathfrak{P}_2^{(1)}(x' + u, x_1' + u_1, \ldots x_n' + u_n)$$
$$= G_2(t' + v, t_1' + v_1, \ldots t_n' + v_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_2^{(1)}(t' + v_1, \ldots t_n' + v_n),$$

wobei

$$G_1(t', t_1', \ldots t_n') \quad \text{und} \quad G_2(t', t_1', \ldots t_n')$$

Null sind. Da aber weder $G_1(t' + v, t_1', \ldots t_n')$ und $G_2(t' + v, t_1', \ldots t_n')$ für jeden Werth von $v$ verschwindet, kann man

$$G_1(t' + v, t_1' + v_1, \ldots t_n' + v_n)$$

die Form

$$(v^m + \mathfrak{g}_1'(v_1, \ldots v_n)\, v^{m-1} + \cdots + \mathfrak{g}_m'(v_1, \ldots v_n))\, \mathfrak{P}_1^{(3)}(v, v_1, \ldots v_n),$$

*) Vergleiche auch § 23.

die Form

$$G_2(t' + v, t_1' + v_1, \dots t_n' + v_n)$$

$$(v^n + \mathfrak{g}_1''(v_1, \dots v_n)v^{n-1} + \cdots + \mathfrak{g}_n''(v_1, \dots v_n))\,\mathfrak{P}_2^{(3)}(v, v_1, \dots v_n)$$

geben, wo $\mathfrak{P}_1^{(3)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(3)}$ an der Stelle $v = v_1 = \cdots = v_n = 0$ nicht verschwinden, aber die Reihen $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ für $v_1 = \cdots = v_n = 0$ Null werden.

Sollte nun $\mathfrak{P}_1^{(1)}(x' + u, \dots x_n' + u_n)$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}(x' + u, \dots x_n' + u_n)$ einen an der Stelle $(u = 0, \dots u_n = 0)$ verschwindenden Theiler haben, so müſsten die Gleichungen $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ für jedes System unendlich kleiner Werthe von $v_1, \dots v_n$ unendlich kleine Lösungen $v$ haben, und das ist unmöglich, indem sonst die Resultante von

$$G_1(t, t_1, \dots t_n) \quad \text{und} \quad G_2(t, t_1, \dots t_n)$$

identisch verschwände, was mit der Annahme nicht verträglich ist, daſs $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

## § 70. Über die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen.

Gehen wir wieder zu einer durch ein primitives Element:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \dots x_n \mid a_1, a_2, \dots a_n) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \dots x_n \mid (a))$$

definirten eindeutigen Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ zurück, so ist nun klar, daſs sich diese Function in der Umgebung einer Stelle $(x_1', x_2', \dots x_n')$ nur regulär verhalten kann, sofern eine für $x_1 = x_1', \dots x_n = x_n'$ verschwindende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n \mid (x'))$$

der Beschaffenheit anzugeben ist, daſs das Product

$$\mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n \mid (x'))\, f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

an den Nullstellen von $\mathfrak{P}_2$, welche einer endlichen wenn auch noch so kleinen Umgebung von $(x')$ angehören, verschwindet. Setzt man aber

$$\mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n \mid (x'))\, f(x_1, x_2, \dots x_n) = \mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \dots x_n \mid (x')),$$

wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1$ für $x_1 = x_1' \dots x_n = x_n'$ Null ist, und befreit in dem Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$ $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von den an der Stelle $(x')$ verschwindenden gemeinsamen Theilern, auf daſs $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$ etwa in $\frac{\mathfrak{P}_1^{(1)}}{\mathfrak{P}_2^{(1)}}$ übergeht, so muſs ferner $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ an der Stelle $(x')$ von Null verschieden sein. Dann und nur dann wird $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ regulären Verhaltens sein.

Wenn aber $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ an der Stelle $(x')$ verschwindet, ohne daſs $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ daselbst Null ist, so wird $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ an unendlich vielen Stellen einer unendlich kleinen Umgebung von $(x')$, die eine $(2n - 2)$ fach

ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden und für $(x_1 = x_1' \ldots x_n = x_n')$ selbst unendlich grofs werden.

Ist endlich sowohl $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ als auch $\mathfrak{P}_2^{(1)}$ an der Stelle $(x')$ Null, so hat $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ weder in $(x')$ noch an unendlich vielen Stellen einer $(2n-4)$ fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit aus einer unendlich kleinen Umgebung von $(x')$ einen bestimmten Werth. —

Die hier genannten nicht regulären Stellen von $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ heifsen *aufserwesentlich singuläre Stellen erster und zweiter Art.* Man definirt also eine solche Stelle $(x')$ dadurch, dafs man sagt, es gibt eine an der Stelle $(x')$ verschwindende Potenzreihe $\mathfrak{P}_2$ derart, dafs das Product

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n | (x'))\, f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

in einer Umgebung von $(x')$ regulären Verhaltens, d. h. durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n | (x'))$$

darstellbar ist, welche aber nicht durch $\mathfrak{P}_2$ theilbár ist. —

Im Falle einer Variabeln geht diese Definition der aufserwesentlich singulären Stelle gerade in die früher gebrauchte über.

Eine Stelle $(x_1', x_2', \ldots x_n')$ heifst eine *wesentlich singuläre*, wenn es keine für $(x_1 = x_1', \ldots x_n = x_n')$ verschwindende Potenzreihe der Beschaffenheit gibt, dafs das Product derselben und $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in einer Umgebung von $(x')$ regulär wird. —

Definirt man nun eine analytische Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in dem gemeinsamen Convergenzbereiche $(\mathfrak{A})$ zweier Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n | (a)), \quad \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n | (a))$$

dadurch, dafs man an den Stellen $(x')$, wo diese Reihen nicht gleichzeitig verschwinden,

$$f(x_1', \ldots x_n') = \frac{\mathfrak{P}_1(x_1', \ldots x_n' | (a))}{\mathfrak{P}_2(x_1', \ldots x_n' | (a))}$$

setzt und an den Stellen $(x'')$, wo beide Reihen Null sind, $f(x_1, \ldots x_n)$ den Werth gibt, den der Quotient der aus $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch Fortsetzung gewonnenen und von gemeinsamen Theilern befreiten Reihen nach Potenzen von $(x_\nu - x_\nu'')$ an der Stelle $(x'')$ besitzt, so ist auf diese Weise in dem Bereiche $(\mathfrak{A})$ eine eindeutige analytische Function bestimmt, die nur an denjenigen Stellen, wo sie unendlich oder unbestimmt ist, aufserwesentlich singuläre Stellen hat, während sie an den übrigen Stellen regulären Verhaltens ist.

Der Beweis beruht immer wieder auf den Darstellungen der Fortsetzungen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in der Umgebung einer Nullstelle.

Nach diesem Satze wird eine beständig convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, \ldots x_n)$ eine eindeutige Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ darstellen, die

sich in der Umgebung jeder im Endlichen gelegenen Stelle regulär verhält, und umgekehrt wird jede eindeutige im Endlichen durchaus reguläre Function durch eine beständig convergirende Reihe auszudrücken sein:

Der Quotient zweier beständig convergenten Reihen oder ganzen Functionen definirt eine eindeutige Function, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle, also höchstens außerwesentlich singuläre hat, an denen sie entweder den bestimmten Werth $\infty$ oder keinen bestimmten Werth annimmt.

*Eine analytische Function, die überall den Charakter einer rationalen Function besitzt*, d. h. *überall durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellbar ist, ist eine rationale Function ihrer Argumente.*

Wir nehmen an, daſs dieser Satz für Functionen von $(n-1)$ Variabeln bewiesen sei und zeigen seine Richtigkeit für eine Function

$$f(x_1, x_2, \dots x_n).\text{*)}$$

Dabei wollen wir festsetzen, daſs sich unsere Function in der Umgebung der Stelle (0) regulär verhalte, daſs also eine Entwicklung bestehe:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \mathfrak{P}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\lambda(x_2, x_3, \dots x_n) x_1^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda x_1^\lambda$$

und ferner soll $f(x_1, \dots x_n)$ für $(x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots x_n = 0)$ nicht Null sein.

Ist dann durch die Bedingungen:

$$|x_1| \leqq r, \quad |x_2| \leqq r, \dots |x_n| \leqq r$$

ein Bereich fixirt, für dessen Stellen $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \dots x_n)$ auch nicht verschwindet, und gibt man $x_n$ einen bestimmten Werth $b_n$, dessen absoluter Betrag kleiner ist als $r$, so wird $f(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, b_n)$ eine rationale Function der $(n-1)$ Argumente $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, denn wenn in der Umgebung einer beliebigen Stelle:

$$x_1 = a_1, \dots x_{n-1} = a_{n-1}, \quad x_n = b_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\sum\limits_\lambda C_\lambda (x_n - b_n)^\lambda}{\sum\limits_\lambda C_\lambda' (x_n - b_n)^\lambda}$$

ist, wo $C_\lambda$ und $C_\lambda'$ Potenzreihen von $(x_1 - a_1), \dots (x_{n-1} - a_{n-1})$ bezeichnen, so wird ja

$$f(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, b_n) = \frac{C_0}{C_0'},$$

d. h. $f(x_1, \dots x_{n-1}, b_n)$ ist in der Umgebung jeder Stelle $(a_1, \dots a_{n-1})$ durch den Quotienten zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_{n-1} \mid (a))$ und

*) Siehe Hurwitz, J. v. Kronecker u. Weierstrass, Bd. 94.

$\mathfrak{P}_0'(x_1, \ldots x_n \,|\, (a))$ darstellbar, wenn nur keine der Reihen $C_0$ und $C_0'$ identisch verschwindet. Das ist aber nicht möglich, weil mit $C_0 = 0$ $f(x_1, \ldots x_{n-1}, b_n)$ in der Umgebung $r$ der Stelle (0) stets Null und mit $C_0' = 0$ stets unendlich grofs wäre, was der Voraussetzung widerspricht, derzufolge diese Function in dem genannten Bereiche endlich und von Null verschieden ist.

Es folgt somit:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b_n) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\lambda^{(1)}(x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, b_n) x_1^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda^{(1)} x_1^\lambda$$

$$= \frac{G_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})}{G_2(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})} = \frac{B_0 + B_1 x_1 + \cdots + B_m x_1^m}{B_0' + B_1' x_1 + \cdots + B_m' x_1^m},$$

wo $B_\mu$ und $B_\mu'$ ganze rationale Functionen von $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ sind und eine der Functionen $B_m, B_m'$ von Null verschieden sein möge, so dafs eine der ganzen Functionen $G_1$ und $G_2$ in $x_1$ von $m^{\text{ten}}$ Grade ist. Setzt man nun

$$G_2(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda^{(1)} x_1^\lambda = G_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

und vergleicht die Coefficienten gleicher Potenzen von $x_1$, so müssen, wie man leicht sieht, die Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den Reihen:

$$\begin{array}{l} A_1^{(1)}\ A_2^{(1)}, \ldots A_{m+1}^{(1)} \\ A_2^{(1)}\ A_3^{(1)}, \ldots A_{m+2}^{(1)} \\ A_3^{(1)}\ A_4^{(1)}, \ldots A_{m+3}^{(1)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

verschwinden. Sucht man dann zu jeder Stelle $b_n$ eines in der Umgebung $r$ von $x_n = 0$ liegenden Bereiches $|x_n| \leqq r' < r$ den Grad der zugehörigen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b_n)$ in Bezug auf $x_1$, so bemerkt man, dafs unendlich vielen Stellen $x_n$ derselbe Grad zugehören mufs. In jeder Umgebung der Grenzstelle dieser $b_n$ werden defshalb die früheren Determinanten, deren Glieder $A_\lambda^{(1)}$ jetzt wieder durch $A_\lambda$ zu ersetzen sind, unabhängig von den Werthen der Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ d. h. identisch verschwinden. Dann aber lassen sich die unendlich vielen Gleichungen

$$A_\nu f_m + A_{\nu+1} f_{m-1} + \cdots + A_{\nu+m} f_0 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

durch $(m+1)$ in der Umgebung der Stelle $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ reguläre Functionen von $x_2, \ldots x_n$ lösen, die daselbst nicht sämmtlich Null sind.

Indem hiermit

$$f(x_1, \ldots x_n) \cdot (f_0 + f_1 x_1 + \cdots + f_m x_1^m) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda x_1^\lambda (f_0 + f_1 x_1 + \cdots + f_m x_1^m)$$

$$= \varphi_0 + \varphi_1 x_1 + \cdots + \varphi_m x_1^m$$

wird, mufs auch

$$f(x_1, \dots x_n) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 x_1 + \cdots + \varphi_m x_1^m}{f_0 + f_1 x_1 + \cdots + f_m x_1^m}$$

sein, worin die Gröfsen $\varphi$ und $f$ in der Umgebung von $x_2 = 0, \dots x_n = 0$ reguläre Functionen sind.

Gibt man nun $x_1$ $(2m + 1)$ verschiedene in hinlänglicher Nähe von $x_1 = 0$ liegende Werthe, so erhält man neben

$$f(x_1, \dots x_n) \cdot (f_0 + f_1 x_1 + \cdots + f_m x_1^m) = \varphi_0 + \varphi_1 x_1 + \cdots + \varphi_m x_1^m$$

noch $(2m + 1)$ Gleichungen:

$$f(b_1^{(\mu)}, x_2, \dots x_n) \cdot (f_0 + f_1 b_1^{(\mu)} + \cdots + f_m (b_1^{(\mu)})^m) = \varphi_0 + \varphi_1 b_1^{(\mu)} + \cdots + \varphi_m (b_1^{\mu})^m$$
$$(\mu = 1, 2, \dots 2m + 1)$$

und wenn man aus allen Gleichungen $f_0, f_1, \dots f_m, \varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_m$ eliminirt, ergibt sich eine lineare Relation in

$$f(x_1, \dots x_n),\ f(b_1^{(\mu)}, x_2, \dots x_n) \text{ und den Gröfsen } x_1, x_1^2, \dots x_1^m.$$

$f(x_1, \dots x_n)$ kann darnach als rationale Function von $x_1, \dots x_n$ dargestellt werden, denn $f(b_1^{(\mu)}, x_2 \dots x_n)$ sind rationale Functionen von $x_2, x_3, \dots x_n$.

In dem Ausnahmsfalle, wo die Determinante $(2m + 1)^{\text{ten}}$ Grades dieses Gleichungssystemes bei jedem beliebigen Werthesysteme

$$b_1^{(\mu)} \quad (\mu = 1, 2, \dots 2m + 1)$$

verschwindet, gehe man auf die Determinanten $(2m)^{\text{ten}}$ Grades, die aus der früheren hervorgehen. Wenn eine derselben von Null verschieden ist, folgt $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ wieder als rationale Function von $x_1, \dots x_n$.

Der Satz gilt also allgemein, wie er oben ausgesprochen wurde. —

Erinnern wir uns an den Entwicklungsgang bei der Darstellung einer eindeutigen Function einer Variabeln und wollten wir denselben hierher übertragen, so müfsten wir zunächst beweisen, dafs eine eindeutige analytische Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, die in der Umgebung jeder endlichen Stelle durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellbar ist, die also im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, immer durch den Quotienten zweier beständig convergenter Potenzreihen dargestellt werden kann.

Man sollte meinen, dafs sich dieser Satz beweisen lasse, wenn man eine ganze transcendente Function nicht blos durch eine beständig convergente Potenzreihe, sondern auch in der Form eines Productes ausdrücken könnte; doch diese Darstellungsform ist nicht ausgeführt, aufser wenn festgesetzt ist, dafs die Nullstellen der ganzen Function $G(x_1, x_2, \dots x_n)$ in ähnlicher Weise zu ordnen sind, wie die einer

Function einer Variabeln; ich meine, wenn $G(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die Nullstellen einer Reihe ganzer rationaler Functionen

$$g_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad g_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots \quad g_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots$$

hat, die der Reihe nach in immer weiteren Umgebungen $\varrho_\nu$ einer Anfangsstelle z. B. der Stelle (0) keine Nullstellen haben.*)

Wir gehen auf diese Besonderheiten nicht ein und überlassen es dem Leser, die Schwierigkeiten selbst zu ermitteln, welche dem Beweise des genannten Problems erwachsen.

## § 71. Das irreductible algebraische Gebilde $m^{\text{ter}}$ Stufe im Gebiete von $n+1$ Gröſsen.

Wir wollen unsere Auseinandersetzungen nicht beenden, ohne noch einen Ausblick auf besondere Functionen mehrerer Variabeln zu gewähren.

Es sei eine algebraische Gleichung

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

von dem $m^{\text{ten}}$ Grade in $y$ vorgelegt und $(b, a_1, a_2, \ldots a_n)$ sei ein Werthesystem, welches der Gleichung genügt, auf daſs

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(y-b) + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\nu}\right)(x_\nu - a_\nu)$$
$$+ (y-b, x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)_2 + \cdots = 0$$

ist. Wenn die Gröſsen

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right), \ldots \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)$$

nicht alle verschwinden, so kann man auf unendlich viele Arten $n(n+1)$ Constante

$$\alpha_{\lambda,\mu} \; (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so wählen, daſs die Determinante des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(y-b) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)(x_1-a_1) + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)(x_n-a_n) &= t_0 \\
\alpha_{01}\,(y-b) + \alpha_{11}\,(x_1-a_1) + \cdots + \alpha_{n1}\,(x_n-a_n) &= t_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{0n}\,(y-b) + \alpha_{1n}\,(x_1-a_1) + \cdots + \alpha_{nn}\,(x_n-a_n) &= t_n
\end{aligned}$$

auch nicht verschwindet und darum entspricht jedem Werthesysteme $(y, x_1, \ldots x_n)$ in der Umgebung von $(b, a_1, \ldots a_n)$ ein Werthesystem $(t_0, t_1, \ldots t_n)$ in der Umgebung der Stelle (0).

---

*) Appell, Acta mathematica Bd. 2 und Biermann, Sitzber. der Wiener Akad. Bd. 89.

Durch Einführung der neuen Gröfsen $t_0, t_1, \ldots t_n$ erhält $G(y, x_1, \ldots x_n)$ in der Umgebung von $(b, a_1, \ldots a_n)$ die Form:

$$t_0 + (t_0, t_1, \ldots t_n)_1 + (t_0, t_1, \ldots t_n)_2 + \cdots,$$

wo $(t_0, t_1, \ldots t_n)_\mu$ eine homogene Function $\mu^{\text{ter}}$ Dimension ist.

Nach dem Satze des § 68 kann man den genannten Ausdruck in der Form

$$(t_0 - \mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \ldots t_n))\, \overline{\mathfrak{P}}_0(t_0, t_1, \ldots t_n)$$

schreiben, wo $\mathfrak{P}_0(0, 0, \ldots 0)$ verschwindet, indefs $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, 0, \ldots 0)$ endlich und von Null verschieden ist.

Setzt man jetzt

$$t_0 = \mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

und löst die früheren Gleichungen nach $y - b, x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n$ auf, so gehen $(n + 1)$ für $t_1 = \cdots = t_n = 0$ verschwindende Potenzreihen

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t_1, t_2, \ldots t_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$
$$y - b = \mathfrak{P}_{n+1}(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

hervor, welche das durch die gegebene Gleichung definirte Gebilde in der Umgebung von $(b, a_1, \ldots a_n)$ darstellen, solange sie convergiren. Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_1}\right)_0, & \cdots & \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial t_1}\right)_0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_n}\right)_0, & \cdots & \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial t_n}\right)_0 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, kann man die Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_n$ durch Potenzreihen

$$\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1, \ldots x_n \mid (a))$$

darstellen und es folgt eine Entwicklung der Form:

$$y - b = \mathfrak{P}(x_1, \ldots x_n \mid (a)),$$

aber andernfalls ist eine solche Darstellung unmöglich.

Läfst die ganze Function $G(y, x_1, \ldots x_n)$ in der Umgebung ihrer Nullstelle $(b, a_1, \ldots a_n)$ nach Einführung der Bezeichnungen:

$$y - b = \eta, \quad x_\nu - a_\nu = \xi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

nur die Schreibweise zu:

$$(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_\mu + (\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_{\mu+1} + \cdots = \Phi(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n),$$

wo die Glieder niedrigster Dimension von höherer als der ersten Dimension sind, so bedarf man zur Darstellung des irreductiblen algebraischen

Gebildes $n^{\text{ter}}$ Stufe mehr als ein Functionensystem der obigen Gestalt, aber doch nur eine endliche Anzahl.

Hat man aber das algebraische Gebilde in der Umgebung jeder Stelle durch Potenzreihen in $n$ Hilfsvariabeln ausgedrückt, so kann man das Verhalten jeder rationalen Function

$$z = R(y, x_1, \ldots x_n),$$

die sich wieder auf die Form

$$\frac{f(y, x_1, \ldots x_n)}{g(x_1, \ldots x_n)}$$

bringen läfst, in der $f$ und $g$ ganze rationale Functionen ihrer Argumente sind, in der Umgebung jeder Stelle des Gebildes beurtheilen, denn man kann sie allgemein in den Quotienten zweier Potenzreihen von $t_1, t_2, \ldots t_n$ entwickeln.

Denken wir Zähler und Nenner des Quotienten im Falle der gemeinsamen Nullstelle $t_1 = \cdots = t_n = 0$ von gemeinsamen Theilern befreit und behält der Nenner hierbei die Nullstelle, so nenne man die aufserwesentlich singuläre Stelle von der $\mu^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn das Glied niedrigster Dimension im Nenner die $\mu^{\text{te}}$ Dimension besitzt.

Zwischen $z$ und $x_1, x_2, \ldots x_n$ besteht eine algebraische Gleichung. Um diese zu erhalten, bilde man das Product

$$\prod_{\mu} (z - R(y^{(\mu)}, x_1, \ldots x_n)) = \frac{\Psi(z, x_1, \ldots x_n)}{\psi(z, x_1 \ldots x_n)},$$

wo $y^{(\mu)}$ die zu einem Werthesysteme $x_1, \ldots x_n$ gehörigen Werthe von $y$ sind, und setze

$$\Psi^{(m)}(z, x_1, \ldots x_n) = 0.$$

Die Function $\Psi$ ist irreductibel oder die ganzzahlige Potenz einer solchen.

Nehmen wir ein System $n$ rationaler Functionen

$$z_\nu = R_\nu(y, x_1, \ldots x_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

auf und fragen nach den Stellen $(y, x_1, \ldots x_n)$, für welche diese Functionen vorgegebene Werthe erhalten, so müssen die Werthe von $x_1, \ldots x_n$ den $n$ algebraischen Gleichungen

$$\Psi_\nu(z_\nu, x_1, \ldots x_n) = 0 \quad (\nu = 1; 2, \ldots n)$$

genügen. Den einer Lösung $x_1' \ldots x_n'$ zugehörigen Werth von $y$ oder die entsprechenden $y$-Werthe müssen den Gleichungen

$$G(y, x_1, \ldots x_n) = 0 \text{ und } z_\nu - R_\nu(y, x_1, \ldots x_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

genügen.

Jetzt mufs sich zeigen lassen, dafs bei gehöriger Zählung der vielfachen Stellen das gegebene System rationaler Functionen jedes Werthe-

system $(z_1, \ldots z_n)$ im Allgemeinen an gleich viel Stellen $(x_1, \ldots x_n, y)$ annimmt*). Die Zahl, welche angibt, an wie viel Stellen ein System von $n$ rationalen Functionen die Werthe $z_1, \ldots z_n$ erhält, heifse wieder der *Grad* des Systems.

Die Zählung der vielfachen Stellen z. B. einer Unendlichkeitsstelle vollziehe man nach folgender Definition:

Ist

$$R_\nu(y, x_1, \ldots x_n)$$

in der Umgebung einer Stelle $(x', x_1' \ldots x_n')$ des Gebildes in der Form

$$\frac{\mathfrak{P}_\nu^{(1)}(t_1 \ldots t_n)}{\mathfrak{P}_\nu^{(2)}(t_1 \ldots t_n)}$$

darstellbar und verschwinden alle $n$ Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu^{(2)}$ an der Stelle (0), die Reihen $\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$ aber nicht, so heifse das Functionensystem $R_1, \ldots R_n$ von der $\mu^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{P}_1^{(2)}}{\partial t_1}, & \cdots & \dfrac{\partial \mathfrak{P}_n^{(2)}}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathfrak{P}_1^{(2)}}{\partial t_n}, & \cdots & \dfrac{\partial \mathfrak{P}_n^{(2)}}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

in eine Potenzreihe zu entwickeln ist, die mit Gliedern der $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Dimension beginnt.

Existirt kein System rationaler Functionen, welches nur $\varrho$ Unendlichkeitsstellen erster Ordnung besitzt, gibt es aber Functionensysteme, die an $(\varrho + 1)$ beliebig gewählten Stellen von der ersten Ordnung unendlich werden, so nenne man $\varrho$ wieder den *Rang* der algebraischen Gleichung $G = 0$.

Liegen $(n + 1)$ rationale Functionen

$$\xi_\nu = R_\nu(y, x_1, \ldots x_n), \quad (\nu = 1, 2 \ldots n) \text{ und } \eta = R_{n+1}(y, x_1, \ldots x_n)$$

vor, die $(n + 1)$ verschiedene Systeme der früheren Art constituiren, und deren Grade

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n+1}$$

heifsen mögen, so gehören zu einem Werthesystem $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ der

*) Im Falle eines Gebildes höherer als erster Stufe kann es nämlich Mannigfaltigkeiten von Stellen $(y, x_1, \ldots x_n)$ geben, für die alle rationalen Functionen unbestimmt werden und darum ist oben die Beschränkung durch den Zusatz „im Allgemeinen" nothwendig.

ersten $n$ rationalen Functionen vom Grade $\mu_1$ $\mu_1$ Werthesysteme $y, x_1, \dots x_n$ und $\mu_1$ Werthe $\eta$, die aus einer Gleichung

$$\Gamma(\eta, \xi_1, \dots \xi_n) = 0$$

hervorgehen.

Diese Gleichung ist die Transformirte der gegebenen. Man kann sie umgekehrt in die letztere transformiren, wenn nur einmal einem Werthesysteme $\xi_1, \dots \xi_n$ $\mu_1$ verschiedene Lösungen $\eta$ entsprechen, oder wenn bei der Bildung des Productes

$$\prod_\lambda (\eta - R_{n+1}(y^{(\lambda)}, x_1^{(\lambda)}, \dots x_n^{(\lambda)})) = \frac{\Psi_{n+1}(\eta, \xi_1, \dots \xi_n)}{\Psi_{n+1}(\xi_1, \dots \xi_n)},$$

wo $x_1^{(\lambda)}, \dots x_n^{(\lambda)}, y^{(\lambda)}$ die zu $\xi_1 \dots \xi_n$ gehörendem Werthesysteme $x_1, \dots x_n, y$ bezeichnen, $\Psi_{n+1}$ irreductibel und nicht die ganzzahlige Potenz einer irreductiblen Function ist.

Die durch die algebraischen Gleichungen

$$G(y, x_1, \dots x_n) = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma(\eta, \xi_1, \dots \xi_n) = 0$$

definirten Gebilde $n^{\text{ter}}$ Stufe im Gebiete von $(n+1)$ Gröfsen, deren Stellen (wieder nur im Allgemeinen) einander wechselseitig entsprechen, rechne man zu einer *Klasse* und deren charakteristische Zahl ist der früher definirte Rang $\varrho$, denn dieser ist für jedes Individuum der Klasse derselbe.

Nach diesen Definitionen ist ersichtlich, wie man wieder die Monogenität des irreductiblen Gebildes zu beweisen hat.

Es entsteht nun auch die Frage, ob die algebraischen Gebilde $n^{\text{ter}}$ Stufe im Gebiete von $n+1$ Gröfsen durch eindeutige transcendente Functionen von $n$ unabhängigen Variabeln $x_1, \dots x_n$ zu lösen sind, d. h. ob man $x_1, \dots x_n$, $y$ als eindeutige Functionen von $n$ Variabeln $u_1, \dots u_n$ betrachten kann:

$$x_\nu = f_\nu(u_1, u_2, \dots u_n) \quad (\nu = 1, 2, \dots n), \quad y = f_{n+1}(u_1, u_2, \dots u_n),$$

die in der vorgegebenen algebraischen Beziehung stehen.

Es ist zu vermuthen, dafs die Gleichungen $G(y, x_1, \dots x_n) = 0$ ersten Ranges durch $2n$ fach periodische Functionen zu lösen sind, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzen*). Hier ist unter einer $2n$ fach periodischen Function $f(u_1, u_2, \dots u_n)$ eine Function der Beschaffenheit verstanden, dafs für $2n$ Systeme constanter Gröfsen

$$(P_1^{(\lambda)}, P_2^{(\lambda)}, \dots P_n^{(\lambda)}) \quad (\lambda = 1, 2, \dots 2n)$$

*) Vergleiche die Sätze von Weierstrass „über die $2n$ fach periodischen Functionen von $n$ Variabeln“ in dem Journal für reine und angewandte Math. Bd. 89.

bei beliebigen Werthen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Gleichungen

$$f(u_1 + P_1^{(\lambda)}, u_2 + P_2^{(\lambda)}, \ldots u_n + P_n^{(\lambda)}) = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots 2n)$$

und ferner die Relationen:

$$f(u_1 + \sum_{\lambda=1}^{2n} m_\lambda P_1^{(\lambda)}, \ldots u_n + \sum_{\lambda=1}^{2n} m_\lambda P_n^{(\lambda)}) = f(u_1, \ldots u_n)$$

bestehen, wo $m_1, m_2, \ldots m_{2n}$ willkürliche ganze Zahlen bezeichnen.

Andrerseits hat man zu erwarten, dafs die Gleichungen höheren als des ersten Ranges durch Functionen zu lösen sind, welche bei derselben Gruppe linearer Substitutionen ungeändert bleiben, die aus einer endlichen Anzahl $r$ von Fundamentalsubstitutionen

$$\left(u_\nu, \quad \frac{\alpha_{\nu 1}^{(p)} u_1 + \alpha_{\nu 2}^{(p)} u_2 + \cdots + \alpha_{\nu n}^{(p)} u_n + \alpha_{\nu, n+1}^{(p)}}{\alpha_{n+1,1}^{(p)} u_1 + \alpha_{n+1,2}^{(p)} u_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}^{(p)} u_n + \alpha_{n+1,n+1}^{(p)}}\right)$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n, \quad p = 1, 2, \ldots r$$

zusammenzusetzen sind*).

*) Siehe die Abhandlungen von Picard in dem 1. und 5. Bande der Acta mathematica.

## Verzeichnis bemerkter Druckfehler.

S. 9 Z. 11 v. o. statt „wie sich die“ lies „wie sich für die“; Z. 13 v. u. statt $n(m\,\text{mal})$ lies $(n\,\text{mal})$.
S. 45 Z. 15 v. o. lies „erfüllen“ statt „erfülle“.
S. 47 Z. 6 v. o. lies $i^2 + e^2 = 0$.
S. 58 Z. 11 v. o. ist das Wort „nie“ zu streichen.
S. 60 Z. 16 u. 17 v. o. lies „grofsem“ und „kleinem“.
S. 66 Z. 18 v. o. lies $r$ statt $x$.
S. 67 Z. 7 v. u. lies $|x_2 - x_1|$ statt $|x_2 - x_0|$.
S. 102 Z. 1 v. u. ist ganz zu streichen.
S. 109 Z. 3 v. u. lies $x_\nu$ statt $x_n$.
S. 115 Z. 12 v. o. lies $|f((a))| - \delta$ statt $|f((x))| - \delta$.
S. 129 Z. 11 v. u. lies $\prod_{\nu=1}^{n}(\xi_\mu - \xi_{m+\nu})$ statt $\prod_{\nu=1}^{n}(\xi_\mu - \xi_{m-\nu})$.
S. 141 Z. 5 v. o. lies „wichtigen“ statt „richtigen“.
S. 144 Z. 5 v. u. lies $\delta_m$ statt $d_m$.
S. 149 Z. 1 v. o. lies „den“ statt „denselben“.
S. 161 Z. 11 v. o. lies $\dfrac{(x_n - x_n^{(0)})^{\mu_n}}{\mu_n!}$ statt $\dfrac{(x - x_n^{(0)})^{\mu_n}}{\mu_n}$.

S. 162 Z. 11 v. u. lies $a_2 - a_1 + (x - a_2)$ statt $a_2 - a_1 + (x - a)$.
S. 187 Z. 8 v. o. lies $\mathfrak{p}_{n-2}(x|x_0)$ statt $\mathfrak{p}(x|x_0)$; Z. 9 v. o. $\mathfrak{p}_{n-2}(c|x_0)$ statt $\mathfrak{p}(c|x)$.
S. 187 Z. 10 v. o. schalte nach dem Worte „Potenzreihen" „$\mathfrak{p}(x|x_0)$" ein.
S. 194 Z. 4 v. u. lies $y^{m-\mu}y'^{\mu-1}$ statt $y^{m\mu}y'^{\mu-1}$.
S. 219 Z. 8 v. u. lies „von $g_1$, $\frac{\partial g_1}{\partial \xi_1}$ und" statt „von $\frac{\partial g_1}{\partial \xi_1}$ und".
S. 220 Z. 1, 2, 3 v. o. lies rechts von den Gleichheitszeichen $\xi_\nu$ statt $\xi$; Z. 3 v. u. lies $R(\xi_\nu, \eta_\nu)$ statt $R(\xi_\nu)$; Z. 4 v. u. lies $\overline{\psi}_\nu$ statt $\overline{\varphi}$.
S. 222 Z. 5 v. u. lies „endlichen" statt „unendlichen".
S. 223 Z. 9 v. o. lies $y^m - A \prod_{k=1}^{\lambda} (x - a_k)^{n_k} = 0$.
S. 225 Z. 12 v. o. lies $\psi, \psi_1, \ldots \psi_m$ statt $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$.
S. 226 Z. 13 v. o. schalte nach dem Worte „Grad" „$k$" ein.
S. 240 Z. 14 v. u. lies $\alpha_\mu$ statt $a_\mu$.
S. 252 Z. 3, 10, 12 v. u. lies $F_\nu^{(\varkappa)}$ statt $F_\nu^{(1)}$.
S. 261 Z. 2 u. 5 lies $\mathfrak{P}(z)$ statt $\mathfrak{P}_x(z)$.
S. 272 Z. 18 v. o. ist das Wort „Gleichung" zu streichen.
S. 278 Z. 13 v. u. lies $\frac{\alpha}{|a|}$ statt $\frac{a}{|\alpha|}$.
S. 289 Z. 1 v. u. lies $c_{\nu+2}$ statt $a_{\nu+2}$.
S. 290 Z. 15 v. o. lies $\frac{x - x_0}{x_0}$ statt $\frac{x - a}{x_0}$; Z. 2 v. u. lies $c_\mu$ statt $c^\mu$.
S. 296 Z. 5 v. o. lies $-\frac{i}{y} + 1$ statt $-\frac{1}{y} + 1$.
S. 297 Z. 11 v. u. lies $\cos nx + i \sin nx$ statt $\cos nx + i \sin x$; Z. 10 v. u. lies $\cos nx - i \sin nx$ statt $\cos nx - i \sin x$.
S. 298 Z. 8 v. o. lies „$\cos x$ und $\sin x$" statt „$\cos x$ und $\sin nx$".
S. 300 Z. 9 v. o. lies $(n^2 - 3^2)$ statt $(x^2 - 3^2)$.
S. 306 Z. 2 v. u. lies $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{2x}$ und $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{nx}$ statt $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{2^x}$ und $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^x}$.
S. 309 Z. 6 v. o. lies wann statt wenn; Z. 2 v. u. lies $(\nu = n + 1, n + 2, \ldots)$ statt $(\nu = 1, n + 2, \ldots)$.
S. 333 Z. 18 v. o. lies $\widetilde{w}$ statt $w$ u. Z. 6 v. u. lies $\widetilde{w}$ statt $\varpi$.
S. 338 Z. 3 v. o. lies $\operatorname{cotg} \pi \mu' \frac{\omega'}{\omega}$.
S. 389 lies statt § 61 § 62.
S. 394 lies statt § 61 § 63.